ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 6, 1984 Механика

УДК 539.31:62—414

АСИМПТОТИКА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

ГЕВОРКЯН Р. С.

Ранее было доказано [1], что гипотезы классической теории как изотропных, так и анизотропных пластин, не применимы для определения напряженно-деформированного состояния пластинок, когда на лицевых плоскостях заданы условия, отличные от условий первой краевой задачи теории упругости, например, когда одна из лицевых поверхностей жестко защемлена, а на другой заданы значения напряжений, перемещений или смешанные условия. Для решения подобного класса задач, имеющего большое прикладное значение, было предложено использовать асимптотический метод. Показано, что указанные задачи являются сингулярно возмущенными, следовательно, их решения складываются из проникающего и типа пограничного слоя составляющих. Проникающая составляющая решения полностью определяется, удовлетворяя граничным условиям на лицевых поверхностях пластинки [1].

В настоящей работе изучается пограничный слой и вопросы его взаимодействия с проникающей составляющей. Это позволяет получить решение соответствующей трехмерной задачи теории упругости с наперед заданной асимптотической точностью, одинаково пригодное как вблизи боковой поверхности, так и вдали от нее.

1. Чтобы построить решение пограничного слоя в уравнениях пространственной задачи теории упругости анизотропного тела [2] произведем замену независимых переменных по формулам [3, 4]

$$\alpha-\alpha_0=a\varepsilon\xi=h\xi,\quad \beta=a\eta,\quad \gamma=a\varepsilon\zeta=h\zeta \tag{1.1}$$

и в качестве неизвестных выберем напряжения σ_{ij} и безразмерные перемещения $u_\alpha=u/a$, $u_\beta=v/a$, $u_\gamma=w/a$, где a — характерный размер h — полутолщина пластинки, $\varepsilon=\dfrac{h}{a}$ — характерный малый параметр, $\alpha=\alpha_0$ — боковая поверхность, вблизи которой строится пограничный слой. В уравнениях и соотношениях упругости коэффициенты Ляме $H_\alpha=\dfrac{1}{A}$, $H_\beta=\dfrac{1}{B}$, геодезические кривизны $k_\alpha=\dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial A}{\partial\beta}$, $k_\beta=\dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial B}{\partial\alpha}$ α и β-линий заменим их рядами Тейлора.

Требуется найти решение системы преобразованных вышеуказанным способом уравнений теории упругости, удовлетворяющее условиям

$$u = v = w = 0 \text{ при } \gamma = -h \quad (\zeta = -1) \tag{1.2}$$

и одной из комбинаций следующих условий на верхней плоскости $\gamma = +h$ $(\zeta = +1)$:

$$\begin{aligned} &1.\ u = v = w = 0, \qquad &&2.\ \sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\gamma\gamma} = 0 \\ &3.\ \sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\beta\gamma} = w = 0, \qquad &&4.\ u = v = \sigma_{\gamma\gamma} = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Решение задачи будем искать в виде разложения [3, 4]

$$Q_j = \varepsilon^{\varkappa_j} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q_j^{(s)} \tag{1.4}$$

где Q_j — любая из искомых величин, $\varkappa_j = -1$ для напряжений и $\varkappa_j = 0$ для перемещений, $\varkappa_j$ характеризуют интенсивности напряжений и перемещений.

Подставив (1.4) в вышеуказанные уравнения, приравняв коэффициенты при соответствующих степенях ε, после некоторых преобразований получим следующую систему разрешающих уравнений:

$$H_{\alpha 0} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{(s)}}{\partial \zeta} = R_{\alpha\alpha}^{(s-1)}$$

$$H_{\alpha 0} \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}^{(s)}}{\partial \zeta} = R_{\gamma\gamma}^{(s-1)}$$

$$H_{\alpha 0} \frac{\partial u_\alpha^{(s)}}{\partial \xi} = a_{11}\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + a_{12}\sigma_{\beta\beta}^{(s)} + a_{13}\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} + a_{14}\sigma_{\beta\gamma}^{(s)} + a_{15}\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} + a_{16}\sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + R_u^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial u_\gamma^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{(s)} + a_{33}\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} + a_{34}\sigma_{\beta\gamma}^{(s)} + a_{35}\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} + a_{36}\sigma_{\alpha\beta}^{(s)} \tag{1.5}$$

$$a_{12}\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + a_{22}\sigma_{\beta\beta}^{(s)} + a_{23}\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} + a_{24}\sigma_{\beta\gamma}^{(s)} + a_{25}\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} + a_{26}\sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = R_v^{(s-1)}$$

$$H_{\alpha 0} \frac{\partial u_\gamma^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\alpha^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{15}\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + a_{25}\sigma_{\beta\beta}^{(s)} + a_{35}\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} + a_{45}\sigma_{\beta\gamma}^{(s)} + a_{55}\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} +$$
$$+ a_{56}\sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + R_{\alpha w}^{(s-1)}$$

$$H_{\alpha 0} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}^{(s)}}{\partial \zeta} = R_\tau^{(s-1)} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u_\beta^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{14}\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + a_{24}\sigma_{\beta\beta}^{(s)} + a_{34}\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} + a_{44}\sigma_{\beta\gamma}^{(s)} + a_{45}\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} + a_{46}\sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + R_{\beta\beta}^{(s-1)}$$

$$H_{\alpha 0} \frac{\partial u_\beta^{(s)}}{\partial \xi} = a_{16}\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} + a_{26}\sigma_{\beta\beta}^{(s)} + a_{36}\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} + a_{46}\sigma_{\beta\gamma}^{(s)} + a_{56}\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} + a_{66}\sigma_{\alpha\beta}^{(s)} + R_{\alpha\beta}^{(s-1)}$$

где $R_{\alpha\alpha}^{(s-1)}$, $R_{\gamma\gamma}^{(s-1)}$, $R_{u}^{(s-1)}$, $R_{v}^{(s-1)}$, $R_{uw}^{(s-1)}$, $R_{\tau}^{(s-1)}$, $R_{\beta\beta}^{(s-1)}$, $R_{\alpha\beta}^{(s-1)}$ — известные функции, отличные от нуля лишь при $s \geqslant 1$ и имеют вид, аналогичный [4].

Система уравнений (1.5), (1.6) однородная при $s = 0$ и неоднородная при $s \geqslant 1$, ее решение складывается из общего решения однородной и частного решения неоднородной систем. В общем случае анизотропии (21 упругая константа) в силу упругих эффектов взаимного влияния системы (1.5), (1.6) не разделяются и они должны быть решены совместно.

Решение однородной системы (1.5), (1.6), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), (1.3), будем искать в виде

$$\sigma_{ik}^{(s)} = \sum_{(\omega)} \sigma_{jl}^{(s)}(\zeta) \exp(-\omega t), \qquad t = \frac{1}{H_{s0}}\xi, \qquad (i, k = \alpha, \beta, \gamma;\ j, l = 1, 2, 3)$$

$$u_i^{(s)} = \sum_{(\omega)} u_j^{(s)}(\zeta) \exp(-\omega t), \qquad (i = \alpha, \beta, \gamma;\ u_j^{(s)} = u^{(s)}, v^{(s)}, w^{(s)}), \qquad \mathrm{Re}\,\omega > 0 \tag{1.7}$$

Подставив (1.7) в (1.5) и (1.6), все искомые величины выразим через $\sigma_{33}^{(s)}$ и $\sigma_{23}^{(s)}$

$$\sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\omega^2}\sigma_{33}''^{(s)}, \qquad \sigma_{13}^{(s)} = \frac{1}{\omega}\sigma_{33}'^{(s)}, \qquad \sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{\omega}\sigma_{23}'^{(s)}$$

$$\sigma_{22}^{(s)} = -\frac{1}{a_{22}}\left(\frac{a_{12}}{\omega^2}\sigma_{33}''^{(s)} + \frac{a_{25}}{\omega}\sigma_{33}'^{(s)} + a_{23}\sigma_{33}^{(s)} + \frac{a_{26}}{\omega}\sigma_{23}'^{(s)} + a_{24}\sigma_{23}^{(s)}\right)$$

$$u^{(s)} = -\frac{1}{\omega}\left(A_{11}\frac{1}{\omega^2}\sigma_{33}''^{(s)} + A_{15}\frac{1}{\omega}\sigma_{33}'^{(s)} + A_{13}\sigma_{33}^{(s)} + A_{16}\frac{1}{\omega}\sigma_{23}'^{(s)} + A_{14}\sigma_{23}^{(s)}\right)$$

$$v^{(s)} = -\frac{1}{\omega}\left(A_{16}\frac{1}{\omega^2}\sigma_{33}''^{(s)} + A_{56}\frac{1}{\omega}\sigma_{33}'^{(s)} + A_{36}\sigma_{33}^{(s)} + A_{66}\frac{1}{\omega}\sigma_{23}'^{(s)} + A_{46}\sigma_{23}^{(s)}\right) \tag{1.8}$$

$$w^{(s)} = -\frac{1}{\omega}\left[A_{11}\frac{1}{\omega^3}\sigma_{33}'''^{(s)} + 2A_{15}\frac{1}{\omega^2}\sigma_{33}''^{(s)} + (A_{13} + A_{55})\frac{1}{\omega}\sigma_{33}'^{(s)} + \right.$$

$$\left. + A_{35}\sigma_{33}^{(s)} + A_{16}\frac{1}{\omega^2}\sigma_{23}''^{(s)} + (A_{14} + A_{56})\frac{1}{\omega}\sigma_{23}'^{(s)} + A_{45}\sigma_{23}^{(s)}\right]$$

$$A_{ij} = \frac{a_{22}a_{ij} - a_{2i}a_{2j}}{a_{22}}, \qquad A_{ij} = A_{ji} \quad (i, j = 1, 3, 4, 5, 6)$$

Величины $\sigma_{33}^{(s)}$ и $\sigma_{23}^{(s)}$ определяются из системы

$$L_{11}\sigma_{33}^{(s)} + L_{12}\sigma_{23}^{(s)} = 0 \tag{1.9}$$

$$L_{12}\sigma_{33}^{(s)} + L_{22}\sigma_{23}^{(s)} = 0$$

где L_{11}, L_{12} и L_{22} — дифференциальные операторы

$$L_{11} = A_{11}\frac{d^4}{d\zeta^4} + 2A_{15}\omega\frac{d^3}{d\zeta^3} + (A_{55} + 2A_{13})\omega^2\frac{d^2}{d\zeta^2} + 2A_{35}\omega^3\frac{d}{d\zeta} + A_{33}\omega^4$$

$$L_{12}=A_{16}\omega\frac{d^3}{d\zeta^3}+(A_{14}+A_{56})\,\omega^2\frac{d^2}{d\zeta^2}+(A_{36}+A_{45})\omega^3\frac{d}{d\zeta}+A_{34}\omega^4 \quad (1.10)$$

$$L_{22}=A_{66}\omega^2\frac{d^2}{d\zeta^2}+2A_{46}\omega^3\frac{d}{d\zeta}+A_{44}\omega^4$$

Необходимо найти решение системы (1.9) при граничных условиях (1.2) и (1.3).

Введем функцию напряжений $\Phi^{(s)}$ по формулам $\sigma_{33}^{(s)}=L_{22}\Phi^{(s)}$, $\sigma_{23}^{(s)}= -L_{12}\Phi^{(s)}$, тогда решение системы (1.9) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения шестого порядка

$$(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)\,\Phi^{(s)}=0 \tag{1.11}$$

Пусть $\Phi^{(s)}=\sum\limits_{k=1}^{6}C_k^{(s)}\Psi_k(\zeta,\,\omega)$ — решение уравнения (1.11). Определив напряжения и перемещения по формулам (1.8), удовлетворив граничным условиям (1.2) и (1.3), получим однородную систему из шести алгебраических уравнений относительно шести неизвестных $C_k^{(s)}$. Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы определитель системы $\Delta=0$. Полученное трансцендентное уравнение служит для определения ω. Чтобы решение было затухающим по направлению l, необходимо ограничиваться корнями этого уравнения с $\mathrm{Re}\,\omega>0$. Определив ω, по формулам (1.7), (1.8) определятся все искомые напряжения и перемещения.

2. Для ортотропных пластинок, когда главные направления анизотропии совпадают с направлениями координатных линий, система разрешающих уравнений погранслоя распадается на две самостоятельные системы (1.5) и (1.6), которым соответствуют плоский и антиплоский погранслои. Поскольку $L_{12}\equiv 0$, из (1.9) получаем

$$L_{11}\sigma_{33}^{(s)}=0,\quad L_{22}\sigma_{23}^{(s)}=0 \tag{2.1}$$

Характеристическими уравнениями дифференциальных операторов (2.1) будут соответственно

$$A_{11}r^4+(A_{55}+2A_{13})\,r^2+A_{33}=0,\quad A_{66}k^2+A_{44}=0 \tag{2.2}$$

Для реальных ортотропных материалов корни первого характеристического уравнения (2.2) могут быть: мнимыми разными, мнимыми кратными или комплексно-сопряженными, а корни второго характеристического уравнения — только мнимыми. Решив систему (2.1) и удовлетворив граничным условиям при $\gamma=\pm h$ ($\varsigma=\pm 1$), получим окончательное решение. Приведем это решение плоского и антиплоского погранслоев для краевой задачи (2.1), $u\,(\pm h)=v\,(\pm h)=w\,(\pm h)=0$, когда корни первого характеристического уравнения (2.2) мнимые разные (для реальных ортотропных материалов чаще имеет место этот случай)

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} = \sum_{(\omega)} A_\omega^{(s)} \exp(-\omega t)[G_1(\omega)(P_1 \cos q_2\omega \cos q_1\omega\zeta - P_2 \cos q_1\omega \cos q_2\omega\zeta) -$$

$$- G_2(\omega)(P_1 \sin q_2\omega \sin q_1\omega\zeta - P_2 \sin q_1\omega \sin q_2\omega\zeta)]$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} = -\sum_{(s)} A_\omega^{(s)} \exp(-\omega t)[G_1(\omega)(P_1q_1 \cos q_2\omega \sin q_1\omega\zeta -$$

$$- P_2q_2 \cos q_1\omega \sin q_2\omega\zeta) + G_2(\omega)(P_1q_1 \sin q_2\omega \cos q_1\omega\zeta -$$

$$- P_2q_2 \sin q_1\omega \cos q_2\omega\zeta)] \qquad (2.3)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} = -\sum_{(\omega)} A_\omega^{(s)} \exp(-\omega t)[G_1(\omega)(P_1q_1^2 \cos q_2\omega \cos q_1\omega\zeta -$$

$$- P_2q_2^2 \cos q_1\omega \cos q_2\omega\zeta) -$$

$$- G_2(\omega)(P_1q_1^2 \sin q_2\omega \sin q_1\omega\zeta - P_2q_2^2 \sin q_1\omega \sin q_2\omega\zeta)]$$

$$\sigma_{\beta\beta}^{(s)} = -\sum_{(\omega)} A_\omega^{(s)} \frac{1}{a_{22}} \exp(-\omega t)\{G_1(\omega)[P_1(a_{12}q_1^2 - a_{23}) \cos q_2\omega \cos q_1\omega\zeta -$$

$$- P_2(a_{12}q^2 - a_{23}) \cos q_1\omega \cos q_2\omega\zeta] - G_2(\omega)[P_1(a_{12}q_1^2 - a_{23}) \times$$

$$\times \sin q_2\omega \sin q_1\omega\zeta - P_2(a_{12}q_2^2 - a_{23}) \sin q_1\omega \sin q_2\omega\zeta]\}$$

$$u_\alpha^{(s)} = \frac{P_1P_2}{2} \sum_{(\omega)} \frac{1}{\omega} A_\omega^{(s)} \exp(-\omega t)[G_1(\omega)(\cos q_2\omega \cos q_1\omega\zeta -$$

$$- \cos q_1\omega \cos q_2\omega\zeta) - G_2(\omega)(\sin q_2\omega \sin q_1\omega\zeta - \sin q_1\omega \sin q_2\omega\zeta)]$$

$$u_\gamma^{(s)} = \sum_{(\omega)} \frac{1}{2\omega} A_\omega^{(s)} \exp(-\omega t)[G_1(\omega)(q_1P_1^2 \cos q_2\omega \sin q_1\omega\zeta -$$

$$- q_2P_2^2 \cos q_1\omega \sin q_2\omega\zeta) + G_2(\omega)(q_1P_1^2 \sin q_2\omega \cos q_1\omega\zeta -$$

$$- q_2P_2^2 \sin q_1\omega \cos q_2\omega\zeta)]$$

$$\sigma_{\beta\gamma}^{(s)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = u_\beta^{(s)} = 0;$$

$$q_1^2 = \frac{A_{55} + 2A_{13} - \sqrt{D}}{2A_{11}}, \qquad q_2^2 = \frac{A_{55} + 2A_{13} + \sqrt{D}}{2A_{11}}$$

$$P_1 = A_{55} + \sqrt{D}, \qquad P_2 = A_{55} - \sqrt{D}, \qquad D = (A_{55} + 2A_{13})^2 - 4A_{11}A_{33} > 0$$

$$G_1(\omega) = \frac{1}{2}(q_1P_1^2 - q_2P_2^2) \sin(q_1 + q_2)\omega -$$

$$- \frac{1}{2}(q_1P_1^2 + q_2P_2^2) \sin(q_1 - q_2)\omega$$

$$G_2(\omega) = \frac{1}{2}(q_1P_1^2 - q_2P_2^2) \sin(q_1 + q_2)\omega +$$

$$+ \frac{1}{2}(q_1P_1^2 + q_2P_2^2) \sin(q_1 - q_2)\omega$$

где ω — корень трансцендентного уравнения

$$G_1(\omega)\cdot G_2(\omega)=0 \tag{2.4}$$

Для антиплоского погранслоя

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)}=\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)}=\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}=\sigma_{\beta\beta}^{(s)}=u_\alpha^{(s)}=u_\gamma^{(s)}=0$$

$$\sigma_{\beta\gamma}^{(s)}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\exp\left(-\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}\,\frac{\pi n}{2}\,t\right)\cos\frac{\pi(1+\zeta)n}{2} \tag{2.5}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}=-\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}}\sum_{n=1}^{\infty}B_n^{(s)}\exp\left(-\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}\,\frac{\pi n}{2}\,t\right)\sin\frac{\pi(1+\zeta)n}{2}$$

$$u_\beta^{(s)}=\frac{2a_{44}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}B_n^{(s)}\exp\left(-\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}\,\frac{\pi n}{2}\,t\right)\sin\frac{\pi(1+\zeta)n}{2}$$

Решением краевой задачи (2.1), $u(-h)=v(-h)=w(-h)=0$, $\sigma_{\gamma\gamma}(+h)=\sigma_{\beta\gamma}(+h)=\sigma_{\alpha\gamma}(+h)=0$, когда корни первого характеристического уравнения (2.2) мнимые разные, будет

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)}=\sum_{(\omega)}C_\omega^{(s)}\exp(-\omega t)\{q_2P_2[\sin(1+\zeta)q_1\omega-\sin 2q_1\omega\cos(1-\zeta)q_2\omega]+$$
$$+q_1P_1[\sin(1+\zeta)q_2\omega-\sin 2q_2\omega\cos(1-\zeta)q_1\omega]+$$
$$+q_2P_1\cos 2q_2\omega\sin(1-\zeta)q_1\omega+q_1P_2\cos 2q_1\omega\sin(1-\zeta)q_2\omega\}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)}=\sum_{(\omega)}C_\omega^{(s)}\exp(-\omega t)\{q_2P_2[q_1\cos(1+\zeta)q_1\omega-q_2\sin 2q_1\omega\sin(1-\zeta)q_2\omega]+$$
$$+q_1P_1[q_2\cos(1+\zeta)q_2\omega-q_1\sin 2q_2\omega\sin(1-\zeta)q_1\omega]-$$
$$-q_1q_2P_1\cos 2q_2\omega\cos(1-\zeta)q_1\omega-q_1q_2P_2\cos 2q_1\omega\cos(1-\zeta)q_2\omega\}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)}=\sum_{(\omega)}C_\omega^{(s)}\exp(-\omega t)\{q_2P_2[q_2^2\sin 2q_1\omega\cos(1-\zeta)q_2\omega-$$
$$-q_1^2\sin(1+\zeta)q_1\omega]+q_1P_1[q_1^2\sin 2q_2\omega\cos(1-\zeta)q_1\omega-q_2^2\sin(1+\zeta)q_2\omega]-$$
$$-q_1q_2^2P_2\cos 2q_1\omega\sin(1-\zeta)q_2\omega-q_1^2q_2P_1\cos 2q_2\omega\sin(1-\zeta)q_1\omega\}$$

$$\sigma_{\beta\beta}^{(s)}=\frac{1}{a_{22}}\sum_{(\omega)}C_\omega^{(s)}\exp(-\omega t)\{q_2P_2[(a_{12}q_1^2-a_{23})\sin(1+\zeta)q_1\omega-$$
$$-(a_{12}q_2^2-a_{23})\sin 2q_1\omega\cos(1-\zeta)q_2\omega]+$$
$$+q_1P_1[(a_{12}q_2^2-a_{23})\sin(1+\zeta)q_2\omega-(a_{12}q_1^2-a_{23})\sin 2q_2\omega\cos(1-\zeta)q_1\omega]+$$
$$+q_2P_1(a_{12}q_1^2-a_{23})\cos 2q_2\omega\sin(1-\zeta)q_1\omega+$$
$$+q_1P_2(a_{12}q_2^2-a_{23})\cos 2q_1\omega\sin(1-\zeta)q_2\omega\}$$

$$u_\alpha^{(s)}=\sum_{(\omega)}\frac{1}{2\omega}C_\omega^{(s)}\exp(-\omega t)\{q_1P_1^2\sin(1+\zeta)q_2\omega+q_2P_2^2\sin(1+\zeta)q_1\omega+$$
$$+q_1P_1P_2[\cos 2q_1\omega\sin(1-\zeta)q_2\omega-\sin 2q_2\omega\cos(1-\zeta)q_1\omega]+$$
$$+q_2P_1P_2[\cos 2q_2\omega\sin(1-\zeta)q_1\omega-\sin 2q_1\omega\cos(1-\zeta)q_2\omega]\}$$

$$u_\gamma^{(s)} = -\sum_{(\omega)} \frac{1}{2\omega} C_\omega^{(s)} \exp(-\omega t) \{q_1 q_2 P_1 P_2 [\cos(1+\zeta) q_1\omega + \cos(1+\zeta) q_2\omega] -$$

$$- q_1^2 P_1 \sin 2q_2\omega \sin(1-\zeta) q_1\omega - q_2^2 P_2^2 \sin 2q_1\omega \sin(1-\zeta) q_2\omega -$$

$$- q_1 q_2 P_1^2 \cos 2q_2\omega \cos(1-\zeta) q_1\omega - q_1 q_2 P_2^2 \cos 2q_1\omega \cos(1-\zeta) q_2\omega\}$$

$$\sigma_{\beta\gamma}^{(s)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = u_\beta^{(s)} = 0 \tag{2.6}$$

где ω — корень трансцендентного уравнения

$$\cos 2(q_1 - q_2)\omega - k_1 \cos 2(q_1 + q_2)\omega = k_2$$

$$k_1 = \frac{A_{55}(A_{55}^2 - D) + 2(A_{55}^2 + D)(A_{13} - \sqrt{A_{11}A_{33}})}{A_{55}(A_{55}^2 - D) + 2(A_{55}^2 + D)(A_{13} + \sqrt{A_{11}A_{33}})}$$

$$k_2 = \frac{4(A_{55}^2 - D)\sqrt{A_{11}A_{33}}}{A_{55}(A_{55}^2 - D) + 2(A_{55}^2 + D)(A_{13} + \sqrt{A_{11}A_{33}})} \tag{2.7}$$

Трансцендентные уравнения (2.4) и (2.7) по теореме Пикара имеют счетное множество корней, которые могут быть действительными и комплексными сопряженными. В (2.3) и (2.6) суммы берутся по всем ω с $\mathrm{Re}\,\omega > 0$.

Для антиплоского погранслоя получается

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} = \sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} = \sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} = \sigma_{\beta\beta}^{(s)} = u_\alpha^{(s)} = u_\gamma^{(s)} = 0$$

$$\sigma_{\beta\gamma}^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(s)} \exp\left[-\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}(2n+1)t\right] \cos\frac{\pi(1+\zeta)(2n+1)}{4}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = -\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(s)} \exp\left[-\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}(2n+1)t\right] \times \tag{2.8}$$

$$\times \sin\frac{\pi(1+\zeta)(2n+1)}{4}$$

$$u_\beta^{(s)} = \frac{4a_{44}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} D_n^{(s)} \exp\left[-\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}(2n+1)t\right] \times$$

$$\times \sin\frac{\pi(1+\zeta)(2n+1)}{4}$$

Заметим, что решение антиплоского погранслоя, соответствующее краевым условиям $u(+h) = v(+h) = \sigma_{\gamma\gamma}(+h) = 0$, совпадает с решением (2.5), а условиям $\sigma_{\alpha\gamma}(+h) = \sigma_{\beta\gamma}(+h) = w(+h) = 0$ соответствует (2.8). Решения же плоского погранслоя записываются аналогичным образом, которые не приводим.

В случае мнимых кратных корней характеристического уравнения (2.2), которому, в частности, соответствует изотропное тело, решение антиплоского погранслоя определяется по формулам (2.5) и (2.8). Решения, соответствующие условиям (1.2), $(1.3)_1$ и (1.2), $(1.3)_2$ записываются аналогичным образом, а их характеристическими уравнениями являются соответственно

$$\sin 2q\omega = \pm \frac{2A_{55}}{3A_{55} + 8A_{13}} q\omega \tag{2.9}$$

и

$$\cos 4q\omega = m_1 (4q\omega)^2 - m_2 \tag{2.10}$$

где $q^2 = \dfrac{A_{55} + 2A_{13}}{2A_{11}}$, $m_1 = \dfrac{A_{55}}{2(3A_{55} + 8A_{13})}$, $m_2 = \dfrac{A_{55}^2 + (3A_{55} + 8A_{13})^2}{2A_{55}(3A_{55} + 8A_{13})}$

Для изотропного тела

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = -\frac{\nu}{E}$$

$$a_{44} = a_{55} = a_{66} = A_{44} = A_{55} = A_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E}, \quad A_{11} = A_{33} = \frac{1-\nu^2}{E}$$

$$A_{13} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E}, \quad q = 1, \quad m_1 = \frac{1}{2(3-4\nu)}, \quad m_2 = \frac{1+(3-4\nu)^2}{2(3-4\nu)}$$

Решением внутренней задачи является [1]

$$Q_j = \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^{\varkappa_j + s} Q_j^{(s)}, \quad \varkappa_{\sigma_j} = -1, \quad \varkappa_{u_j} = 0$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(s)} = B_{13}\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)} + B_{14}\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} + B_{15}\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)} + \sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\sigma_{\beta\beta}^{(s)} = B_{23}\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)} + B_{24}\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} + B_{25}\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)} + \sigma_{\beta\beta}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(s)} = B_{63}\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)} + B_{64}\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} + B_{65}\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)} + \sigma_{\alpha\beta}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(s)} = \sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (\alpha, \beta)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(s)} = \sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta) \tag{2.11}$$

$$u_\alpha^{(s)} = \zeta(B_{53}\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)} + B_{54}\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} + B_{55}\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)}) + u_{\alpha 0}^{(s)}(\xi, \eta) + u_\alpha^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$u_\beta^{(s)} = \zeta(B_{43}\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)} + B_{44}\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} + B_{45}\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)}) + u_{\beta 0}^{(s)}(\xi, \eta) + u_\beta^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$u_\gamma^{(s)} = \zeta(B_{33}\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)} + B_{34}\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} + B_{35}\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)}) + u_{\gamma 0}^{(s)}(\xi, \eta) + u_\gamma^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

Для каждого (s) величины со звездочкой выражаются через данные предыдущих приближений рекуррентными формулами

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)} = [(a_{22}a_{66} - a_{26}^2) R_1^{(s-1)} + (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}) R_2^{(s-1)} +$$
$$+ (a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}) R_3^{(s-1)}] \Delta^{-1}$$

$$\sigma_{\beta\beta}^{*(s)} = [(a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}) R_1^{(s-1)} + (a_{11}a_{66} - a_{16}^2) R_2^{(s-1)} +$$
$$+ (a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}) R_3^{(s-1)}] \Delta^{-1}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{*(s)} = [(a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22}) R_1^{(s-1)} + (a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}) R_2^{(s-1)} +$$
$$+ (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) R_3^{(s-1)}] \Delta^{-1}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left[\frac{1}{A}\frac{\partial\sigma_{\alpha\alpha}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{1}{B}\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \right.$$

$$\left. + a\left(\sigma_{\alpha\alpha}^{(s-1)} - \sigma_{\beta\beta}^{(s-1)}\right)k_\beta + 2ak_\alpha\sigma_{\alpha\beta}^{(s-1)}\right]d\zeta, \quad (\alpha,\ \beta,\ \xi,\ \eta) \qquad (2.12)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{1}{A}\frac{\partial\sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{1}{B}\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma}^{(s-1)}}{\partial\eta} + ak_\beta\sigma_{\alpha\gamma}^{(s-1)} + ak_\alpha\sigma_{\beta\gamma}^{(s-1)}\right)d\zeta$$

$$u_\alpha^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{15}\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)} + a_{25}\sigma_{\beta\beta}^{*(s)} + a_{35}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)} + a_{45}\sigma_{\beta\gamma}^{*(s)} + a_{55}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)} + \right.$$

$$\left. + a_{65}\sigma_{\alpha\beta}^{*(s)} - \frac{1}{A}\frac{\partial u_\gamma^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)d\zeta$$

$$u_\beta^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{14}\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)} + a_{24}\sigma_{\beta\beta}^{*(s)} + a_{34}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)} + a_{44}\sigma_{\beta\gamma}^{*(s)} + a_{45}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)} + \right.$$

$$\left. + a_{46}\sigma_{\alpha\beta}^{*(s)} - \frac{1}{B}\frac{\partial u_\gamma^{(s-1)}}{\partial\eta}\right)d\zeta$$

$$u_\gamma^{*(s)} = \int_0^\zeta \left(a_{13}\sigma_{\alpha\alpha}^{*(s)} + a_{23}\sigma_{\beta\beta}^{*(s)} + a_{33}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)} + a_{34}\sigma_{\beta\gamma}^{*(s)} + a_{35}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)} + a_{36}\sigma_{\alpha\beta}^{*(s)}\right)d\zeta$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{66} + 2a_{12}a_{26}a_{16} - a_{11}a_{26}^2 - a_{22}a_{16}^2 - a_{66}a_{12}^2$$

$$R_1^{(s-1)} = \frac{1}{A}\frac{\partial u_\alpha^{(s-1)}}{\partial\xi} + a\,k_\alpha u_\beta^{(s-1)} - a_{13}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)} - a_{14}\sigma_{\beta\gamma}^{*(s)} - a_{15}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}$$

$$R_2^{(s-1)} = \frac{1}{B}\frac{\partial u_\beta^{(s-1)}}{\partial\eta} + ak_\beta u_\alpha^{(s-1)} - a_{23}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)} - a_{24}\sigma_{\beta\gamma}^{*(s)} - a_{25}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}$$

$$R_3^{(s-1)} = \frac{1}{B}\frac{\partial u_\alpha^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{1}{A}\frac{\partial u_\beta^{(s-1)}}{\partial\xi} - ak_\alpha u_\alpha^{(s-1)} - ak_\beta u_\beta^{(s-1)} -$$

$$- a_{36}\sigma_{\gamma\gamma}^{*(s)} - a_{46}\sigma_{\beta\gamma}^{*(s)} - a_{56}\sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}$$

$$B_{1i} = \left[a_{1i}\left(a_{26}^2 - a_{22}a_{66}\right) + a_{2i}\left(a_{12}a_{66} - a_{16}a_{26}\right) + a_{6i}\left(a_{22}a_{16} - a_{12}a_{26}\right)\right]\Delta^{-1}$$

$$B_{2i} = \left[a_{1i}\left(a_{12}a_{66} - a_{16}a_{26}\right) + a_{2i}\left(a_{16}^2 - a_{11}a_{66}\right) + a_{6i}\left(a_{11}a_{26} - a_{12}a_{16}\right)\right]\Delta^{-1}$$

$$B_{6i} = \left[a_{1i}\left(a_{16}a_{22} - a_{12}a_{26}\right) + a_{2i}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{16}\right) + a_{6i}\left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\right]\Delta^{-1}$$

$$B_{ki} = a_{1k}B_{1i} + a_{2k}B_{2i} + a_{6k}B_{6i} + a_{ki}, \qquad B_{ik} \neq B_{ki} \qquad (k,\ i = 3,\ 4,\ 5)$$

(2.11) содержит неизвестные пока функции $u_{\alpha 0}^{(s)}$, $u_{\beta 0}^{(s)}$, $u_{\gamma 0}^{(s)}$, $\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)}$, $\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)}$, $\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)}$.

Они однозначно определяются из условий при $\gamma = \pm h$. В частности, краевым условиям $u_\alpha(\pm h) = u^\pm(\alpha, \beta)$, $u_\beta(\pm h) = v^\pm(\alpha, \beta)$, $u_\gamma(\pm h) = w^\pm(\alpha, \beta)$ соответствует

$$
\begin{aligned}
u_{\alpha 0}^{(s)} &= B_{53}\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)} + B_{54}\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} + B_{55}\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)} - u_\alpha^{*(s)}(\zeta = -1) + u_\alpha^{-(s)} \\
u_{\beta 0}^{(s)} &= B_{43}\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)} + B_{44}\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} + B_{45}\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)} - u_\beta^{*(s)}(\zeta = -1) + u_\beta^{-(s)} \qquad (2.13)\\
u_{\gamma 0}^{(s)} &= B_{33}\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)} + B_{34}\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} + B_{35}\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)} - u_\gamma^{*(s)}(\zeta = -1) + u_\gamma^{-(s)} \\
\sigma_{\gamma\gamma 0}^{(s)} &= [(B_{44}B_{35} - B_{34}B_{45})V_\alpha^{(s)} + (B_{34}B_{55} - B_{35}B_{54})V_\beta^{(s)} + \\
&\quad + (B_{45}B_{54} - B_{44}B_{55})V_\gamma^{(s)}]\Delta_1^{-1} \\
\sigma_{\beta\gamma 0}^{(s)} &= [(B_{33}B_{45} - B_{43}B_{35})V_\alpha^{(s)} + (B_{35}B_{53} - B_{33}B_{55})V_\beta^{(s)} + \\
&\quad + (B_{43}B_{55} - B_{45}B_{53})V_\gamma^{(s)}]\Delta_1^{-1} \\
\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)} &= [(B_{43}B_{35} - B_{33}B_{44})V_\alpha^{(s)} + (B_{33}B_{54} - B_{34}B_{53})V_\beta^{(s)} + \\
&\quad + (B_{53}B_{44} - B_{43}B_{54})V_\gamma^{(s)}]\Delta_1^{-1}
\end{aligned}
$$

$$V_\alpha^{(s)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[u_\alpha^{*(s)}(-1) - u_\alpha^{*(s)}(+1) + u_\alpha^{+(s)} - u_\alpha^{-(s)}], \qquad (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$u_\alpha^{\pm(0)} = u^\pm/a, \quad u_\beta^{\pm(0)} = v^\pm/a, \quad u_\gamma^{\pm(0)} = w^\pm/a, \quad u_\alpha^{\pm(s)} = u_\beta^{\pm(s)} = u_\gamma^{\pm(s)} = 0 \quad (s \neq 0)$$

$$\Delta_1 = B_{35}B_{44}B_{53} + B_{33}B_{45}B_{54} + B_{55}B_{34}B_{43} - B_{33}B_{44}B_{55} - B_{34}B_{45}B_{53} - B_{43}B_{54}B_{35}$$

В случае условий

$$
\begin{gathered}
u_\alpha(-h) = u^-(\alpha, \beta), \qquad u_\beta(-h) = v^-(\alpha, \beta), \qquad u_\gamma(-h) = w^-(\alpha, \beta) \\
\sigma_{\gamma\gamma}(+h) = \varepsilon^{-1}\sigma_{\gamma\gamma}^+(\alpha, \beta), \qquad \sigma_{\alpha\gamma}(+h) = \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha\gamma}^+(\alpha, \beta), \\
\sigma_{\beta\gamma}(+h) = \varepsilon^{-1}\sigma_{\beta\gamma}^+(\alpha, \beta)
\end{gathered}
$$

имеем

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\alpha\gamma 0}^{(s)} = \sigma_{\alpha\gamma}^{+(s)} - \sigma_{\alpha\gamma}^{*(s)}(\zeta = 1), \\
\sigma_{\alpha\gamma}^{+(0)} = \sigma_{\alpha\gamma}^+, \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{+(s)} = 0, \qquad s \neq 0 \quad (\alpha = \alpha, \beta, \gamma)
\end{gathered} \qquad (2.14)
$$

а $u_{\alpha 0}^{(s)}$, $u_{\beta 0}^{(s)}$, $u_{\gamma 0}^{(s)}$ определяются по формуле (2.13).

Поскольку решение внутренней задачи полностью определяется условиями на $\gamma = \pm h$, то условиям на боковой поверхности будет соответствовать пограничный слой. Следовательно, эти условия могут быть удовлетворены, если использовать произвольные константы решения погранслоя.

Укажем процедуру удовлетворения условиям на боковой поверхности $\alpha = \alpha_0$ для случаев 1) $u_\alpha = u^0$, $u_\beta = v^0$, $u_\gamma = w^0$, 2) $\sigma_{\alpha\alpha} = \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha\alpha}^0$, $\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha\beta}^0$, $\sigma_{\alpha\gamma} = \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha\gamma}^0$.

3. Общий интеграл краевой задачи пластины записывается в виде

$$J_j = Q_j^{\text{вн.}} + Q_j^{\text{пл. пгр.}} + Q_j^{\text{ант. пл.}} \tag{3.1}$$

где $Q_j^{\text{вн.}}$, $Q_j^{\text{пл. пгр.}}$, $Q_j^{\text{ант. пл.}}$ — соответственно решения внутренней задачи плоского и антиплоского погранслоев. Поскольку каждому комплексному корню ω соответствует сопряженный корень, то $Q_j^{\text{пл. пгр.}}$ является вещественной функцией, содержит две группы вещественных произвольных констант (функций от η) — $E_\omega(\eta)$, $F_\omega(\eta)$ и записывается в виде

$$Q_j^{\text{пл. пгр.}} = \sum_{(s)} \varepsilon^{\chi_j + s} \Big[\sum_{(\omega)} \big(E_\omega^{(s)}(\eta) \operatorname{Re} \Omega_{j\omega}(t, \zeta) + F_\omega^{(s)}(\eta) \operatorname{Jm} \Omega_{j\omega}(t, \zeta) + R_j^{*(s-1)}\Big] \tag{3.2}$$

где для каждой физической величины $\Omega_{j\omega}(t, \zeta)$ — функции при комплексных константах $A_\omega^{(s)}$, $C_\omega^{(s)}$, $P_\omega^{(s)}$, $M_\omega^{(s)}$, задаваемые формулами (2.3), (2.6), $R_j^{*(s-1)}$ — частное решение неоднородной системы (1.5).

$Q_j^{\text{ант. пл.}}$ задается по формуле (2.5) или (2.8), содержит одну, притом вещественную, константу интегрирования $B_n^{(s)}$ или $D_n^{(s)}$.

Таким образом, решения плоского и антиплоского пограничных слоев в совокупности содержат три группы независимых констант, составляющие счетное множество, достаточное для удовлетворения трем условиям на боковой поверхности.

Используя (3.1), (1.4), (2.11), удовлетворив условиям $u_\alpha = u^0$, $u_\beta = v^0$, $u_\gamma = w^0$ при $\alpha = \alpha_0$, получим

$$\sum_{(\omega)} [E_\omega^{(s)} \operatorname{Re} \Omega_{u_\alpha}(0, \zeta) + F_\omega \operatorname{Jm} \Omega_{u_\alpha}(0, \zeta)] = \overline{u}_\alpha^{(s)} - u_\alpha^{(s)\,\text{вн.}}(\alpha_0) - R_{u_\alpha}^{*(s-1)}(t=0)$$

$$\sum_{(\omega)} [E_\omega^{(s)} \operatorname{Re} \Omega_{u_\gamma}(0, \zeta) + F_\omega \operatorname{Jm} \Omega_{u_\gamma}(0, \zeta)] = \overline{u}_\gamma^{(s)} - u_\gamma^{(s)\,\text{вн.}}(\alpha_0) - R_{u_\gamma}^{*(s-1)}(t=0) \tag{3.3}$$

а также

$$\frac{2}{\pi} a_{44} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} B_n^{(s)} \sin \frac{\pi(1+\zeta)n}{2} = \overline{u}_\beta^{(s)} - u_\beta^{(s)\text{вн.}} - R_{u_\beta}^{*(s-1)}(t=0) \tag{3.4}$$

если пограничный слой соответствует условиям

$$u_\alpha(\pm h) = u_\beta(\pm h) = 0, \quad u_\gamma(\pm h) = 0 \text{ или } \sigma_{\gamma\gamma}(\pm h) = 0 \tag{3.5}$$

и

$$\frac{4}{\pi} a_{44} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} D_n^{(s)} \sin \frac{\pi(2n+1)(1+\zeta)}{4} = \overline{u}_\beta^{(s)} - u_\beta^{(s)\,\text{вн.}} - R_{u_\beta}^{*(s-1)}(t=0) \tag{3.6}$$

когда пограничный слой соответствует условиям

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\pm h) = \sigma_{\beta\gamma}(\pm h) = 0; \quad \sigma_{\gamma\gamma}(\pm h) = 0 \text{ или } u_\gamma(\pm h) = 0 \tag{3.7}$$

При этом $\overline{u}_\alpha^{(0)} = u^0$, $\overline{u}_\beta^{(0)} = v^0$, $\overline{u}_\gamma^{(0)} = w^0$, $\overline{u}_\alpha^{(s)} = \overline{u}_\beta^{(s)} = \overline{u}_\gamma^{(s)} = 0$ при $s > 0$.

Если при $\alpha = \alpha_0$ заданы значения напряжений: $\sigma_{\alpha\alpha} = \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha\alpha}^0$, $\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha\beta}^0$, $\sigma_{\alpha\gamma} = \varepsilon^{-1}\sigma_{\alpha\gamma}^0$, получается

$$\sum_{(\omega)}[E_\omega^{(s)} \operatorname{Re} \Omega_{\sigma_{\alpha\alpha}}(0, \zeta) + F_\omega^{(s)} \operatorname{Jm} \Omega_{\sigma_{\alpha\alpha}}(0, \zeta)] = \overline{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(s)} - \sigma_{\alpha\alpha}^{(s)\,\text{вн.}}(\alpha_0) - R_{\sigma_{\alpha\alpha}}^{*(s-1)} \quad (t = 0)$$

$$\sum_{(\omega)}[E_\omega^{(s)} \operatorname{Re} \Omega_{\sigma_{\alpha\gamma}}(0, \zeta) + F_\omega^{(s)} \operatorname{Jm} \Omega_{\sigma_{\alpha\gamma}}(0, \zeta)] = \overline{\sigma}_{\alpha\gamma}^{(s)} - \sigma_{\alpha\gamma}^{(s)\,\text{вн.}}(\alpha_0) - R_{\sigma_{\alpha\gamma}}^{*(s-1)} \quad (t = 0) \tag{3.8}$$

а также

$$-\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(s)} \sin \frac{\pi(1+\zeta)n}{2} = \overline{\sigma}_{\alpha\beta}^{(s)} - \sigma_{\alpha\beta}^{(s)\,\text{вн.}}(\alpha_0) - R_{\sigma_{\alpha\beta}}^{*(s-1)} \quad (t = 0) \tag{3.9}$$

или

$$-\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \sum_{n_1=0}^{\infty} D_n^{(s)} \sin \frac{\pi(2n+1)(1+\zeta)}{4} = \overline{\sigma}_{\alpha\beta}^{(s)} - \sigma_{\alpha\beta}^{(s)\,\text{вн.}}(\alpha_0) - R_{\sigma_{\alpha\beta}}^{*(s-1)} \quad (t = 0) \tag{3.10}$$

соответствующие (3.5) и (3.7). Выше принято $\overline{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(0)} = \sigma_{\alpha\alpha}^0$, $\overline{\sigma}_{\alpha\gamma}^{(0)} = \sigma_{\alpha\gamma}^0$, $\overline{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)} = \sigma_{\alpha\beta}^0$, $\overline{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(s)} = \overline{\sigma}_{\alpha\gamma}^{(s)} = \overline{\sigma}_{\alpha\beta}^{(s)} = 0$, $s > 0$.

Из (3.4), (3.6), (3.9), (3.10) методом Фурье сразу определяются коэффициенты $B_n^{(s)}$, $D_n^{(s)}$. Например, используя (3.4), имеем

$$B_n^{(s)} = \frac{\pi^2 n^2}{4a_{44}} \int_{-1}^{1} [\overline{u}_\beta^{(s)} - u_\beta^{(s)\text{вн.}}(\alpha_0) - R_{u_\beta}^{*(s-1)}(t = 0)] \sin \frac{\pi(1+\zeta)n}{2}\, d\zeta$$

а из (3.6) вытекает

$$D_n^{(s)} = \frac{\pi^2(2n+1)^2}{16\, a_{44}} \int_{-1}^{1} [\overline{u}_\beta^{(s)} - u_\beta^{(s)\text{вн}}(\alpha_0) - R_{u_\beta}^{*(s-1)}(t = 0)] \sin \frac{\pi(1+\zeta)(2n+1)}{4}\, d\zeta$$

Коэффициенты решения плоского пограничного слоя $E_\omega^{(s)}$, $F_\omega^{(s)}$ определяются из условий (3.3) и (3.8). Их можно определить лишь приближенно, но с достаточной точностью. Для этого удобно использовать такие методы, как метод граничной коллокации, наименьших квадратов, разложения функций в обеих частях (3.3) и (3.8) по некоторой ортонормальной системе с последующим сведением к решению бесконечной системы алгебраических уравнений и др.

Определив величины пограничного слоя и используя решение (2.11)—(2.14) внутренней задачи, тем самым будем иметь полное решение сформулированных краевых задач.

В заключение отметим, что асимптотический метод и найденная асимптотика решения внутренней задачи и пограничных слоев могут быть применены для решения смешанных краевых задач слоистых пластин и оболочек, в частности, для расчета слоистых упругих оснований и фундаментов конечной мощности. Используя найденные решения смешанных задач, можно решать контактные задачи пластин и оболочек.

Автор выражает благодарность Л. А. Агаловяну за советы и внимание к работе.

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՀԱՄԱՐ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿԱՆ

Ռ. Ս. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է անիզոտրոպ սալերի սահմանային շերտի խնդիրը, երբ սալի վերին և ներքին նիստերի վրա տրված են տեղափոխումները կամ առաձգականության տեսության խառը եզրային խնդրի պայմանները։

Արտածված են լարումների և տեղափոխումների բանաձևերը օրթոտրոպ սալերի հարթ և հակահարթ սահմանային շերտերի համար։ Օգտագործելով համապատասխան ներքին խնդրի լուծումը և բավարարելով կողմնային մակերևույթի վրա տրված պայմաններին կարվում են սահմանային շերտի ու ներքին խնդրի լուծումները։

ASYMPTOTICS OF BOUNDARY LAYER FOR ONE CLASS OF BOUNDARY PROBLEMS OF ANIZOTROPIC PLATES

R. S. GEVORGIAH

S u m m a r y

The boundary layer of anisotropic plates is investigated, when on plate facial planes the displacements or mixed boundary conditions of elasticity theory are given. The formulas for the stresses and displacements for both plane and antiplane boundary layers of orthotropic plates are deduced.

Jointing the boundary layer with the solution of the interior problem, the asymptotic solution of the corresponding three-dimensional problem is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С.* Неклассические краевые задачи с общей анизотропией. В сб. «Тезисы докладов IV Всесоюзного симпозиума — Механика конструкций из композиционных материалов», Новосибирск: 1982, с. 65—66.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. *Агаловян Л. А.* О пограничном слое анизотропных оболочек.— В сб. Тр. XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван: 1980, т. 12—18.
5. *Агаловян Л. А.* О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. 30, № 5, с. 48—62.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
17. I. 1984