

ОПТИМИЗАЦИЯ ФЛАТТЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

СЕЙРАНЯН А. П., ШАРАНЮК А. В.

Устойчивость неконсервативных систем связана с анализом устойчивости колебаний, то есть динамической устойчивостью [1—3]. В настоящее время большой интерес исследователей вызывают задачи оптимизации характеристик динамической устойчивости [4—25]. Этот интерес прежде всего обусловлен потребностями развития авиационной техники.

Подавляющее большинство работ из цитированных выше посвящается анализу систем с конечным числом степеней свободы, поскольку описание современных летательных аппаратов обычно производится с помощью дискретных моделей. Использование для распределенных систем методов решения типа метода конечных элементов, метода конечных разностей, метода Бубнова-Галеркина и других также приводит к необходимости исследования дискретных моделей. Поиск оптимальных решений непосредственно связан с анализом чувствительности характеристик устойчивости системы по отношению к параметрам проектирования.

В настоящей работе для дискретных систем рассматриваются вопросы, связанные с анализом чувствительности и оптимизацией характеристик динамической устойчивости. В качестве расчетных примеров рассмотрены задачи максимизации критической скорости флаттера крыла малого удлинения в потоке газа. Приводятся и анализируются численные результаты.

1. *Анализ чувствительности.* В задачах динамической устойчивости наибольший интерес представляет исследование влияния параметров системы (геометрических, жесткостных и массовых характеристик) на область устойчивости. В общем случае анализ влияния различных параметров затруднителен ввиду того, что критические параметры устойчивости, как правило, явно не выражаются через определяющие параметры системы. В этом параграфе с помощью введения так называемой сопряженной системы дается вывод соотношений, описывающих чувствительность критических параметров устойчивости к изменению параметров проектирования.

Рассмотрим линейную неконсервативную систему с конечным числом степеней свободы n , подверженную явлению динамической неустойчивости типа флаттер. Предполагается, что система характеризуется вектором параметров проектирования $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3, \dots, t_N)$, которые выбираются проектировщиком. В качестве параметров проектирования могут выступать различные геометрические, массовые и жесткостные характеристики системы; размеры силовых элементов, толщины обшивки, величины грузов и т. п.

Произведя отделение временной переменной с помощью экспоненты $\exp(i\tau)$, уравнение движения системы запишем в виде матричного уравнения

$$L(P, \lambda, \vec{t}) \vec{\xi} = 0 \quad (1.1)$$

в котором действительный параметр P обозначает параметр неконсервативной внешней нагрузки, $\lambda = \alpha + i\omega$ — комплексное собственное значение, $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ представляет собой комплексный собственный вектор обобщенных перемещений, вектор параметров проектирования \vec{t} был описан выше. Матрица L представляет собой комплексную несимметричную матрицу размером $n \times n$. Обычно матрица L имеет следующую структуру:

$$L = K(\vec{t}) + i^2 M(\vec{t}) + \lambda A(P, \vec{t}) + B(P, \vec{t}) \quad (1.2)$$

где K и M являются симметричными действительными матрицами жесткостей и масс, A и B — несимметричные комплексные матрицы размером $n \times n$. Предполагается, что матрицы K, M, A, B непрерывно дифференцируемы по P и $t_i, i = 1, 2, \dots, N$.

Устойчивость движения системы определяется как условие того, что действительные части всех собственных значений $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Данное неравенство является ограничением на степень устойчивости системы, $\varepsilon_0 \geq 0$. Это условие определяет критическое значение параметра внешней нагрузки P_k и критический тон колебаний λ_k .

$$\operatorname{Re} \lambda_k = -\varepsilon_0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} \lambda_i < -\varepsilon_0 \\ \operatorname{Re} \lambda_{k,p} > 0 \quad \text{и} \quad i \neq k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{при} \quad P = P_k \quad (1.3)$$

Нижний индекс с предшествующей запятой означает операцию дифференцирования. Условие (1.3) представляет собой достаточное условие того, что устойчивость нарушается, когда параметр нагрузки P становится больше критического значения P_k . Производная $\operatorname{Re} \lambda_{k,p}$ показывает, насколько быстро по отношению к приросту ΔP развивается динамическая неустойчивость, то есть насколько опасным является флаттер.

Вычислим производные от критической нагрузки P_k по параметрам проектирования t_1, t_2, \dots, t_N и производную $\operatorname{Re} \lambda_{k,p}$. С этой целью введем сопряженную (транспонированную) к (1.1) задачу

$$L^T(P, \lambda, \vec{t}) \vec{\eta} = 0 \quad (1.4)$$

где L^T обозначает матрицу, транспонированную к L , а вектор $\vec{\eta}$ представляет собой комплексный собственный вектор обобщенных перемещений

сопряженной системы. При фиксированном значении P собственные значения λ в сопряженных задачах (1.1), (1.2) совпадают ввиду того, что детерминанты матриц L и L^T тождественно равны.

Придадим параметру t_i вариацию δt_i . Тогда величины λ , P , $\vec{\xi}$ также получат приращения $\delta\lambda$, δP , $\delta\vec{\xi}$. Уравнение в вариациях имеет вид

$$L_{,P} \vec{\xi} \delta P + L_{,\lambda} \vec{\xi} \delta\lambda + L_{,t_i} \vec{\xi} \delta t_i + L \delta\vec{\xi} = 0 \quad (1.5)$$

Умножая это уравнение слева на транспонированный вектор $\vec{\eta}^T$, получим выражение

$$(\vec{\eta}^T L_{,P} \vec{\xi}) \delta P + (\vec{\eta}^T L_{,\lambda} \vec{\xi}) \delta\lambda + (\vec{\eta}^T L_{,t_i} \vec{\xi}) \delta t_i = 0 \quad (1.6)$$

Последний член в (1.5) исчезает ввиду равенства

$$(\vec{\eta}^T L \delta\vec{\xi}) = (\delta\vec{\xi}^T L^T \vec{\eta}) = 0 \text{ согласно (1.4).}$$

Из уравнения (1.6) можно найти первую производную критической нагрузки P_k по произвольному параметру проектирования t_i . С этой целью подставим в (1.6) значения $P = P_k$, $\lambda = \lambda_k$ и используем определение (1.3). Предполагается, что векторы $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ соответствуют величинам P_k , λ_k . Поделив уравнение (1.6) на $(\vec{\eta}^T L_{,\lambda} \vec{\xi})$ и отделяя действительную часть, получим

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\vec{\eta}^T L_{,P} \vec{\xi}}{\vec{\eta}^T L_{,\lambda} \vec{\xi}} \right) \delta P_k + \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{\eta}^T L_{,t_i} \vec{\xi}}{\vec{\eta}^T L_{,\lambda} \vec{\xi}} \right) \delta t_i = -\Im(\operatorname{Re} \lambda_k) = 0 \quad (1.7)$$

Последнее равенство справедливо вследствие определения критического тона (1.3). Из уравнения (1.7) получим

$$\frac{\partial P_k}{\partial t_i} = - \frac{\operatorname{Re} [(\vec{\eta}^T L_{,t_i} \vec{\xi}) / (\vec{\eta}^T L_{,\lambda} \vec{\xi})]}{\operatorname{Re} [(\vec{\eta}^T L_{,P} \vec{\xi}) / (\vec{\eta}^T L_{,\lambda} \vec{\xi})]} \quad (1.8)$$

Правая часть (1.8) вычисляется при $P = P_k$, $\lambda = \lambda_k$ и соответствующих $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$.

Первая производная от критической частоты по отношению к t_i вычисляется аналогично. Поделив (1.6) на $(\vec{\eta}^T L_{,P} \vec{\xi})$ и отделяя мнимую часть, придем к выражению

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t_i} = - \frac{\operatorname{Im} [(\vec{\eta}^T L_{,t_i} \vec{\xi}) / (\vec{\eta}^T L_{,P} \vec{\xi})]}{\operatorname{Re} [(\vec{\eta}^T L_{,\lambda} \vec{\xi}) / (\vec{\eta}^T L_{,P} \vec{\xi})]} \quad (1.9)$$

Таким образом, для вычисления первых производных от критической нагрузки P_k и частоты колебаний ω_k по параметрам проектирования t_i необходимо знать значения P_k , λ_k и соответствующие собственные векторы $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$. Имея выражения для производных (1.8), (1.9), можно вычислить конечные приращения

$$\Delta P_k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial P_k}{\partial t_i} \Delta t_i + o(\|\Delta \vec{t}\|)$$

$$\Delta \omega_k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \omega_k}{\partial t_i} \Delta t_i + o(\|\Delta \vec{t}\|)$$

Из уравнения (1.6) получим выражение для производной от собственного значения λ по параметру нагрузки P . Полагая в (1.6) $\delta t_i = 0$, имеем

$$\frac{\partial \lambda}{\partial P} = - \frac{(\vec{\eta}^T L_{,P} \vec{\xi})}{(\vec{\eta}^T L_{,\lambda} \vec{\xi})} \quad (1.10)$$

Таким образом, выражение для производной $\text{Re } \lambda_{,P}$ из (1.3) получим, отделяя в (1.10) действительную часть

$$\text{Re } \lambda_{,P} = - \text{Re} \left(\frac{\vec{\eta}^T L_{,P} \vec{\xi}}{\vec{\eta}^T L_{,\lambda} \vec{\xi}} \right) \quad (1.11)$$

Вычисление производной $\text{Re } \lambda_{,P}$ представляет самостоятельный интерес для анализа устойчивости системы, так как она характеризует скорость развития динамической неустойчивости.

Развиваемый в данной работе метод анализа чувствительности критических параметров устойчивости является наиболее эффективным при наличии большого числа определяющих параметров, так как для вычисления градиента от критического параметра устойчивости по параметрам проектирования требуется лишь однократное решение прямой и сопряженной задач о потере устойчивости. Между тем, численное дифференцирование критического параметра как функции N переменных требует для вычисления градиента не менее $N + 1$ -кратного решения задачи о потере устойчивости. Анализ чувствительности позволяет выделить наиболее существенные параметры, влияющие на область устойчивости, и тем самым подсказывает проектировщику рациональные способы воздействия на систему с целью улучшения ее характеристик устойчивости.

Верные, но более сложные выражения по сравнению с (1.8), (1.9) для производных от критической скорости и частоты флаттера были впервые получены В. Г. Буньковым [4].

Формулы для производных от критической скорости флаттера были получены также в работах [11—13]. Однако соотношения, приведенные в [11—12], не содержат производной от аэродинамической матрицы по критической скорости и поэтому являются ошибочными. Грубая ошибка при выводе производных от флаттерных характеристик допущена в [13].

Методика вычисления производных от критической скорости, частоты и форм флаттера, не использующая сопряженного собственного вектора, описана в [22]. Однако эта методика вряд ли может быть признана эффективной, поскольку вычисление градиента скорости флаттера по N параметрам требует решения N систем линейных уравнений порядка $2n + 2$.

2. *Задача оптимизации.* Рассмотрим задачу максимизации критического параметра потери устойчивости при ограничении, наложенном на вектор переменных проектирования \vec{t} $V(\vec{t}) = V_0$, где V — заданная скалярная функция векторного аргумента, V_0 — фиксированная константа. Математическая формулировка задачи оптимизации описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \max_{\vec{t}} P_k(\vec{t}) \\ V(\vec{t}) = V_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Необходимое условие экстремума имеет вид

$$\nabla P_k + \nu \nabla V = 0 \quad (2.2)$$

где символ ∇ обозначает вектор градиента по переменным проектирования $\nabla = (\partial/\partial t_1, \partial/\partial t_2, \dots, \partial/\partial t_N)$, ν — скалярный множитель Лагранжа. Напомним, что ∇P_k вычисляется согласно (1.8).

Для численного решения задачи оптимизации воспользуемся методом градиентов. Выражение для улучшающей вариации запишем в виде

$$\Delta \vec{t} = \alpha (\nabla P_k + \nu \nabla V) \quad (2.3)$$

где α — положительная константа (шаг по градиенту), выбираемая вычислителем, ν — скалярный множитель, выбираемый из условия

$$\Delta V = (\nabla V, \Delta \vec{t}) = \alpha [(\nabla V, \nabla P_k) + \nu (\nabla V, \nabla V)] = 0$$

отсюда $\nu = -(\nabla P_k, \nabla V)/(\nabla V, \nabla V)$. Тогда $\Delta P_k = (\nabla P_k, \Delta \vec{t}) = (\nabla P_k, \Delta \vec{t}) + \nu (\nabla V, \Delta \vec{t}) = \|\nabla P_k + \nu \nabla V\|^2 \geq 0$. Таким образом, на каждом шаге градиентной процедуры $\Delta P_k \geq 0$, $\Delta V = 0$ вплоть до выполнения необходимого условия экстремума (2.2).

Заметим, что величина критической нагрузки в процессе оптимизации может оказаться кратной. Это означает, что критической нагрузке P_k может соответствовать несколько критических тонов колебаний λ_{k_i} , $i = 1, 2, \dots, r$, формула (1.3). В таком случае удобно каждому критическому тону колебаний λ_{k_i} поставить в соответствие величину критического параметра P_{k_i} , $i = 1, 2, \dots, r$ и рассмотреть задачу оптимизации в максимальной постановке

$$\max_{\vec{t}} \min_{i=1, 2, \dots, r} P_{k_i} \quad (2.4)$$

$$V(\vec{t}) = V_0$$

Необходимое условие экстремума для этой задачи имеет вид [26]

$$\sum_{i=1}^r \mu_i \nabla P_{k_i} + \nu \nabla V = 0$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \mu_i = 1$$

Улучшающая вариация в этом случае выглядит следующим образом:

$$\Delta \vec{t} = \alpha \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \nabla P_{k_i} + \nu \nabla V \right) \quad (2.5)$$

причем для определения величин μ_i , ν имеем условия $\Delta P_{k_i} = \Delta P_{k_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, r$ ($r-1$ условие); $\Delta V = 0$ и $\sum_{i=1}^r \mu_i = 1$ (2 условия). Из этих условий получается система уравнений относительно величин ν и μ_i , $i = 1, 2, \dots, r$.

Итак, при решении задачи оптимизации на каждом шаге градиентной процедуры для вектора \vec{t} следует решить прямую и сопряженную задачи о потере устойчивости (1.1), (1.4), определить из (1.3) критические параметры P_{k_i} , критические тона колебаний λ_{k_i} , $i = 1, \dots, r$ и собственные векторы $\vec{\xi}_{k_i}$ и $\vec{\eta}_{k_i}$, соответствующие этим величинам, далее по формулам (1.8) вычислить векторы градиента ∇P_{k_i} и затем произвести улучшающую вариацию (2.3) или (2.5). Ограничения снизу и сверху на параметры t_i могут быть учтены с помощью обычных приемов математического программирования.

Задача максимизации критической скорости флаттера крыла летательного аппарата при заданной полной массе материала, а также обратная задача минимизации полной массы при фиксированной критической скорости потери аэроупругой устойчивости в дискретной постановке рассматривалась в ряде работ [11—22]. Однако, следует отметить, что необходимые условия экстремума, приведенные в работах [6, 13, 21], не согласуются со строгими соотношениями, полученными в настоящей работе. В частности, в работах [6, 15, 16, 20] при выводе необходимых условий экстремума не варьируется частота флаттера.

В работах [14, 18—21] предлагаются эвристические алгоритмы, которые даже в случае сходимости не обеспечивают выполнения необходимых условий экстремума.

По мнению авторов, наиболее эффективными методами решения задач оптимизации конструкций с учетом явлений динамической неустойчивости,

являются методы математического программирования, использующие явные выражения для градиентов критических параметров устойчивости типа (1.8).

3. *Примеры: расчет крыла малого удлинения.* При проектировании крыла летательного аппарата необходимо учитывать ряд требований, предъявляемых к конструкции, прежде всего, это требования статической прочности, аэроупругости и ресурса. Требование аэроупругой устойчивости является одним из существенных.

В этом параграфе в качестве первого расчетного примера рассмотрим задачу максимизации критического параметра потери аэроупругой устойчивости крыла малого удлинения при неизменной полной массе материала конструкции. Критическим параметром в данном случае является параметр потока, пропорциональный скоростному напору и равный 1 для исходного проекта конструкции.

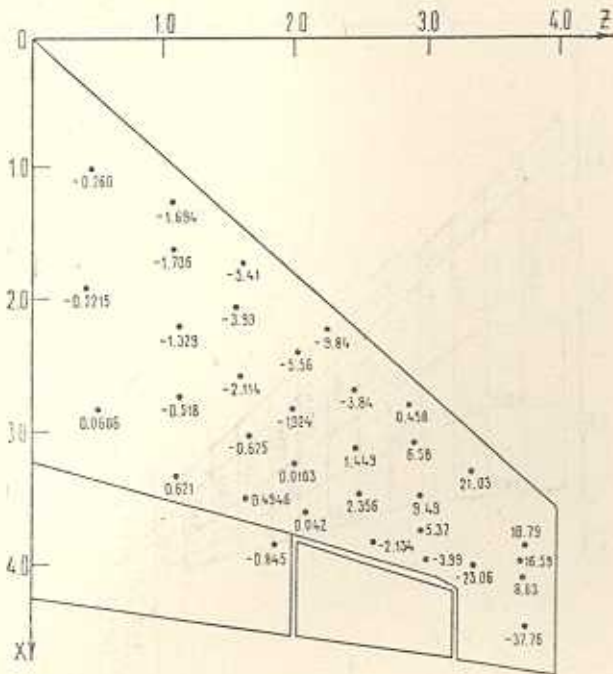
Расчетная модель крыла состоит из 27 изотропных и 3 ортотропных панелей постоянной толщины, 26 балок, работающих на изгиб, и 34 сосредоточенных масс. Крыло предполагается закрепленным в пяти точках на пружинах, моделирующих упругое крепление крыла к фюзеляжу. Распределение сосредоточенных масс, разбивка крыла на панели и расположение балок приведены на фиг. 1, 2 и 3 соответственно.

Расчет аэродинамических воздействий производился с помощью метода дискретных вихрей. Для расчета колебаний крыла в потоке газа использовался «метод многочленов», описанный в [27].

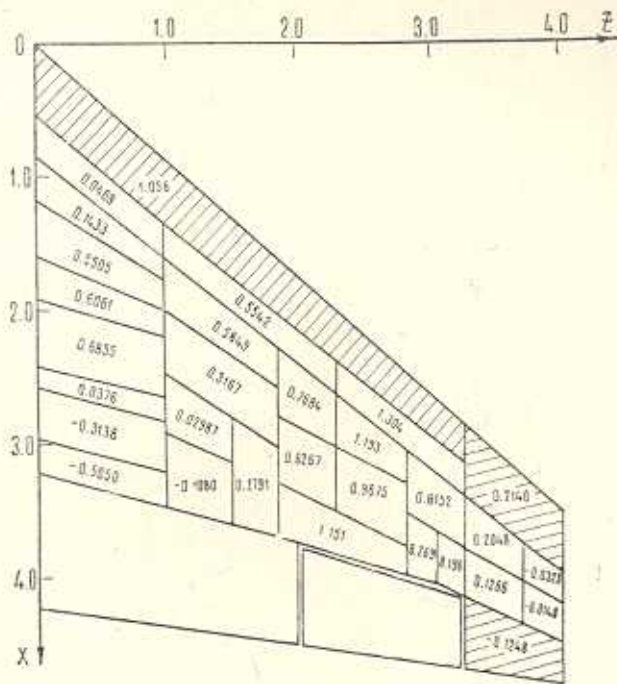
В качестве параметров проектирования рассматривались массы сосредоточенных грузов, массы изотропных и ортотропных панелей и балок. Связь между распределенными массами и жесткостями в панелях и балках считалась фиксированной. На все параметры проектирования налагались ограничения сверху и снизу.

На фиг. 1, 2 и 3 приведены значения производных критического параметра устойчивости $\partial P_k / \partial t_i$ по параметрам проектирования — сосредоточенным массам, массам панелей и балок соответственно. Приведенные значения производных $\partial P_k / \partial t_i$ были вычислены при исходном векторе параметров проектирования i . Заметим, что эти производные принимают как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, если значение производной $\partial P_k / \partial t_i$ отрицательно, то уменьшение соответствующей массы t_i приводит к увеличению критического параметра устойчивости. Из анализа численных результатов, представленных на фиг. 1—3, следует, что наибольшее влияние на критический параметр потока оказывают сосредоточенные массы, расположенные у передней кромки на конце крыла.

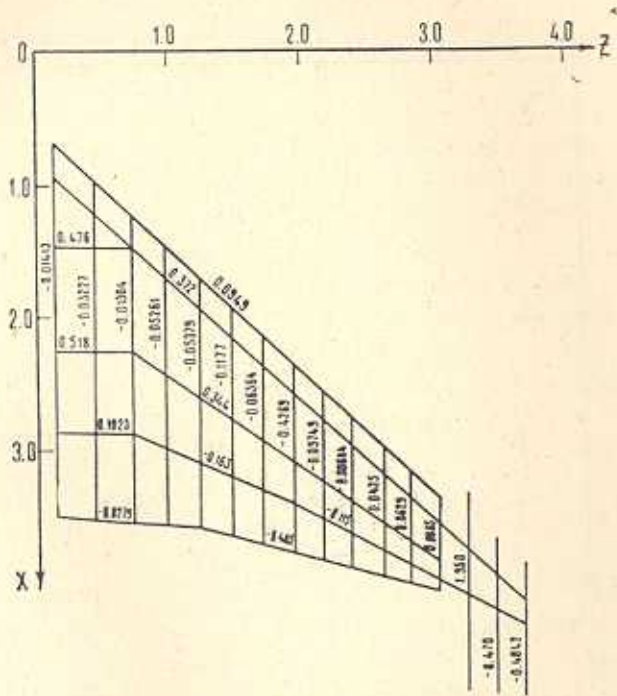
Результаты решения задачи максимизации критического параметра устойчивости приведены на фиг. 4, 5 и 6, где приведены относительные величины масс элементов конструкции t_i^{opt} / t_i^{acc} . В результате оптимизации критический параметр P_k увеличился на 35%. На фиг. 7 приведена проекция характеристических кривых λ на плоскость: параметр устойчиво-



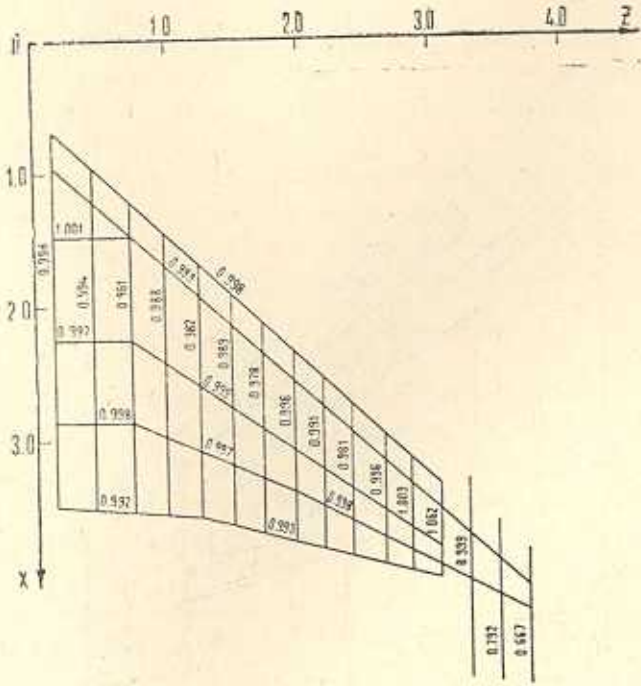
Фиг. 1.



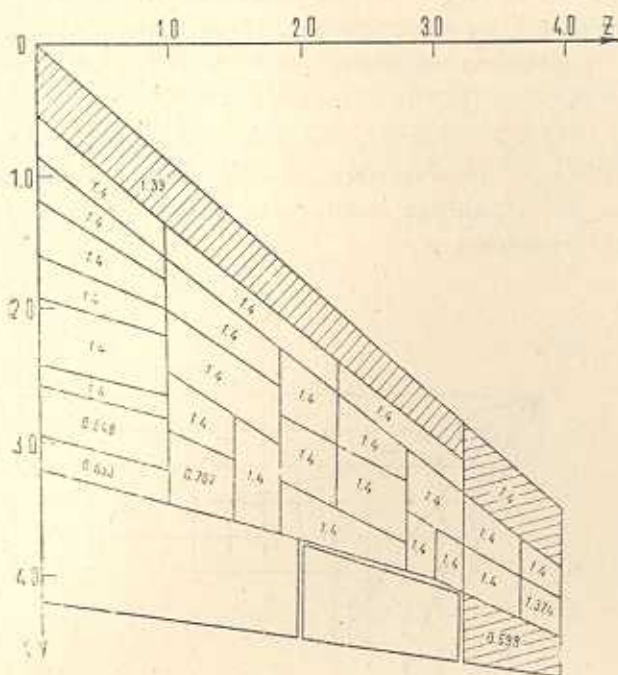
Фиг. 2.



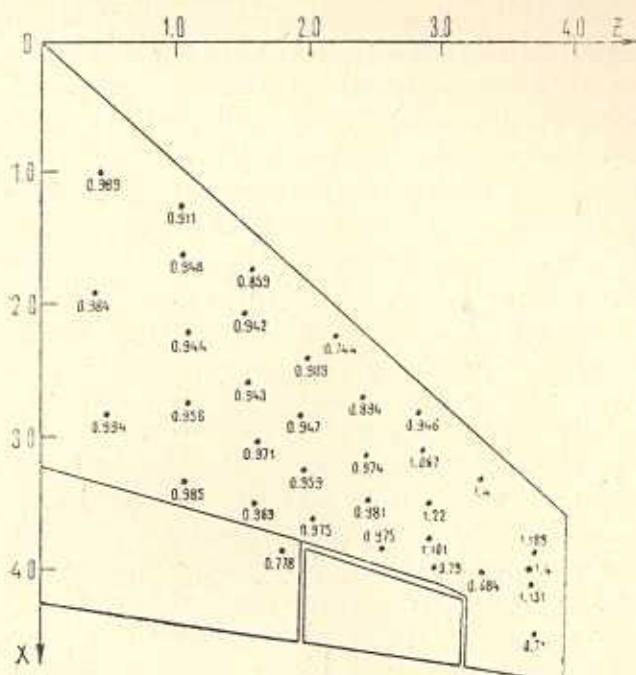
Фиг. 3.



Фиг. 4.

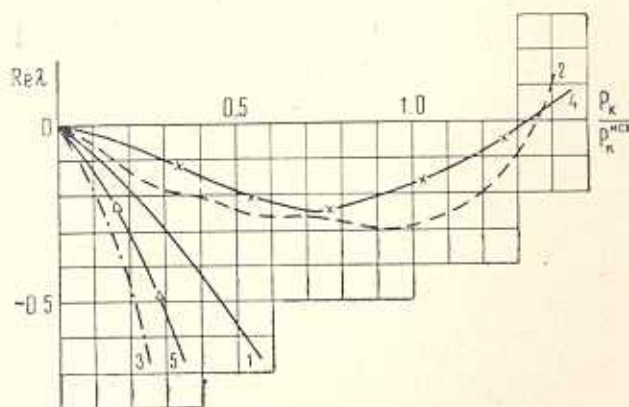


Фиг. 5.



Фиг. 6.

сти-декремент затухания, $P - \text{Re } \lambda$. Характерной особенностью оптимального проекта крыла является кратность критического параметра устойчивости, то есть наличие двух форм потери устойчивости при $P = P_k$. Отметим, что в процессе оптимизации критический параметр стал двукратным уже при $P_k = 1,05 P_k^*$, где P_k^* — значение параметра устойчивости исходного проекта крыла, полагавшееся равным единице. Дальнейшее увеличение критического параметра сопровождалось наличием двух критических тонов потери устойчивости.

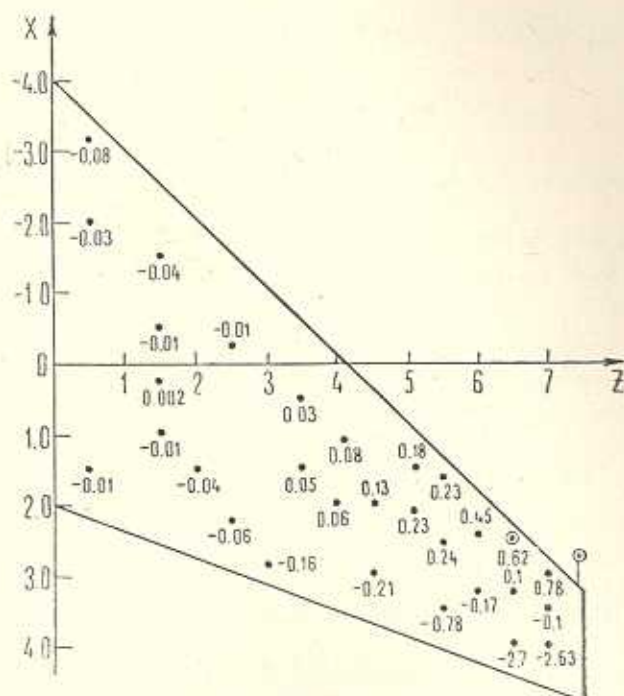


Фиг. 7.

Исследуем теперь возможности воздействия на критическую скорость флаттера, связанные с размещением и перераспределением неконструктивных сосредоточенных масс. Неконструктивная масса не оказывает существенного влияния на характеристики статической прочности, статической аэроупругости и ресурса. Кроме того, размещение сосредоточенных масс в крыле с целью воздействия на характеристики динамической устойчивости является наиболее простой в технологическом отношении задачей для реально существующего прототипа конструкции. С другой стороны, как показывает приведенный выше пример расчета, неконструктивные массы оказывают заметное влияние на критический параметр устойчивости по сравнению с влиянием распределенных масс панелей и балок, поэтому следует ожидать значительного эффекта от воздействий такого типа.

В качестве расчетного примера рассмотрим крыло малого удлинения, в котором требуется разместить заданную величину неконструктивной массы с целью увеличения критической скорости потери аэроупругой устойчивости. На начальном этапе вся неконструктивная масса была разбита на 40 равных частей, которые распределялись по кессону крыла. Расположение масс и значения производных $\partial P_k / \partial t_i$ приведены на фиг. 8. Из анализа этих результатов следует, что максимальное положительное значение $\partial P_k / \partial t_i$ достигается для массы, расположенной у передней кромки на свободном конце крыла. В ходе градиентной процедуры решения задачи оптимизации вся неконструктивная масса стала концентрироваться в этой точке. Это обстоятельство наводит на мысль об эффективности установки массового балансира, то есть выносного сосредоточенного груза.

Таким образом, задача оптимизации о размещении неконструктивной массы свелась к задаче расчета массового балансира. При расчете предполагалось, что 80% исходной неконструктивной массы будет сосредоточено в балансира, а 20% — сохранено в кессоне крыла для моделирования массы материала, потребного для крепления балансира. В результате параметрического расчета была найдена оптимальная длина балансира, при



Фиг. 8.

этом критическая скорость флаттера стала двукратной. Интересно отметить, что значения производных $\partial P_{k_1}/\partial t_{12}$, $\partial P_{k_2}/\partial t_{12}$, соответствующих разным критическим тонам колебаний, стали противоположными по знаку для обеих масс (балансира и его крепления). Отсюда следует, что дальнейшее увеличение критической скорости флаттера невозможно. Таким образом, благодаря рациональному распределению неконструктивной массы величиной 25 кг на исходном крыле (массой 900 кг) критическая скорость возросла на 68 м/с.

В обоих примерах, рассмотренных выше, величина градиента критического параметра устойчивости в ходе процесса оптимизации возрастала, что в итоге приводило к кратности критической нагрузки, то есть наличию нескольких форм потери устойчивости. Этот эффект, по-видимому, является характерным для задач оптимизации динамической устойчивости.

В заключение отметим, что задача проектирования является задачей комплексной с необходимостью учета многих факторов и ограничений, в том числе зачастую не формализуемых, поэтому описанная методика анализа чувствительности и оптимизации характеристик динамической устой-

чивости может служить лишь удобным инструментом для проектировщика, позволяя ему рациональным образом выбирать параметры конструктивно-силовой схемы конструкции.

Авторы благодарны **С. А. Костромину** за полезные обсуждения и помощь при проведении численных расчетов.

ՖԼԱՏԵՐԱՅԻՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԻԶԱՅԻԱՆ

Ա. Պ. ՍԵՐԱՆՅԱՆ, Ա. Վ. ՇԱՐԱՆՅՈՒԿ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում դիսկրետ համակարգի համար դիտարկված են կայունության կորուստի մասին գծային ոչ կոնսերվատիվ խնդիրներ:

Ուսումնասիրված են հարցեր կապված դինամիկ կայունության բնութագրիչների օպտիմիզացիայի և դզայունության վերլուծման հետ: Համալուծ խնդրի ներմուծման օգնությամբ ստացված են արտահայտություններ կայունության կրիտիկական պարամետրերի ածանցյալների համար: Որպես հաշվարկային օրինակներ դիտարկված են զազի հոսքում գանձող փոքր երկարությամբ թևի ֆլատերային բնութագրիչների օպտիմիզացիայի խնդիրներ: Բերված են և վերլուծված թվային արդյունքներ:

OPTIMIZATION OF FLUTTER CHARACTERISTICS

A. P. SEYRANIAN, A. V. SHARANYUK

S u m m a r y

In the paper nonconservative problems of elastic stability are considered for discrete systems. Sensitivity analysis and optimization problems for dynamic stability characteristics are investigated. With the use of an adjoint system the expressions for derivatives of critical parameters of stability with respect to arbitrary parameters of the system are obtained. As examples, optimization problems of flutter characteristics of a wing in gas flow are considered. Numerical results are presented and discussed in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
2. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976.
3. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
4. Бумьков В. Г. Расчет оптимальных флаттерных характеристик методом градиента.— Тр. ЦАГИ, вып. 1166, 1969.

5. *Ashley H., McIntosh S. C.* Applications of aeroelastic constraints in structural optimization. Proc. 12-th Internat. Congress of Theoret. and Appl. Mech., Stanford, Berlin, Springer-Verlag, 1969.
6. *Turner M. J.* Optimization of structures to satisfy flutter requirements.—AIAA J., 1969, v. 7, N. 5.
7. *Бирюк В. И.* О задаче оптимального проектирования конструкций крыла из условий прочности и аэроупругости. Уч. записки ЦАГИ, 1972, № 2.
8. *Pterson B. L.* Discrete variable approximation to minimum weight panels with fixed flutter speed.—AIAA J., 1972, v. 10, No. 9.
9. *Weisshaar T. A.* Aeroelastic optimization of a panel in high Mach number supersonic flow.—J. Aircraft, 1972, v. 9, N. 9.
10. *Santini P., Balis-Crema L., Peroni I.* Structural optimization in aeroelastic conditions.—L'Aerotecnica missili e spazio, 1976, v. 55, N. 1/2.
11. *Rudisill C. S., Bhatta K. G.* Optimization of complex structures to satisfy flutter requirements.—AIAA J., 1971, v. 9, N. 8.
12. *Rudisill C. S., Bhatta K. G.* Second derivatives of flutter velocity and the optimization of aircraft structures.—AIAA J., 1972, v. 10, N. 12.
13. *Rao S. S.* Rates of change of flutter Mach number and flutter frequency.—AIAA J., 1972, v. 10, N. 11.
14. *Stegel S.* Flutter optimization program for aircraft structural design.—AIAA Paper, 72-795, 1972.
15. *Gwin L. B., Taylor R. F.* General method for flutter optimization —AIAA J., 1973, v. 11, N. 12.
16. *Simodynes E. E.* Gradient optimization of structural weight for specified flutter speed. J. Aircraft, 1974, v. 11, N. 3.
17. *Pines S., Newman M.* Constrained structural optimization for aeroelastic requirements. —J. Aircraft, 1974, v. 11, N. 6.
18. *Haftka R. T., Starnes J. H., Barton F. W.* Comparison of two types of structural optimization procedures for satisfying flutter requirements. AIAA Paper, 74-405, 1974.
19. *Haftka R. T., Starnes J. H. Jr., Barton F. W., Dixon S. C.* Comparison of two types of structural optimization procedures for flutter requirements. —AIAA J., 1975, v. 13, N. 10.
20. *Segenreich S. A., McIntosh S. C.* Weight minimization of structures for fixed flutter speed via an optimality criterion. AIAA Paper, 75-779, 1975.
21. *McIntosh S. C., Ashley H.* On the optimization of discrete structures with aeroelastic constraints. Computers and structures, 1978, v. 8, N. 3/4.
22. *Cardant C., Mantegazza P.* Calculation of eigenvalue and eigenvector derivatives for algebraic flutter and divergence eigenproblems.—AIAA J., 1979, v. 17, N.4.
- 23*. *Seyranian A. P.* Sensitivity analysis and optimization of aeroelastic stability. —Inter. J. Solids Structures, 1982, v. 18, N. 9.
24. *Pedersen P., Seyranian A. P.* Sensitivity analysis for dynamic stability problems. —Inter. J. Solids Structures, 1983, v. 19, N. 4.
25. *Ashley H.* On making things the best-aeronautical uses of optimization. —J. Aircraft, 1982, v. 19, N. 1.
26. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
27. *Буньков В. Г.* Расчет на флаттер крыла малого удлинения. Тр. ЦАГИ, вып. 905, 1964.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
26. I. 1983

* См. также работу Сейраняна А. П. «Анализ чувствительности и оптимизация характеристик аэроупругой устойчивости». Препринт ИПМех АН СССР, № 162, 1980.