ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 5, 1984 Механика

ПРИВЕДЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК К ДВУМЕРНОЙ

БАГДАСАРЯН Г. Е., САНОЯН А. А.

В работах [1, 2] на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел получены двумерные уравнения возмущенного состояния проводящих пластин и оболочек в стационарном магнитном поле. В эти уравнения входят неизвестные граничные значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля на поверхностях пластинки (оболочки), поэтому полученные уравнения необходимо рассматривать совместно с трехмерными уравнениями электродинамики для среды, окружающей оболочку, при общих граничных условиях на поверхности раздела двух сред. Вследствие этого задача магнитоупругости в общем случае остается трехмерной. В работах [3, 4, 5], исходя из основных положений гипотезы магнитоупругости тонких тел, трехмерная задача магнитоупругости тонких пластин сведена к двумерной.

В настоящей работе при помощи гипотезы магнитоупругости тонких тел, аналогично работе [5], определены указанные граничные значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля и на основе этого получена замкнутая двумерная система уравнений магнитоупругости тонких цилиндрических оболочек с соответствующими граничными условиями.

1. Пусть изотропная замкнутая круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины $2h$, длины $2l$ и радиуса срединной поверхности R, изготовленная из материала с конечной электропроводностью, находится в стационарном магнитном поле с заданным вектором напряженности магнитного поля $\vec{H}_0$.

Упругие и электромагнитные свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ.

Введем цилиндрическую систему координат x, r, θ, совместив полярную ось x с осью оболочки.

Принимаются следующие предположения:

а) магнитные и диэлектрические проницаемости материала оболочки и окружающей среды считаются равными единице;

б) для среды, окружающей оболочку, считаются справедливыми уравнения Максвелла для вакуума;

в) влияние токов смещения на характеристики упругих колебаний оболочки пренебрегается;

г) упругие перемещения и электромагнитные возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями магнитоупругости.

В силу принятых предположений для рассматриваемой задачи магнитоупругих колебаний цилиндрической оболочки имеем следующие исходные уравнения [6]:

уравнения магнитоупругости в области, занимаемой оболочкой—

$$(R-h\leqslant r\leqslant R+h, \quad -l\leqslant x\leqslant l, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

$$\operatorname{rot}\vec{h}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right]$$

$$\operatorname{div}\vec{h}=0, \quad \operatorname{rot}\vec{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\hat{\sigma}+\frac{\sigma}{c}\left(\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right)\times\vec{H}_0=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$$

$$\hat{\sigma}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{2\nu}{1-2\nu}(\operatorname{div}\vec{u})\hat{E}+\vec{\nabla}\vec{u}+(\vec{\nabla}\vec{u})^*\right]; \tag{1.2}$$

уравнения электродинамики для вакуума в области вне тела оболочки —

$$\operatorname{rot}\vec{h}=0, \quad \operatorname{div}\vec{h}=0$$

$$\operatorname{rot}\vec{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{e}=0 \tag{1.3}$$

В приведенных выше уравнениях $\vec{u}(u_x, u_r, u_\theta)$ — вектор перемещения частиц оболочки, $\vec{e}(e_x, e_r, e_\theta)$ и $\vec{h}(h_x, h_r, h_\theta)$ — соответственно векторы напряженностей индуцированного электрического и магнитного полей, $\hat{\sigma}$ — тензор упругих напряжений, $\hat{E}$ — единичный тензор, $\vec{\nabla}$ — набла-оператор Гамильтона, $(\vec{\nabla}\vec{u})^*$ — транспонированный тензор $\vec{\nabla}\vec{u}$, c — скорость света в пустоте, t — время.

Решения уравнений (1.1)—(1.3) должны удовлетворять условиям непрерывности соответствующих компонент электромагнитного поля на колеблющейся поверхности оболочки, условиям затухания электромагнитных возмущений на бесконечности, а также условиям закрепления торцов оболочки.

2. Для приведения трехмерной задачи магнитоупругости к двумерной принимается гипотеза магнитоупругости тонких тел [2], согласно которой

$$u_x=u-\gamma\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_\theta=v-\frac{\gamma}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta}, \quad u_r=w(x,\theta,t) \tag{2.1}$$

$$e_x = \varphi(x, \theta, t), \quad e_\theta = \psi(x, \theta, t), \quad h_r = f(x, \theta, t) \tag{2.2}$$

Здесь $u(x, \theta, t)$, $v(x, \theta, t)$, $w(x, \theta, t)$ — искомые тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки; φ, ψ — искомые тангенциальные компоненты индуцированного в оболочке электрического поля; f — искомая нормальная компонента индуцированного в оболочке магнитного поля; $\gamma = r - R$.

В соотношениях (2.1), (2.2) точка (x, r, θ) изменяется в пределах занимаемой оболочкой области Ω_0

$$(\Omega_0: -l \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad |\gamma| \leqslant h)$$

Система двумерных уравнений, полученная на основе соотношений (2.1), (2.2) для определения искомых функций в области Ω_0, приведена в [2, 6]. В эти уравнения входят неизвестные граничные значения тангенциальных компонент индуцированного электромагнитного поля на поверхностях оболочки, поэтому возникает необходимость совместного решения полученных уравнений с трехмерными уравнениями электродинамики для среды, окружающей оболочку, при общих граничных условиях на поверхности раздела двух сред. Вследствие этого задача магнитоупругости в общем случае остается пространственной. Для сведения указанной трехмерной задачи магнитоупругости цилиндрических оболочек к двумерной, аналогично работе [5], будем принимать, что соотношения (2.2) имеют место во всем цилиндрическом слое Ω (Ω: $|\gamma| < h$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$), то есть вместо (2.1), (2.2) будем принимать следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} & u_x = u - \gamma \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_r = w(x, \theta, t) \\ & u_\theta = v - \frac{\gamma}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned}\right\} \text{при } (r, \theta, x) \in \Omega_0$$

$$\left.\begin{aligned} & e_x = \varphi(x, \theta, t), \quad e_\theta = \psi(x, \theta, t) \\ & h_r = f(x, \theta, t) \end{aligned}\right\} \text{при } (r, \theta, x) \in \Omega \tag{2.3}$$

Для остальных компонент h_x, h_θ индуцированного в цилиндрическом слое Ω магнитного поля из уравнений (1.1) и (1.3) путем интегрирования по γ в пределах от нуля до γ с учетом (2.3) и условий непрерывности h_x и h_θ на поверхностях $\gamma = \pm h$ получим

$$h_x = \frac{h_x^+ + h_x^-}{2} + \gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{4\pi\sigma}{c}\psi\right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(a_{x0}\frac{\partial w}{\partial t} - a_{r0}\frac{\partial u}{\partial t} + a_{r1}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)$$

$$h_\theta = \frac{h_\theta^+ + h_\theta^-}{2} + \gamma\left(\frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi\right) + \tag{2.4}$$

$$+ \frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(a_{\theta 0}\frac{\partial w}{\partial t} - a_{r0}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{a_{r1}}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial t}\right)$$

где

$$a_{ik} = \int_0^{\gamma} \gamma^k H_{0i} d\gamma - \frac{1}{2}\left(\int_0^{h} \gamma^k H_{0i} d\gamma + \int_0^{-h} \gamma^k H_{0i} d\gamma\right)$$

$$\bar{\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma & \text{при } |x| \leqslant l \\ 0 & \text{при } |x| > l \end{cases}$$

$$(i = r,\ \theta,\ x;\quad k = 0,\ 1,\ 2)$$

Индексами плюс и минус отмечены значения соответствующих величин при $\gamma = h$ и $\gamma = -h$.

При получении (2.4) и (2.5) было учтено условие равенства нулю нормальной составляющей плотности тока проводимости на поверхностях $\gamma = \pm h$ (так как оболочка находится в вакууме).

При выполнении указанной выше операции относительно уравнений (1.1) и (1.3), кроме выражений (2.4), получаются также следующие дифференциальные уравнения относительно искомых функций u, v, w, φ, ψ, f:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{4\pi\bar{\sigma}}{c}\left[\psi + \frac{1}{2hc}\left(b_{r0}\frac{\partial u}{\partial t} - b_{x0}\frac{\partial w}{\partial t} - b_{r1}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)\right] = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{4\pi\bar{\sigma}}{c}\left[\varphi + \frac{1}{2hc}\left(b_{\theta 0}\frac{\partial w}{\partial t} - b_{r0}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{b_{r1}}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial t}\right)\right] = \frac{h_\theta^+ - h_\theta^-}{2h}$$

$$b_{ik} = \int_{-h}^{h} \gamma^k H_{0i} d\gamma \quad (i = x,\ r,\ \theta;\ k = 0,\ 1,\ 2)$$

Подставляя (2.3) и (2.4) в уравнения движения оболочки (1.2) и осредняя полученные при этом уравнения по толщине оболочки, помимо (2.5), получим также следующую систему дифференциальных уравнений относительно указанных искомых функций [2, 6]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{1-\nu^2}{2Eh}\frac{\sigma}{c}\left[b_{r0}\psi + b_{\theta 1}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{d_{r\theta}^{(0)}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(G_{\theta\theta}^{(0)}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{G_{x\theta}^{(0)}}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - \frac{c_{xr}^{(0)}}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{c}\left(F_{\theta\theta}^{(0)}\frac{\partial u}{\partial t} - F_{x\theta}^{(0)}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right] \\ &\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{1-\nu^2}{2Eh}\frac{\sigma}{c}\left[-b_{r0}\varphi - b_{x1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) - \frac{d_{rx}^{(0)}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{G_{xx}^{(0)}}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} - G_{\theta x}^{(0)}\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{c_{r\theta}^{(0)}}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{c}\left(F_{xx}^{(0)}\frac{\partial v}{\partial t} - F_{x\theta}^{(0)}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\theta^2}+\frac{1}{R^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}+\frac{3}{h^2}\left(\frac{w}{R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+$$

$$+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=P+\frac{\sigma}{c}\left\{\left(b_{x0}-\frac{\partial b_{r1}}{\partial x}\right)\psi+\left(\frac{1}{R}\frac{\partial b_{r1}}{\partial\theta}-b_{\theta 0}\right)\varphi+\right.$$

$$+b_{r1}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\left(\frac{b_{x2}}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}-b_{\theta 2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{c}\left[\left(c_{xr}^{(0)}-\frac{\partial F_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial F_{x\theta}^{(1)}}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\left(c_{r\theta}^{(0)}+\frac{\partial F_{\theta x}^{(1)}}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial F_{xx}^{(1)}}{\partial\theta}\right)\frac{\partial v}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-\left(c_{xx}^{(0)}+c_{\theta\theta}^{(0)}-\frac{\partial c_{xr}^{(1)}}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial c_{r\theta}^{(1)}}{\partial\theta}\right)\frac{\partial w}{\partial t}\right]-$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial G_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial G_{\theta x}^{(1)}}{\partial\theta}\right)\frac{\partial w}{\partial x}-\right.$$

$$-\left(\frac{\partial G_{x\theta}^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial G_{xx}^{(1)}}{\partial\theta}\frac{1}{R}\right)\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta}+G_{\theta\theta}^{(1)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{G_{xx}^{(1)}}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\left(G_{\theta x}^{(1)}+G_{x\theta}^{(1)}\right)\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}+$$

$$+\left(-F_{x\theta}^{(1)}+\frac{\partial d_{r\theta}^{(1)}}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial d_{rx}^{(1)}}{\partial\theta}\right)\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{1}{R}+F_{\theta\theta}^{(1)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{F_{xx}^{(1)}}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta}-$$

$$-\left(F_{\theta x}^{(1)}+\frac{\partial d_{r\theta}^{(1)}}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial d_{rx}^{(1)}}{\partial\theta}\right)\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{d_{rx}^{(1)}}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+$$

$$\left.\left.+\frac{d_{r\theta}^{(1)}}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta}-d_{r\theta}^{(1)}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{d_{rx}^{(1)}}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta}\right]\right\}$$

В (2.6) приняты следующие обозначения:

$$c_{ij}^{(k)}=\int_{-h}^{h}\gamma^k H_{0i}H_{0j}d\gamma$$

$$d_{ij}^{(k)}=\int_{-h}^{h}\gamma^k a_{i0}H_{0j}d\gamma$$

$$C_i^+=\frac{H_{0i}^++H_{0i}^-}{2},\qquad C_i^-=\frac{H_{0i}^+-H_{0i}^-}{2}$$

$$G_{ij}^{(k)}=2d_{ij}^{(k)}-c_{rr}^{(k+1)}\delta_{ij}-c_{ij}^{(k+1)}+hC_i^-b_{jk}$$

$$F_{ij}^{(k)}=c_{ij}^{(k)}+c_{rr}^{(k)}\delta_{ij}-b_{ik}C_i^+$$

$$(i,\ j=r,\ \theta,\ x;\ k=0,\ 1)$$

Таким образом, задача магнитоупругих колебаний электропроводящей изотропной замкнутой цилиндрической оболочки во внешнем стационарном магнитном поле сводится к совместному решению двумерных дифференциальных уравнений (2.5) и (2.6) в области Ω и уравнений электродинамики (1.3) в областях $r > R + h$ и $0 < r < R - h$. Граничными условиями задачи, кроме обычных условий закрепления оболочки и условий непрерывности величин e_x, e_θ и h_r на поверхностях $\gamma = \pm h$, будут также условия затухания возмущений на бесконечности в области $\gamma > h$ и условия ограниченности возмущений в области $\gamma < -h$.

3. Для полного определения перемещений точек оболочки в области Ω_0 и индуцированного электромагнитного поля во всем пространстве, как видно из (2.5) и (2.6), необходимо иметь значения компонент h_x и h_θ индуцированного магнитного поля на поверхностях $\gamma = \pm h$. Их определяем, решая уравнения

$$\operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = 0 \tag{3.1}$$

в областях $|\gamma| > h$ при следующих граничных условиях:

$$h_r^{(e)}\big|_{\gamma=\pm h} = f(x, \theta, t) \tag{3.2}$$

где индекс «е» означает принадлежность к области $|\gamma| > h$, причем $e = 1$ относится к области $\gamma > h$, а $e = 2$ — к области $\gamma < -h$.

Введением потенциальных функций $\Phi^{(e)}$ посредством

$$\vec{h}^{(e)} = \operatorname{grad} \Phi^{(e)} \tag{3.3}$$

определение $\vec{h}^{(e)}$ в силу (3.1), (3.2) приводится к решению следующих задач Неймана в областях $|\gamma| > h$:

$$\Delta\Phi^{(e)} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial r}\bigg|_{\gamma=\pm h} = f(x, \theta, t) \tag{3.4}$$

Представляя любую из искомых функций в виде

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases} \tag{3.5}$$

и применяя интегральное преобразование Фурье по x, с учетом условий на бесконечности, задачи (3.4) сводятся к следующим задачам:

$$\frac{d^2\overline{\Phi}_n^{(e)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\overline{\Phi}_n^{(e)}}{dr} - \left(\alpha^2 + \frac{n^2}{r^2}\right)\overline{\Phi}_n^{(e)} = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{d\overline{\Phi}_n^{(e)}}{dr}\bigg|_{r=R\pm h} = \overline{f}_n(\alpha, t) \tag{3.7}$$

где

$$\overline{\Phi}_n^{(e)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^{(e)}(x, r, t) \exp(i\alpha x)\, dx$$

$$\overline{f}_n(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x, t) \exp(i\alpha x)\, dx$$

Общее решение уравнений (3.6) имеет вид

$$\overline{\Phi}_n^{(e)} = A_n^{(e)} K_n(|\alpha| r) + B_n^{(e)} I_n(|\alpha| r) \tag{3.8}$$

где I_n, K_n — функции Бесселя чисто мнимого аргумента порядка n.

Имея в виду, что функция I_n растет неограниченно при $r \to \infty$, а функция K_n имеет особенность в начале координат, следует положить $A_n^{(2)} = B_n^{(1)} = 0$. Удовлетворяя граничным условиям (3.7), определяем остальные постоянные интегрирования и, следовательно, изображения $\overline{\Phi}_n^{(e)}$. Путем применения обратного преобразования Фурье для оригиналов $\Phi_n^{(e)}$ найдем следующие выражения:

$$\Phi_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(s, t)\, ds \int_0^{\infty} \frac{K_n(\alpha r)}{K_n'(\alpha R)} \frac{\cos\alpha(s-x)}{\alpha}\, d\alpha$$

$$\Phi_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(s, t)\, ds \int_0^{\infty} \frac{I_n(\alpha r)}{I_n'(\alpha R)} \frac{\cos\alpha(s-x)}{\alpha}\, d\alpha \tag{3.9}$$

Подставляя найденные выражения $\Phi_n^{(e)}$ в (3.3) и переходя к пределу, для интересующих нас комбинаций граничных значений тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля получим

$$h_{xn}^{+} - h_{xn}^{-} = \frac{1}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(s, t)\, ds \int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha(s-x)\, d\alpha}{\alpha K_n'(\alpha R)\, I_n'(\alpha R)}$$

$$h_{\theta n}^{+} - h_{\theta n}^{-} = -\frac{n}{\pi R^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(s, t)\, ds \int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha(s-x)\, d\alpha}{\alpha^2 K_n'(\alpha R)\, I_n'(\alpha R)} \tag{3.10}$$

где штрих означает производную по переменной αR.

Подставляя (3.10) в систему (2.5) и присоединяя к ней систему (2.6), получим разрешающую систему уравнений относительно искомых функций u, v, w, φ, ψ, f. Таким образом, задача магнитоупругих колебаний замкнутой цилиндрической оболочки приводится к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений при обычных условиях закрепления торцов оболочки и условиях $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \psi = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f = 0$.

Приведем упомянутую систему в случае осесимметричной задачи, когда оболочка находится в постоянном внешнем магнитном поле, вектор напряженности $\vec{H}\,(H_0, 0, 0)$ которого направлен по оси x

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi-\frac{H_0}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\frac{1}{2\pi Rh}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\psi}{\partial s}K(s,\ x)\,ds,\ (-\infty<x<\infty)$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{2Eh}{R^2}w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2\sigma hH_0}{c}\left(\psi-\frac{H_0}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0,\ (|x|<l)$$

где

$$K(s,\ x)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\alpha(x-s)\,d\alpha}{\alpha I_1(\alpha R)\,K_1(\alpha R)}$$

ԲԱՐԱԿ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՌԱՉԱՓ ԽՆԴՐԻ ԲԵՐՈՒՄԸ ԵՐԿՉԱՓԻ

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Ա. Հ. ՍԱՆՈՅԱՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ելնելով բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածից որոշված են ինդուկցված մագնիսական դաշտի շոշափող բաղադրիչների եզրային արժեքները և դրա հիման վրա ստացված է բարակ գլանային թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ հավասարումների փակ համակարգը համապատասխան եզրային պայմաններով:

THE REDUCTION OF A THREE-DIMENSIONAL MAGNETOELASTIC PROBLEM OF THIN CYLINDRICAL SHELLS TO A TWO-DIMENSIONAL ONE

G. E. BAGDASARIAN, A. H. SANOYAN

Summary

In a general case by means of the hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies, the unknown boundary values have been determined for tangential components of the induced magnetic field. A closed two-dimensional system has been obtained for magnetoelasticity equations of thin cylindrical shells with corresponding boundary conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Об уравнениях магнитоупругости тонких пластин.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
4. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущих пластин.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 2.
5. *Багдасарян Г. Е.* О приведении трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластин к двумерной. Ученые записки ЕрГУ, 1977, № 2.
6. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
12. XI. 1982