ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ СС[Р]

Մեխանիկա XXXVII, № 5, 1984 Механик[а]

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С РЕГУЛЯРНЫМ КОЛЬЦОМ КРУГОВЫХ ПОЛОСТЕЙ

БУРЫШКИН М. Л., ШУПТА В. П.

Плоская задача теории упругости для бесконечной изотропной среды, ослабленной регулярным кольцом круговых полостей, в связи с ее важными техническими приложениями рассматривалась в ряде публикаций [1—4]. Характерной особенностью этой задачи является то, что при большом числе близко расположенных полостей ее непосредственное решение численными методами и, в частности, методом Шермана-Космодамианского сопровождается существенными вычислительными затруднениями. В силу сказанного исследования, проведенные в работах [1, 3, 4], относятся только к относительно простому — циклическому загружению.

Некоторые нециклические виды напряженно-деформированного состояния изучались в работе [2], где был предложен метод построения приближенных аналитических решений, основанный на использовании малого параметра [5] и аппарата теории представлений групп. Это обеспечило эффективность построения решений для любого числа отверстий, достаточно далеко расположенных друг от друга.

В данной работе для исследования нециклического состояния рассматриваемой среды предлагается комбинированный метод. В нем заложены, с одной стороны, идеи метода Шермана-Космодамианского, эффективного при любом расположении отверстий, а с другой — учет симметрических свойств среды на основе теории представлений групп, что позволяет изучать воздействия нециклических нагрузок при любом числе отверстий.

1. *Обобщенные циклические задачи.* Элементами симметрии бесконечной изотропной среды, ослабленной регулярным кольцом круговых отверстий (фиг. 1) являются повороты C_r $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$ вокруг точки O на углы $r\alpha$ и отражения σ_r $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$ в плоскостях Π_r. Здесь и в дальнейшем под n понимается число отверстий в кольце, $\alpha = 2\pi/n$. Элементы симметрии образуют группу C_{nv}.

Аппарат прикладной теории представлений групп достаточно полно изложен в монографии [6]. В связи с этим ограничимся только введением некоторых характерных обозначений: g — произвольный элемент группы C_{nv}, τ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, l)$ — двумерные представления этой группы, представляющие собой наборы матриц $\tau_\nu(g)$ вида

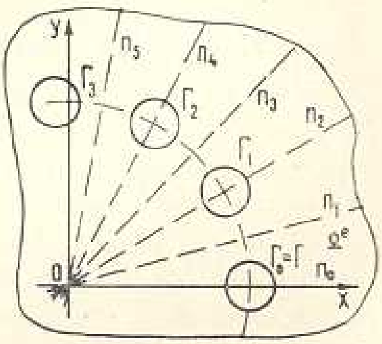
$$\tau_\nu(C_r) = \begin{Vmatrix} \cos r(\nu-1)\alpha & \sin r(\nu-1)\alpha \\ -\sin r(\nu-1)\alpha & \cos r(\nu-1)\alpha \end{Vmatrix}$$

$$\tau_\nu(\theta_r) = \begin{Vmatrix} \cos r(\nu-1)\alpha & -\sin r(\nu-1)\alpha \\ -\sin r(\nu-1)\alpha & -\cos r(\nu-1)\alpha \end{Vmatrix} \tag{1.1}$$

$l = n/2+1$ (для четного n), $l=(n+1)/2$ (для нечетного n), $\tau_{\nu\mu\rho}(g)$ — $\mu\rho$-ый элемент матрицы $\tau_\nu(g)$, m_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, l$) — числа, равные единице при $\nu=1$, а также $\nu=l$ (для четного n), и двум во всех остальных случаях.

Считая плоскость xOy комплексной, обозначим ее пересечение с областью, занятой средой, через Ω. Под символом z в зависимости от физического смысла используемых обозначений будем понимать некоторую точку из Ω или ее аффикс.

Область Ω разбивается плоскостями Π_r ($r=0, 1, \ldots, n-1$) на элементарные ячейки (фиг. 1). Ячейку, ограниченную плоскостями Π_0 и Π_1, обозначим Ω^e ($e=C_0$) и назовем основной. Ячейку, полученную из основной при помощи движения $g \in G_{nv}$, будем обозначать Ω^g.



Фиг. 1.

Рассмотрим набор функций $Q_{\nu\rho}$ ($\rho = 1,2$), заданных на области Ω и удовлетворяющих условиям

$$Q_{\nu\mu}(gz) = \sum_{\rho=1}^{2} \tau_{\nu\mu\rho}(g)\, Q_{\nu\rho}(z) \quad \forall g \in C_{nv},\ \forall z \in \Omega\ (\mu = 1,2) \tag{1.2}$$

где под gz понимается образ точки z, полученный в результате движения g. Будем говорить, что этот набор преобразуется по представлению τ_ν. Особо подчеркнем, что применение такой терминологии к функциям, описывающим компоненты нагрузки или напряженно-деформированного состояния среды, предполагает введение инвариантной системы отсчета. Последнее означает, что указанные компоненты для точек основной ячейки Ω^e отвечают осям x и y, а для точек ячейки Ω^g — осям gx и gy.

Остановимся на некоторых важных особенностях функций $Q_{\nu\rho}$ ($\rho = 1, 2$).

Во-первых, согласно соотношению (1.2) задание этих функций на Ω^e однозначно определяет любую из них во всей области Ω. Именно свойства подобного рода обычно относят к симметрическим.

Во-вторых, циклическая и антициклическая функции, то есть функции с известными циклическими свойствами, являются соответственно функциями Q_{11} и Q_{12} из набора, преобразующегося по представлению τ_1.

Указанные особенности дают возможность расценивать выражение (1.2) как описание специфических симметрических свойств, отвечающих представлению τ_ν группы $C_{n\nu}$. В дальнейшем будем говорить, что функция $Q_{\nu\mu}$ обладает обобщенными циклическими свойствами. Линейную задачу теории упругости для циклически-симметричной среды при нагрузке $Q_{\nu\mu}$ естественно назвать обобщенной циклической. Ее решение всегда сопровождается существенными упрощениями [7].

Выясним характер упрощений в плоской обобщенной циклической задаче для изотропной среды. Без учета свойств типа (1.2) она бы сводилась к решению системы функциональных уравнений вида [3, 4]:

$$\varphi_{\nu\mu}(t_r) + t_r\overline{\varphi'_{\nu\mu}(t_r)} + \overline{\psi_{\nu\mu}(t_r)} = f_{\nu\mu}(t_r) \quad (r = 0, 1, \dots, n-1) \tag{1.3}$$

где $\varphi_{\nu\mu}(z)$ и $\psi_{\nu\mu}(z)$ — комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили (функции Гурса), аналитические в области Ω и отвечающие нагрузке $Q_{\nu\mu}$, t_r — точка контура $\Gamma_r = C_r\Gamma$, Γ или Γ_0 — контур основного отверстия (с центром на оси x), а $f_{\nu\mu}(t_r)$ — функция, заданная на Γ_r и зависящая от нагрузки $Q_{\nu\mu}$. Легко видеть, что с увеличением количества отверстий растет число уравнений в системе (1.3) и усложняется структура комплексных потенциалов $\varphi_{\nu\mu}(z)$ и $\psi_{\nu\mu}(z)$.

В то же время согласно работам [2,8] функции $\varphi_{\nu\rho}(z)$ и $\psi_{\nu\rho}(z)$, отвечающие любой нагрузке из набора $Q_{\nu\rho}$ ($\rho = 1,2$), преобразующегося по представлению τ_ν группы $C_{n\nu}$, могут быть записаны в форме

$$\begin{matrix}\varphi_{\nu\rho}(z) \\ \psi_{\nu\rho}(z)\end{matrix} = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{\eta=1}^{2}\tau_{\nu\rho\eta}(C_r)\begin{matrix}\exp(ir\alpha)\,\Phi^{(\eta)}(\exp(-ir\alpha)z) \\ \exp(-ir\alpha)\,\Psi^{(\eta)}(\exp(-ir\alpha)z)\end{matrix} \quad \forall z \in \Omega \tag{1.4}$$

где $\Phi^{(\eta)}(z)$ и $\Psi^{(\eta)}(z)$ ($\eta = 1,2$) — функции, аналитические на внешности контура Γ. Искомыми являются только голоморфные составляющие функций $\Phi^{(\eta)}(z)$ и $\Psi^{(\eta)}(z)$. Что же касается их многозначных составляющих, то они определяются по нагрузке $Q_{\nu\eta}(t)$ основного контура при помощи известных формул [3] для многозначных составляющих комплексных потенциалов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Последнее замечание непосредственно вытекает из равенств (1.4), поскольку функции $\Phi^{(\eta)}(\exp(ir\alpha)z)$ и $\Psi^{(\eta)}(\exp(ir\alpha)z)$ при $r = 1, 2, \dots, n-1$ аналитичны внутри основного контура.

Таким образом, обобщенная циклическая задача сводится к определению только четырех функций $\Phi^{(\eta)}(z)$ и $\Psi^{(\eta)}(z)$, структура которых весьма проста. Для этого можно воспользоваться системой двух функциональных уравнений:

$$\varphi_{\nu\rho}(t) + t\overline{\varphi'_{\nu\rho}(t)} + \overline{\psi_{\nu\rho}(t)} = f_{\nu\rho}(t) \quad (\rho = 1,2) \tag{1.5}$$

где t — точка контура Γ. Поскольку уравнения (1.5) представляют собой стандартные граничные условия на основном контуре, то их правые части $f_{\nu\rho}(t)$ вычисляются по нагрузке $Q_{\nu\rho}(t)$ этого контура из обычных соотношений [3]. При этом, разумеется, предполагается, что набор нагрузок $Q_{\nu\rho}$ $(\rho = 1,2)$, для которых составлены граничные условия (1.5), содержит в себе рассматриваемую нагрузку $Q_{\nu\mu}$.

Если из системы (1.5) найти функции $\Phi^{(\eta)}(z)$ и $\Psi^{(\eta)}(z)$ $(\eta = 1, 2)$, то комплексные потенциалы (1.4) при $\rho = \mu$ удовлетворяют граничному условию (1.3), отвечающему значению $r = 0$. Докажем теперь, что указанные потенциалы удовлетворяют условиям (1.3) при любом r. Для этого заметим, что в координатной системе xOy

$$C_r z = \exp(ir\alpha)\, z, \quad t_r = \exp(ir\alpha)\, t$$
$$f_{\nu\mu}(t_r) = \exp(ir\alpha) \sum_{\rho=1}^{2} \tau_{\nu\mu\rho}(C_r) f_{\nu\rho}(t) \tag{1.6}$$

а комплексные потенциалы (1.4) обладают следующими свойствами [8]:

$$\begin{matrix} \varphi_{\nu\mu}(\exp(ir\alpha)\, z) \\ \psi_{\nu\mu}(\exp(ir\alpha)\, z) \end{matrix} = \begin{matrix} \exp(ir\alpha) \\ \exp(-ir\alpha) \end{matrix} \sum_{\rho=1}^{2} \tau_{\nu\rho\mu}(C_r) \begin{matrix} \varphi_{\nu\rho}(z) \\ \psi_{\nu\rho}(z) \end{matrix} \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{1.7}$$

Подставляя равенства (1.6), (1.7) в уравнение (1.3), после элементарных преобразований придем к выражению

$$\sum_{\rho=1}^{2} \tau_{\nu\mu\rho}(C_r)[\varphi_{\nu\rho}(t) + t\overline{\varphi'_{\nu\rho}(t)} + \overline{\psi_{\nu\rho}(t)}] = \sum_{\rho=1}^{2} \tau_{\nu\mu\rho}(C_r) f_{\nu\rho}(t)$$

которое на основании (1.5) представляет собой тождество.

Итак, комплексные потенциалы (1.4), удовлетворяющие условиям (1.5), являются решением обобщенной циклической задачи (1.3).

С абстрактной точки зрения уравнения (1.5) описывают сужение оператора (1.3) на пространство комплексных потенциалов (1.4), отвечающих обобщенным циклическим задачам, то есть рассматриваемый подход является частной реализацией общей схемы учета симметрии в задачах механики деформируемого твердого тела [7]. Характер упрощений, получаемых для обобщенной циклической задачи очевиден: при любом количестве отверстий в кольце число уравнений в системе (1.5) равно лишь двум.

2. *Распад плоской задачи для изотропной среды с циклической симметрией на обобщенные циклические задачи.* Произвольная функция, в том числе и нагрузка Q, заданная на области Ω с группой C_{nv} симметрии, может быть разложена на составляющие с обобщенными симметрическими свойствами [2, 6]. В принятой терминологии это означает, что рассматриваемая задача при любой нагрузке распадается на обобщенные циклические задачи.

Без ограничения общности далее изучается только симметричная (Q_1) или кососимметричная (Q_2) относительно оси x контурная нагрузка. Из результатов работы [2] вытекает, что разложение нагрузки имеет весьма простой вид

$$Q_\mu = \sum_{\nu=1}^{l} Q_{\nu\mu} \quad (\mu = 1, 2) \tag{2.1}$$

причем

$$Q_{\nu\rho}(t_j)=\frac{m_\nu}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\tau_{\nu\mu\rho}(C_r)\exp(-ir\alpha)\,Q_\mu(\exp(ir\alpha)\,t_j) \tag{2.2}$$

$$(\nu=1,\,2,\,\ldots,\,l;\ \rho=1,\,2;\ j=0,\,1,\,\ldots,\,n-1)$$

В формуле (2.2) под t_j понимается аффикс точки j-го контура, а контурная нагрузка задается комплексной функцией. Этот прием был использован в [2] для получения более общих соотношений.

Заметим, что для составления уравнений (1.5) нам нужны значения нагрузок $Q_{\nu\rho}$ $(\rho=1,\,2)$ только на основном контуре. Поэтому с практической точки зрения из всех выражений (2.2) следует сохранить лишь одно, отвечающее значению $j=0$, то есть

$$Q_{\nu\rho}(t)=\frac{m_\nu}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\tau_{\nu\mu\rho}(C_r)\exp(-ir\alpha)\,Q_\mu(\exp(ir\alpha)\,t) \tag{2.3}$$

$$(\nu=1,\,2,\ldots,\,l;\ \rho=1,\,2)$$

Если из всех полостей загружена только основная: $Q_\mu(\exp(ir\alpha)\,t)=$ $=\delta_{r0}Q_\mu(t)$ $(r=0,\,1,\,\ldots,\,n-1)$, то из формулы (2.3) вытекает, что

$$Q_{\nu\rho}(t)=\frac{m_\nu}{n}\,\delta_{\mu\rho}Q_\mu(t)\qquad(\nu=1,\,2,\ldots,\,l;\ \rho=1,\,2) \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем δ_{r0} и $\delta_{\mu\rho}$ — символы Кронекера.

Таким образом, исследование плоской задачи для изотропной среды с циклической симметрией может быть проведено по общей схеме учета симметрии [7]: а) разложение на обобщенные циклические задачи; б) решение последних; в) суперпозиция полученных результатов. Эффективность этой схемы связана с отмеченными ранее упрощениями, которые сопутствуют этапу б).

3. *Решение обобщенных циклических задач для изотропной среды с круговыми отверстиями методом Шермана-Космодамианского* [3]. Все сказанное выше относилось к отверстиям достаточно общего вида. Ограничимся теперь изучением только круговых отверстий единичного радиуса. Кроме того, будем считать, что функции $\varphi_{\nu\mu}(z)$ и $\psi_{\nu\mu}(z)$ голоморфны на внешности основного контура, так как многозначные составляющие комплексных потенциалов известны заранее. Тогда искомые функции $\Phi^{(\eta)}(z)$ и $\Psi^{(\eta)}(z)$ можно искать в виде

$$\Phi^{(\eta)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a^*_{\eta k}(z-R)^{-k};\quad \Psi^{(\eta)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b^*_{\eta k}(z-R)^{-k}\quad(\eta=1,\,2) \tag{3.1}$$

где $a^*_{\eta k}(z)$ и $b^*_{\eta k}$ $(\eta=1,\,2;\ k=1,\,2,\,\ldots)$ — неизвестные коэффициенты.

Подставим выражения (3.1) в (1.4) и разложим комплексные потенциалы $\varphi_{\nu\rho}(z)$ и $\psi_{\nu\rho}(z)$ $(\rho=1,\,2,\ldots)$ вблизи основного контура в ряды Лорана:

$$\varphi_{\nu\rho}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\rho k}^{*}(z-R)^{-k} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{\eta=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_{\eta k}^{*} C_{k+s-1}^{s} \varepsilon^{k+s}(-1)^{k} \lambda_{s-1,\,k+s}^{(\eta\rho)}(z-R)^{s}$$

$$\psi_{\nu\rho}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{\rho k}^{*}(z-R)^{-k} + \qquad (3.2)$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{\eta=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_{\eta k}^{*} C_{k+s-1}^{s} \varepsilon^{k+s}(-1)^{k} \lambda_{s+1,\,k+s}^{(\eta\rho)}(z-R)^{s}$$

При этом

$$\lambda_{ks}^{(\rho\rho)} = \sum_{m=s}^{n-1} \cos\left[m(\nu-1)\alpha\right] \exp(ikm\alpha)\left(1-\exp(im\alpha)\right)^{-s}$$

$$\lambda_{ks}^{(\eta\rho)} = (-1)^{\rho} \sum_{m=1}^{n-1} \sin\left[m(\nu-1)\alpha\right] \exp(ikm\alpha)\left(1-\exp(im\alpha)\right)^{-s} \quad (\eta \neq \rho)$$

$\varepsilon = 1/R$, C_k^s — число сочетаний из k элементов по s; R — радиус окружности центров.

Разложим обе части граничных условий (1.5) в ряд Фурье, учитывая соотношения (3.2), и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\sigma = e^{i\theta}$ (θ — полярный угол точки основного контура). В результате получим квазирегулярную бесконечную систему уравнений

$$\sum_{\eta=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_{s\rho k\eta}^{(j)} a_{\eta k} + B_{s\rho k\eta}^{(j)} B_{\eta k}\right] = f_{\nu s\rho}^{(j)} \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots;\ j,\ \rho = 1,\ 2) \qquad (3.3)$$

Здесь $a_{1k} = a_{1k}^{*}$, $b_{1k} = b_{1k}^{*}$, $a_{2k} = -ia_{2k}^{*}$, $b_{2k} = -ib_{2k}^{*}$ — искомые действительные коэффициенты, $f_{\nu s\rho}^{(j)}$ — коэффициенты при σ^{-s} ($j = 1$) и σ^{s} ($j = 2$) в разложении правой части уравнений (1.5) в ряд Фурье,

$$A_{s\rho k\eta}^{(1)} = \delta_{ks}\delta_{\eta\rho} + (-1)^{k+\rho+1} \varepsilon^{k+s+1}\left[R(s+1)\, C_{k+s}^{s+1} T_{s,\,k+s+1}^{(\eta\rho)} +\right.$$

$$\left. + (s+2)\, C_{k+s+2}^{s+2} \varepsilon T_{s+1,\,k+s+2}^{(\eta\rho)}\right]$$

$$A_{s\rho k\eta}^{(2)} = (1+\delta_{s1})(-1)^{k} C_{k+s+1}^{s} \varepsilon^{k+s} T_{s-1,\,k+s}^{(\eta\rho)} +$$

$$+ \delta_{\rho\eta}(-1)^{\rho}\left[R(s-1)\,\delta_{k,\,s-1} + (1-\delta_{1s})(s-2)\,\delta_{k,\,s-2}\right]$$

$$B_{s\rho k\eta}^{(1)} = (-1)^{k+s+1} C_{k+s+1}^{s} \varepsilon^{k+s} T_{s+1,\,k+s}^{(\eta\rho)}, \quad B_{s\rho k\eta}^{(2)} = \delta_{\eta\rho}\delta_{ks}(-1)^{\rho+1}$$

$$T_{s,\,k}^{(\rho\rho)} = \lambda_{s,\,k}^{(\rho\rho)}; \quad T_{s,\,k}^{(\rho\eta)} = -i\lambda_{s,\,k}^{(\rho\eta)} \quad (\rho \neq \eta)$$

Система (3.3) решается методом редукции. После определения коэффициентов $a_{\rho k}$ и $b_{\rho k}$ ($\rho = 1,\ 2;\ k = 1,\ 2,\ \ldots$) значения комплексных потенциалов $\varphi_{\nu k}(z)$ и $\psi_{\nu k}(z)$ вычисляются с помощью (3.1) и (1.4).

4. *Напряженное состояние, вызванное равномерным давлением интенсивности p на основном контуре.* Несмотря на частный характер, эта задача имеет большое значение для многочисленных приложений. В самом деле, из нее с помощью поворотов и суперпозиций может быть получен целый ряд практически важных задач.

Согласно (2.4) $Q_{\nu 1}(t) = pm_\nu(t - R)/n$, $Q_{\nu 2} \equiv 0$, то есть рассматриваемая задача распадается на l обобщенных симметричных задач, причем $f^{(j)}_{\nu s p} = 0$ $(s = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2)$ за исключением $f^{(2)}_{\nu 11} = pm_\nu/n$.

Допустимый уровень редукции контролировался соответствием между заданным давлением p и получаемыми в результате расчета напряжениями σ_r в контурных точках. Во всех приводимых далее результатах невязка не превышала 3% от величины p. При этом в системе (3.3) удерживалось до 80 уравнений.

В ходе вычислений в широком диапазоне варьировалось количество отверстий и величина $d = 2R \sin(\alpha/2) - 2$ (расстояние между смежными контурами).

Таблица 1

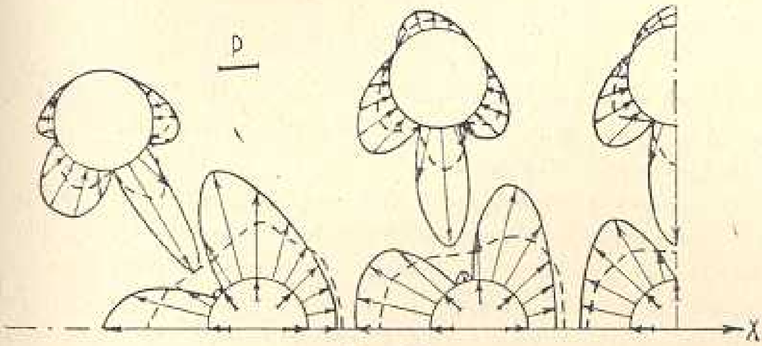
n	d	$\theta=0$	$3\pi/12$	$5\pi/12$	$7\pi/12$	$9\pi/12$	π
5	0,4	−0,871	−1,04	−1,67	−3,00	−0,08	−2.63
	0,7	−0,98	−1,16	−1,56	−1,56	−0.742	−1,086
	1,0	−1,00	−1,12	−1,32	−1,19	−0,92	−1,48
10	0,4	−0,848	−1.234	−2,352	−0,88	−0,71	−2,23
	0,7	−1,01	−1,34	−1,78	−0,61	−1,28	−1,73
	1.0	−1,05	−1.23	−1.33	−0,80	−1,15	−1,42
20	0,4	−0,81	−1,36	−2,67	−0,51	−1,81	−2,07
	0,7	−1,08	−1,45	−1,51	−0,41	−1,46	−1,54
	1,0	−1,10	−1,29	−1,20	−0,77	−1,27	−1,34
∞	0,4	−1,36	−2,08	−1,23	−1,23	−2,08	−1,37
	1,0	−1,20	−1,30	−0,97	−0,97	−1,30	−1,20

Таблица 2

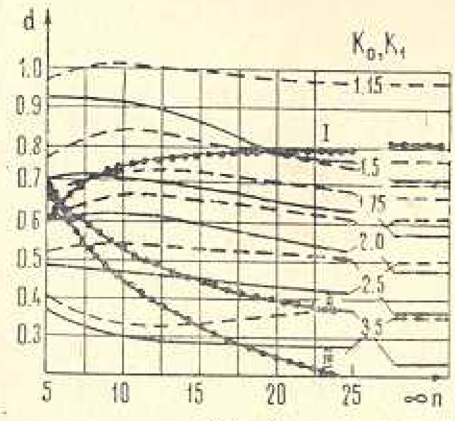
n	d	$\theta=\pi$	$15\pi/12$	$17\pi/12$	$19\pi/12$	$21\pi/12$	2π
5	0,4	1,414	−3,48	0.09	0,75	0,38	0,03
	0,7	0,79	−1,68	−0,49	0,73	0.49	0,10
	1,0	0,54	−1,03	−0,49	0,50	0,42	0.11
10	0,4	0,96	−0,45	−2,11	0,76	0,71	0,27
	0,7	0,67	−0,21	−1,79	0,42	0,76	0,35
	1,0	0,49	0,20	−1,16	0,12	0,59	0,32
20	0,4	0,83	0.72	−3,11	0,67	0,82	0,38
	0,7	0,54	0,41	−1,69	−0,10	0.81	0,48
	1,0	0,43	0,18	−1,08	−0,25	0,60	0,42
∞	0,4	0,5	1,43	−1,57	−1,57	1,43	0,5
	1,0	0,33	0,48	−0,78	−0,78	0,48	0,33

В табл. 1 и 2 приведены значения σ_θ в зависимости от n, d и полярного угла θ соответственно на контурах Γ и Γ_1. Для сравнения в строках $n = \infty$ помещены данные для среды периодической структуры, полученные по методике из работы [9]. Очевидно, что задача о напряженном состоянии такой среды является предельным случаем для рассматриваемых циклических задач, так как при фиксированном параметре d и $n \to \infty$ радиус R кольца отверстий неограниченно возрастает. Анализ численных результатов показывает, что при $d \geqslant 1$ распределение напряжений в средах циклической и периодической структуры практически совпадают уже при $n = 30$. Для меньших значений величины d это совпадение достигается при значительно большем числе n.

Характерные эпюры σ_θ на контурах Γ и Γ_1 для $n = 5$ (слева), $n = 20$ (в центре) и $n = \infty$ (справа) приведены на фиг. 2. Сплошные линии графиков отвечают значению $d = 0{,}4$, штриховые — $d = 1{,}0$. При любом числе n и $d > 0{,}4$ минимальные напряжения на основном контуре и максимальные на смежном достигаются вблизи прямой, проходящей через центры отверстий. При значениях $d < 0{,}4$ в указанной зоне основного контура, как правило, возникают зоны сжимающих напряжений σ_θ, быстро растущих с уменьшением расстояния d.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 3 приведены номограммы коэффициента концентрации напряжений $k = \sigma_{\theta_{\max}}/p$. Сплошные и штриховые линии являются линиями уровня коэффициента k соответственно для основного $(k = k_0)$ и смежного $(k = k_1)$ с ним контура. Справа от основного поля номограммы указаны асимптоты этих линий ($n \to \infty$). Нетрудно видеть, что при малых значениях d наибольшие по величине напряжения возникают на незагруженном контуре Γ_1.

Для удобства анализа напряженного состояния на поле номограммы нанесены три сепаратриссы. Их точки отвечают геометрическим параметрам задач, для которых: I) $k_0 = k_1$, II) $k_1 = k_u$, III) $k_0 = k_u$, где k_u — коэффициент концентрации напряжений в соответствующей циклической задаче (все контуры загружены давлением с интенсивностью p).

ՌԵԳՈՒԼՅԱՐ ՕՂԱԿՈՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԽՈՌՈՉՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԻԶՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Մ. Լ. ԲՈՒՐԻՇԿԻՆ, Վ. Պ. ՇՈՒՊՏԱ

Ամփոփում

Շարադրված է ռեգուլյար օղակով շրջանային անցքերով թուլացված իզոտրոպ միջավայրի համար առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծման արդյունավետ մեթոդ։

Խնդիրը բերված է ռեդուկցիայի մեթոդով լուծվող (3.1) անվերջ կվազի ռեգուլյար համակարգի։ Կատարված է խոռոչներից մեկի վրա տրված ճնշումից առաջացած լարվածային վիճակի հետազոտություն։ Ստացված են բեռնավորված և նրան հարակից խոռոչների վրա σ_θ լարման բաշխման բնութագրիչ էպյուրներ։ Կառուցված է նոմոգրամմա, որը հնարավորություն է տալիս որոշելու σ_θ լարման մաքսիմում արժեքը, կախված խոռոչների թվից և նրանց միջև եղած հեռավորություններից։

METHOD OF SOLUTION OF PLANAR PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY IN ISOTROPIC MEDIUM WITH REGULAR RING OF CIRCULAR HOLE

M. L. BURISHKIN, V. P. SHUPTA

Summary

An account of an effective method for the solution of planar problems of the theory of elasticity in an isotropic medium weakened with a regular ring of circular hole is given. Studies of stress condition aroused due to pressure was carried out in one of the cavities. A character diagram of distribution of stresses σ_θ on loaded cavity and adjacent to it has been revealed. A nomogram has been drawn out which can help to determine the maximum stress value σ_θ depending on the number of cavities and distances between them.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буйвол В. М.* Бігармонічна задача для багатозв'язних систем з циклічною симетрією. Прикладна механіка, 1962, т. 8, № 3.
2. *Бурышкин М. Л.* Обобщенная циклическая задача теории упругости. Сб. «Механика деформируемых сред», вып. 6. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1979, с. 174—183.
3. *Космодамианский А. С.* Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев: Вища школа, 1975. 228 с.
4. *Космодамианский А. С.* Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. Донецк: Изд-во Донецкого ун-та, 1972. 266 с.
5. *Ворович И. И., Космодамианский А. С.* Упругое равновесие изотропной пластинки, ослабленной рядом криволинейных отверстий.— Изв. АН ССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 3.
6. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. М.—Л.: Физматгиз, 1958. 354 с.
7. *Бурышкин М. Л.* Общая схема решения неоднородных линейных задач для симметричных механических систем.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 849—861.
8. *Бурышкин М. Л.* О функциях Колосова-Мусхелишвили в обобщенных симметричных задачах теории упругости.— Докл. АН УССР, 1979, № 5, с. 344—348.
9. *Бурышкин М. Л., Романенко Ф. А.* О численном исследовании концентрации напряжений в изотропной пластинке, ослабленной регулярным рядом круговых отверстий. ПМ, 1979, т. 15, № 11, с. 93—100.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию 15. III. 1982