

УДК 539.3:534.1

## ВЕКТОРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРОВ ИЗ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

БЕЖАНЯН В. А., УЛИТКО А. Ф.

К настоящему времени получили значительное развитие исследования по механике сопряженных электроупругих полей в пьезокерамических средах, обусловленные, в основном, практической потребностью анализа динамических качеств различных типов электромеханических преобразователей энергии.

В ряде работ [2, 3, 5, 6] представлены основные уравнения и физически реализуемые механические и электрические граничные условия, соответствующие различным режимам работы керамических преобразователей. Получили развитие прикладные теории статического и динамического деформирования тонкостенных пьезоэлементов [1, 4], базирующиеся на гипотезах типа Кирхгоффа-Лява в задачах чистой теории упругости.

Однако, при анализе эффективности электромеханического преобразования энергии в некоторых устройствах и приборах (сейсмические датчики, элементы искровых генераторов и т. п.) необходимо опираться на результаты решения трехмерных задач электроупругости. Учитывая, что стандартными активными элементами многих устройств являются пьезокерамические цилиндры различной геометрии и поляризации (осевая, радиальная, окружная поляризации), закономерной является постановка трехмерных краевых задач для цилиндрических элементов различной поляризации и поиск эффективных методов их решения.

Ниже, основываясь на результаты работ [5, 6], дана векторная формулировка основных краевых задач динамической электроупругости в цилиндрических координатах, указан аналитический метод их решения.

1. В случае осевой поляризации (фиг. 1) кругового цилиндра (сплошного и поллого) уравнения сопряженного электроупругого поля представляются согласно [5, 6] в виде

$$c_{11}^E \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} - \left[ \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) - c_{44}^E \right] \left( \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} + \vec{e}_z \nabla^2 u_z \right) - \left[ \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) - c_{44}^E + c_{12}^E - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -c_{13}^E \left] \frac{\partial}{\partial z} (\vec{e}_z \operatorname{div} \vec{u} + \operatorname{grad} u_z) + \vec{e}_z (c_{11}^E - 4c_{44}^E - 2c_{13}^E + c_{33}^E) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \right. \\
 & = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - e_{15} \vec{e}_z \nabla^2 \psi - (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{grad} \psi - (e_{33} - e_{31} - 2e_{15}) \vec{e}_z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_{11}^S \nabla^2 \psi + (\varepsilon_{33}^S - \varepsilon_{11}^S) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = e_{15} \nabla^2 u_z + \\
 & + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{u} + (e_{33} - e_{31} - 2e_{15}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}
 \end{aligned}$$

Это — система четырех взаимосвязанных уравнений в частных производных относительно вектора перемещений и электростатического потенциала; ось  $Oz$  совпадает по направлению с полем предварительной поляризации.

Предполагая, что на поверхностях цилиндра  $r = r_0$ ,  $r = r_1$  и  $z = \pm h$  (фиг. 1) задан вектор внешних напряжений  $\vec{F}_n \exp(i\omega t)$ , для вектора перемещений и электростатического потенциала получаем следующего вида векторное граничное условие:

$$\begin{aligned}
 \exp(i\omega t) \vec{F}_n &= c_{12}^E \vec{n} \operatorname{div} \vec{u} + (c_{11}^E - c_{12}^E) \left[ (\vec{n} \operatorname{grad}) \vec{u} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{u}) \right] + \\
 & + (c_{13}^E - c_{12}^E) \left[ \vec{n} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \vec{e}_z n_z \operatorname{div} \vec{u} \right] + (c_{33}^E + c_{11}^E - 4c_{44}^E - 2c_{13}^E) \vec{e}_z n_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\
 & + \left[ c_{44}^E - \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \right] \left[ n_z \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \operatorname{grad} u_z \right) + \right. \\
 & \left. + \vec{e}_z \left( \vec{n} \operatorname{grad} u_z + \vec{n} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + e_{31} \vec{n} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \\
 & + (e_{33} + e_{31} - 2e_{15}) \vec{e}_z n_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + e_{15} [n_z \operatorname{grad} \psi + \vec{e}_z (\vec{n} \operatorname{grad} \psi)] \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Полагая в (1.2)  $\vec{n} = \vec{e}_z$  и  $z = \pm h$ , имеем граничные условия на торцах цилиндра, а для  $\vec{n} = \vec{e}_r$  и  $r = r_0$ ,  $r = r_1$  запишем граничные условия на цилиндрических поверхностях.

Что касается электрического граничного условия, то рассмотрим два случая подвода электрической энергии. В первом из них предполагаем, что электроды нанесены на торцевые поверхности  $z = \pm h$  и питаются генератором напряжений с выходным потенциалом  $\pm V_0 \exp(i\omega t)$ , на цилиндрических поверхностях электроды отсутствуют. Тогда имеем

$$\psi|_{z=\pm h} = \pm V_0 \exp(i\omega t)$$

$$D_r|_{r=\{r_0\}} = \left[ -\varepsilon_{11}^* \frac{\partial \psi}{\partial r} + e_{15} \operatorname{div} \vec{u} - e_{15} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \right] \Big|_{r=\{r_0\}} = 0 \quad (1.3)$$

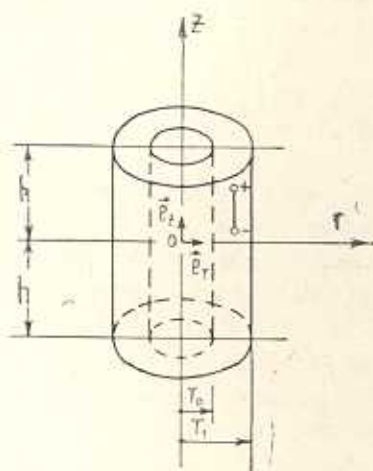
В случае, когда торцевые поверхности неэлектрофицированы, а к электрофицированным цилиндрическим поверхностям подведена указанная разность электрических потенциалов, граничные условия запишутся

$$D_z|_{z=\pm h} = \left[ -\varepsilon_{33}^* \frac{\partial \psi}{\partial z} + e_{31} \operatorname{div} \vec{u} + (e_{33} - e_{31}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \Big|_{z=\pm h} = 0$$

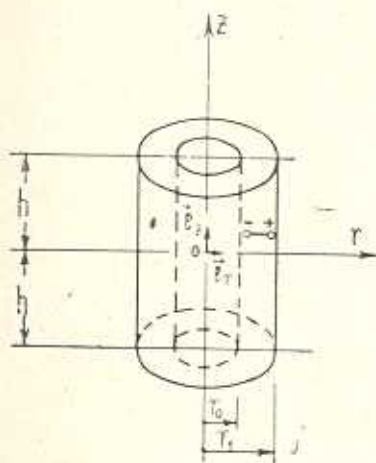
$$\psi|_{r=\{r_0\}} = \pm V_0 \exp(i\omega t) \quad (1.4)$$

Указанные граничные условия для стационарных колебаний с круговой частотой  $\omega$  обеспечивают однозначную разрешимость уравнений (1.1).

2. В задачах электроупругости для пьезоцилиндров с радиальной поляризацией (фиг. 2) по формулам работ [5, 6] уравнения в перемещениях записываются следующим образом:



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$c_{11}^E \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} +$$

$$+ \left( c_{44}^E - \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} \right) \left[ \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} \right) + \right.$$

$$\left. + \vec{e}_r \left( \nabla^2 u_r + \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{div} \vec{u} + 2 \frac{u_r}{r^2} \right) - \vec{e}_\theta \frac{u_\theta}{r^2} \right] +$$

$$+ \vec{e}_r (c_{11}^E + c_{33}^E - 4c_{44}^E - 2c_{13}^E) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) -$$



$$\begin{aligned}
& - (c_{12}^E - c_{13}^E) \left[ \text{grad} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \text{div} \vec{u}) \right] = \quad (2.1) \\
& = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - e_{15} \vec{e}_r \nabla^2 \psi - (e_{31} + e_{15}) \text{grad} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \\
& - e_{15} \frac{1}{r} \text{grad} \psi - \vec{e}_r (e_{33} - e_{31} - 2e_{15}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\
& \varepsilon_{11}^s \nabla^2 \psi + (\varepsilon_{33}^s - \varepsilon_{11}^s) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = e_{15} \left( \nabla^2 u_r + \frac{u_r}{r^2} \right) + \\
& + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial}{\partial r} \text{div} \vec{u} + e_{31} \frac{1}{r} \text{div} \vec{u} + \\
& + (e_{33} - e_{31} - 2e_{15}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)
\end{aligned}$$

Механические граничные условия при задании на всей поверхности вектора напряжений  $\vec{F}_n \exp(i\omega t)$  записываются в виде

$$\begin{aligned}
\exp(i\omega t) \vec{F}_n &= c_{12}^E \vec{n} \text{div} \vec{u} + (c_{11}^E - c_{12}^E) \left[ \vec{n} \text{grad} \vec{u} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{u}) \right] + \\
& + (c_{13}^E - c_{12}^E) \left[ \vec{n} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \vec{e}_r n_r \text{div} \vec{u} \right] + (c_{33}^E + c_{11}^E - 4c_{44}^E - 2c_{13}^E) \vec{e}_r n_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\
& + \left[ c_{44}^E - \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \right] \left[ n_r \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} + \text{grad} u_r \right) \right] + \quad (2.2) \\
& + \vec{e}_r \left( \vec{n} \text{grad} u_r + \vec{n} \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r} (n_r \vec{e}_\theta + n_\theta \vec{e}_r) + e_{31} \vec{n} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \\
& + (e_{33} + e_{31} - 2e_{15}) \vec{e}_r n_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + e_{15} [n_r \text{grad} \psi + \vec{e}_r (\vec{n} \text{grad} \psi)]
\end{aligned}$$

Электрические граничные условия, аналогично предыдущему случаю, формулируются таким образом:

а) при возбуждении колебаний через торцевые электроды

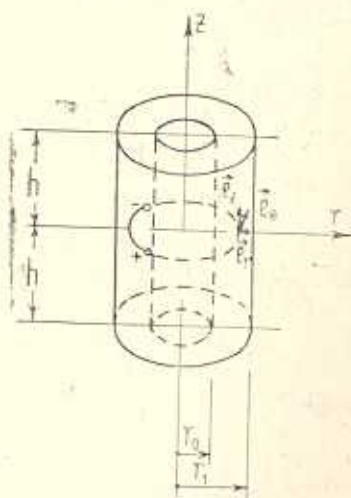
$$\begin{aligned}
\psi|_{z=\pm h} &= \pm V_0 \exp(i\omega t) \\
D_r|_{r=r_0} &= \left[ -\varepsilon_{33}^s \frac{\partial \psi}{\partial r} + e_{31} \text{div} \vec{u} + (e_{33} - e_{31}) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (2.3)
\end{aligned}$$

б) при подводе заданной разности потенциалов к электродам на цилиндрических поверхностях

$$\psi|_{r=r_0} = \pm V_0 \exp(i\omega t)$$

$$D_z|_{z=\pm h} = \left[ -\varepsilon_{11}^s \frac{\partial \psi}{\partial z} + e_{13} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] \Big|_{z=\pm h} = 0 \quad (2.4)$$

3. Наконец, если полый цилиндр поляризован в окружном направлении (фиг. 3), сопряженные уравнения электроупругости имеют вид



Фиг. 3.

$$c_{11}^E \text{grad div } \vec{u} - \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} \text{rot rot } \vec{u} + \left[ c_{44}^E - \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} \right] \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \theta^2} + \text{grad} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. + e_\theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{div } \vec{u} + \nabla^2 u_\theta - \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] \right\} + \\ + (c_{11}^E + c_{13}^E - c_{33}^E - c_{12}^E) \times \\ \times \left( \vec{e}_r - e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) -$$

$$- (c_{12}^E - c_{13}^E) \left\{ \frac{1}{r} \text{grad} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) - \vec{e}_r \frac{1}{r} \text{div } \vec{u} + \right. \quad (3.1)$$

$$\left. + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \text{div } \vec{u} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \right] \right\} =$$

$$= \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (e_{31} + e_{15}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{grad } \psi - e_{15} \vec{e}_\theta \left( \nabla^2 \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) -$$

$$- (e_{33} - e_{31} - 2e_{15}) \vec{e}_\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + e_{33} \vec{e}_r \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{11}^s \nabla^2 \psi + (\varepsilon_{33}^s - \varepsilon_{11}^s) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = e_{15} \left( \nabla^2 u_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) +$$

$$+ (e_{33} - e_{31} - 2e_{15}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + (e_{31} + e_{15}) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \text{div } \vec{u}$$

Для однозначной их разрешимости в случае первой основной граничной задачи на внешней поверхности полого цилиндра задается векторное условие

$$\begin{aligned}
\exp(i\omega t) \vec{F}_n = & c_{12}^E \vec{n} \operatorname{div} \vec{u} + (c_{11}^E - c_{12}^E) \left[ (\vec{n} \operatorname{grad}) \vec{u} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{u}) \right] + \\
& + (c_{13}^E - c_{12}^E) \left[ \vec{n} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \vec{e}_\theta n_\theta \operatorname{div} \vec{u} \right] + (c_{33}^E + c_{11}^E - 4c_{44}^E - \\
& - 2c_{13}^E) \vec{e}_\theta n_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \left[ c_{44}^E - \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) \right] \left[ n_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \operatorname{grad} u_\theta \right) + 2\vec{e}_\theta n_\theta \frac{u_r}{r} + \vec{e}_\theta \left( \vec{n} \operatorname{grad} u_\theta + \vec{n} \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} \right) \right] + e_{31} \vec{n} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \\
& + (e_{33} + e_{31} - 2e_{15}) \vec{e}_\theta n_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + e_{15} [n_\theta \operatorname{grad} \psi + \vec{e}_\theta (\vec{n} \operatorname{grad} \psi)] \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Электрические граничные условия формулируются таким образом:

а) если электроды заданы на торцевых поверхностях, то

$$\begin{aligned}
\psi|_{z=\pm h} = & \pm V_0 \exp(i\omega t) \\
D_r|_{r=r_0} = & \left[ -\varepsilon_{11}^s \frac{\partial \psi}{\partial r} + e_{15} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right] \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (3.3)
\end{aligned}$$

б) при нанесении электродов на цилиндрические поверхности имеем

$$\begin{aligned}
\psi|_{r=r_0} = & \pm V_0 \exp(i\omega t) \\
D_z|_{z=\pm h} = & \left[ -\varepsilon_{11}^s \frac{\partial \psi}{\partial z} + e_{15} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right] \Big|_{z=\pm h} = 0 \quad (3.4)
\end{aligned}$$

в) типичный случай задания электрического поля в цилиндрах с окружной поляризацией соответствует подводу электрической энергии через внутренние радиальные электроды. При этом для цилиндров, составленных из большого количества призм, приближенно можно принять

$$E_\theta = -\frac{V_0}{a} \frac{1}{r} \exp(i\omega t) \quad (3.5)$$

где  $2\alpha$  — угол раствора призмы. Дополнительное электрическое поле определяется условиями отсутствия электродов на торцевых и цилиндрических поверхностях, то есть

$$\begin{aligned}
D_r|_{r=r_0} = & \left[ -\varepsilon_{11}^s \frac{\partial \psi}{\partial r} + e_{15} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right] \Big|_{r=r_0} = 0 \\
D_z|_{z=\pm h} = & \left[ -\varepsilon_{11}^s \frac{\partial \psi}{\partial z} + e_{15} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right] \Big|_{z=\pm h} = 0 \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Представленные выше векторные краевые задачи для пьезокерамических цилиндров различной поляризации позволяют дать строгий анализ



сопряженных электроупругих полей в такого типа преобразователях при стационарных колебаниях.

Основные трудности здесь состоят в построении точных решений указанных векторных краевых задач.

4. В качестве одного из эффективных аналитических методов решения уравнений (1.1), (2.1) и (3.1) укажем метод разделения переменных Фурье со степенными разложениями по радиальной координате. Суть этого метода состоит в том, что по осевой координате решение представляется тригонометрическими функциями с некоторым произвольным параметром  $\lambda$ , а по радиальной координате — степенным рядом.

Ограничиваясь случаем осесимметричной деформации, что соответствует сформулированным выше электрическим граничным условиям, запишем

$$\begin{aligned} u_r &= U(r, \lambda) \frac{\cos \lambda z}{\sin \lambda z} \exp(i\omega t) \\ u_z &= \lambda W(r, \lambda) \frac{\sin \lambda z}{\cos \lambda z} \exp(i\omega t) \\ \psi &= \lambda \Psi(r, \lambda) \frac{\cos \lambda z}{\sin \lambda z} \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Форма записи степенных разложений для радиальных функций, входящих в (4.1), зависит от выбора направления поля предварительной поляризации цилиндров.

Так, например, для случая осевой поляризации удобными будут разложения

$$\begin{aligned} U(r, \lambda) &= \frac{1}{c_{11}^E} r^j \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) r^{n+1} \\ W(r, \lambda) &= \frac{1}{c_{44}^E} r^j \sum_{m=0}^{\infty} b_m(\lambda) r^m \\ \Psi(r, \lambda) &= \frac{1}{e_{15}} r^j \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda) r^k \end{aligned} \quad (4.2)$$

Внося разложения (4.1)—(4.2) в уравнения (1.1), для определения коэффициентов в рядах (4.2) получаем рекуррентные равенства

$$1) \quad j(j+2) a_0 + \left( \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} + 1 \right) \lambda^2 j b_0 + \left( \frac{e_{31}}{e_{15}} + 1 \right) \lambda^2 j c_0 = 0$$

$$(j+2)(j+4) a_2 + \left( \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} + 1 \right) \lambda^2 (j+2) b_2 +$$

$$+ \left( \frac{e_{31}}{e_{15}} + 1 \right) \lambda^2 (j+2) c_2 + \left( \frac{\omega^2 \rho}{c_{11}^E} - \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \lambda^2 \right) a_0 = 0$$

.....

$$\begin{aligned}
 2) \quad & j^2 b_0 + j^2 c_0 = 0 \\
 & (j+2)^2 b_2 + (j+2)^2 c_2 - \left( \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} + \frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \right) (j+2) a_0 + \\
 & + \left( \frac{\omega^2 \rho}{c_{44}^E} - \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} \lambda^2 \right) b_0 - \frac{e_{33}}{e_{15}} \lambda^2 c_0 = 0 \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & -\frac{e_{15}}{c_{44}^E} j^2 b_0 + \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} j^2 c_0 = 0 \\
 & -\frac{e_{15}}{c_{44}^E} (j+2)^2 b_2 + \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} (j+2)^2 c_2 + \left( \frac{e_{15}}{c_{11}^E} + \frac{e_{31}}{c_{11}^E} \right) (j+2) a_0 + \\
 & + \frac{e_{33}}{c_{44}^E} \lambda^2 b_0 - \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \lambda^2 c_0 = 0
 \end{aligned}$$

Структура этих уравнений такова, что полагая характеристический показатель  $j = 0$ , все постоянные можно выразить через произвольно выбранные начальные коэффициенты  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$ . Для соответствующих вычислений служат формулы

$$\begin{aligned}
 a_{2k} = & \frac{1}{\frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} + \frac{e_{15}}{c_{44}^E}} \frac{\lambda^2}{2k(2k+2)} \left\{ \left[ \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} \left( \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} + 1 \right) \left( \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} + \frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \right) + \right. \right. \\
 & + \left( \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} + 1 \right) \left( \frac{e_{15}}{c_{11}^E} + \frac{e_{31}}{c_{11}^E} \right) + \left( \frac{e_{31}}{e_{15}} + 1 \right) \left( \frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \frac{e_{15}}{c_{44}^E} - \frac{e_{31}}{c_{11}^E} \right) + \\
 & + \left. \left( \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} + \frac{e_{15}}{c_{44}^E} \right) \left( \frac{\omega^2 \rho}{c_{11}^E \lambda^2} - \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} \right) \right] a_{2k-2} + \left[ \left( \left( \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} + 1 \right) \left( \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} + \frac{e_{33}}{c_{44}^E} \right) + \right. \right. \\
 & + \left. \left( \frac{e_{31}}{e_{15}} + 1 \right) \left( \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} \frac{e_{15}}{c_{44}^E} - \frac{e_{33}}{c_{44}^E} \right) \right] \lambda^2 - \left( \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} + 1 \right) \frac{\omega^2 \rho}{c_{44}^E} \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} - \\
 & - \left. \left( \frac{e_{31}}{e_{15}} + 1 \right) \frac{\omega^2 \rho}{c_{44}^E} \frac{e_{15}}{c_{44}^E} \right] \frac{b_{2k-2}}{2k} + \left[ \left( \frac{e_{31}}{e_{15}} + 1 \right) \left( \frac{e_{33}}{c_{44}^E} + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \right) + \right. \\
 & + \left. \left. \left( \frac{c_{13}^E}{c_{44}^E} + 1 \right) \left( \frac{e_{33}}{e_{15}} \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} - \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \right) \right] \lambda^2 \frac{c_{2k-2}}{2k} \right\} \quad (4.4) \\
 b_{2k} = & \frac{1}{\frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} + \frac{e_{15}}{c_{44}^E}} \left\{ \left[ \frac{\varepsilon_{11}^s}{e_{15}} \left( \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} + \frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \right) + \frac{e_{15}}{c_{11}^E} + \frac{e_{31}}{c_{11}^E} \right] \frac{a_{2k-2}}{2k} + \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left[ \left( \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} \frac{\epsilon_{11}^s}{e_{15}} + \frac{e_{33}}{c_{44}^E} \right) \lambda^2 - \frac{\omega^2 \rho}{c_{44}^E e_{15}} \frac{\epsilon_{11}^s}{e_{15}} \right] \frac{b_{2k-2}}{(2k)^2} + \left( \frac{e_{33}}{e_{15}} \frac{\epsilon_{11}^s}{e_{15}} - \frac{\epsilon_{33}^s}{e_{15}} \right) \lambda^2 \frac{c_{2k-2}}{(2k)^2} \Big\} \\
c_{2k} & = \frac{1}{\frac{\epsilon_{11}^s}{e_{15}} + \frac{e_{33}}{c_{44}^E}} \left\{ \left( \frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} \frac{e_{15}}{c_{44}^E} - \frac{e_{31}}{c_{11}^E} \right) \frac{a_{2k-2}}{2k} + \right. \\
& + \left. \left[ \left( \frac{c_{33}^E}{c_{44}^E} \frac{e_{15}}{c_{44}^E} - \frac{e_{33}}{c_{44}^E} \right) \lambda^2 - \frac{\omega^2 \rho}{c_{44}^E} \frac{e_{15}}{c_{44}^E} \right] \frac{b_{2k-2}}{(2k)^2} + \left( \frac{e_{33}}{c_{44}^E} + \frac{\epsilon_{33}^s}{e_{15}} \right) \lambda^2 \frac{c_{2k-2}}{(2k)^2} \right\} \\
& (k=1, 2, 3, \dots)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Заметим, что произвольные константы  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  находятся из граничных условий на поверхности цилиндра  $r = r_1$ . Чтобы иметь возможность удовлетворить граничным условиям на поверхностях полого цилиндра  $r = r_0$  и  $r = r_1$ , необходимо дополнить решение (4.2) слагаемыми, содержащими произведение  $\ln r$  на степенные ряды такого же вида. В результате получаются такого же типа рекуррентные решения, содержащие еще три произвольные постоянные интегрирования. Внимательное рассмотрение рекуррентных решений для этого случая поляризации показывает, что радиальные функции  $U$ ,  $W$  и  $\Psi$  можно выразить через функции Бесселя от комплексного аргумента.

Обратившись к случаю радиальной поляризации, решение для радиальных функций будем искать в виде

$$\begin{aligned}
U(r, \lambda) & = \frac{1}{c_{11}^E} r^j \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) r^n \\
W(r, \lambda) & = \frac{1}{c_{44}^E} r^j \sum_{m=0}^{\infty} b_m(\lambda) r^{m+1} \\
\Psi(r, \lambda) & = \frac{1}{e_{15}} r^j \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda) r^k
\end{aligned} \tag{4.5}$$

После подстановки (4.1) и (4.5) в сопряженные уравнения движения (2.1) и приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях радиальной координаты, находим рекуррентные зависимости решения этой задачи. Их структура аналогична предыдущему случаю, но выражения имеют более громоздкий вид. Поэтому ограничимся лишь записью первых уравнений, из которых определяется характеристический показатель  $j$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{c_{33}^E}{c_{11}^E} j^2 - 1 \right) a_0 + \left( \frac{e_{33}}{e_{15}} j - \frac{e_{31}}{e_{15}} \right) j c_0 = 0 \\
& \left[ \frac{c_{44}^E}{c_{11}^E} (j+1) + \frac{c_{13}^E}{c_{11}^E} j + \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} \right] a_0 - (j+1)^2 b_0 + \left[ (j+1) + \frac{e_{31}}{e_{15}} j \right] c_0 = 0 \\
& \left( \frac{e_{33}}{c_{11}^E} j + \frac{e_{31}}{c_{11}^E} \right) j a_0 - \frac{\epsilon_{33}^s}{e_{15}} j^2 c_0 = 0
\end{aligned}$$

Нетривиальное решение этих уравнений соответствует случаю обращения в нуль их определителя.

Находим

$$j^2(j+1)^2 \left[ \left( \frac{c_{33}^E}{c_{11}^E} j^2 - 1 \right) \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} + \left( \frac{e_{33}}{e_{15}} j - \frac{e_{31}}{e_{15}} \right) \left( \frac{e_{33}}{c_{11}^E} j + \frac{e_{31}}{c_{11}^E} \right) \right] = 0$$

Отсюда следует, что при  $j = 0$  и  $j = -1$  имеем двойной нуль и простые корни, определяемые квадратным уравнением

$$j^2 \left( \frac{c_{33}^E}{c_{11}^E} \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} + \frac{e_{33}^2}{e_{15} c_{11}^E} \right) + j \left( \frac{e_{33}}{e_{15}} \frac{e_{31}}{c_{11}^E} - \frac{e_{31}}{e_{15}} \frac{e_{33}}{c_{11}^E} \right) - \left( \frac{e_{31}^2}{e_{15} c_{11}^E} + \frac{\varepsilon_{33}^s}{e_{15}} \right) = 0$$

Этим шести корням для  $j$  соответствуют шесть линейно-независимых степенных решений, которые позволяют выполнить граничные условия на поверхностях  $r = r_0$  и  $r = r_1$  радиально-поляризованного полого цилиндра.

Путем суммирования (интегрирования) найденных частных решений по параметру  $\lambda$  можно выполнить произвольно заданные граничные условия на цилиндрических поверхностях. Вопрос об удовлетворении граничных условий на торцевых поверхностях требует отдельного рассмотрения.

ՊՅԵԶՈՎԵՐԱՄԻԿ ԵՅՈՒԹԵՐԻՑ ԳԼԱՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ  
ԷԼԵԿՏՐԱՍՈՍԶԳՎԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ  
ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԳԻՐՆԵՐ

Վ. Ա. ԲԵԺԱՆԻԱՆ, Ա. Ֆ. ՈՒԼԻՏԿՈ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հողվածում արված է տարբեր բևեռացումներով շրջանային զլանների համար էլեկտրաառաձգականության դինամիկական խնդիրների գրվածքը մաթեմատիկական ֆիզիկայի վեկտորական եզրային խնդիրների տեսքով:

Զարգացված է այդպիսի գործնականորեն կարևոր էլեկտրաառաձգական խնդիրների դասի լուծման մեթոդ որոնելի ֆունկցիայի ըստ շառավղային կոորդինատի աստիճանային վերլուծության օգտագործմամբ:

Ներկայացված են ընդհանուր լուծման սկզբունքային բանաձևեր առանցքային և շառավղային բևեռացումով զլանների համար:

VECTORAL EDGE PROBLEMS OF ELECTROELASTICITY  
FOR THE CYLINDERS OF PIEZOCERAMIC MATERIALS

V. A. BEDZANIAN, A. PH. ULITKO

S u m m a r y

In this article the formulation of dynamic problems of electroelasticity for circular cylinders of different polarization in the form of vectoral edge problems of mathematical physics is given.

The analytic method for solving this practically important class of problems of electroelasticity with the use of power decay of unknown functions along the radial coordinate is developed. Recurrent formula of general solutions for cylinders with the axial and radial polarization is given.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Борисейко В. А., Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения.—ПМ, 1976, 12, № 2, с. 26—33.
2. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.—В кн.: Физическая акустика (Под ред. У. Мэсона). М.: Мир, 1966, т. 1, ч. А, с. 204—326.
3. Кудрявцев Б. А. Механика пьезоэлектрических материалов.—В кн.: Итоги науки и техники, Механика деформируемого твердого тела, т. II.—М.: Изд-во ВИНТИ, 1978, с. 5—66.
4. Ротачева Н. Н. Уравнение состояния пьезокерамических оболочек.—ПММ, 1981, 45, № 5, с. 902—911.
5. Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел.—В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наукова думка, 1975, вып. 15, с. 90—99.
6. Улитко А. Ф. О некоторых особенностях постановки граничных задач электроупругости.—В кн.: Современ. пробл. мех. и авиации. М.: 1982, с. 290—300.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса  
Киевский госуниверситет

Поступила в редакцию  
31. I. 1983