ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 4, 1984 Механика

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СЛУЧАЙНОГО ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ СТАРЕЮЩИХ СРЕД

ДОЛИНИН В. Н.

В течение срока службы конструкция, как правило, работает в условиях повторно-переменного нагружения, представляющего собой случайный процесс. Задача ставится таким образом, чтобы, зная вероятностные характеристики этого процесса, можно было бы судить о распределении поля напряжений или деформаций в любой момент времени, в том числе и к концу срока эксплуатации сооружения.

1. *Основные уравнения для неоднородно-стареющей среды.*

Для такой среды основные уравнения в условиях ползучести предложены в работе [1] и имеют вид

$$
\begin{gathered}
2G[t+\rho(\vec{r}')]\varepsilon_{ij}[t+\rho(\vec{r}')]=S_{ij}[t+\rho(\vec{r}')]+\\
+\int_{\Lambda}\Gamma_1[t+\rho(\vec{r}'),\ \tau+\rho(\vec{\xi}')]S_{ij}[\tau+\rho(\vec{\xi}')]\,d[\tau+\rho(\vec{\xi}')]\\
E[t+\rho(\vec{r}')]\theta[t+\rho(\vec{r}')]=\sigma[t+\rho(\vec{r}')]+\\
+\int_{\Lambda}\Gamma_2[t+\rho(\vec{r}'),\ \tau+\rho(\vec{\xi}')]\sigma[\tau+\rho(\vec{\xi}')]\,d[\tau+\rho(\vec{\xi}')]
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где все входящие сюда функции, кроме модулей сдвиговой и объемной деформации, предполагаются случайными. Тогда уравнение для математических ожиданий представимо в виде

$$
\begin{gathered}
m_{ij}^{(\varepsilon)}[t+\rho(\vec{r}')]=m_{ij}^{(s)}[t+\rho(\vec{r}')]+\int_{\Lambda}m_{ij}^{(s)}[\tau+\rho(\vec{\xi}')]\,m_r[t+\rho(\vec{r}'),\ \tau+\rho(\vec{\xi}')]\times\\
\times d[\tau+\rho(\vec{\xi}')]
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

а выражение для корреляционных функций записывается следующим образом:

$$
K_{ij}^{(\varepsilon)}(t,\ t')=K_{ij}^{(s)}(t,\ t')+\int_{\Lambda}K_{ij}^{(s)}(t,\ \tau')\,\overline{m_r(t',\ \tau')}\,d\tau'+
$$

$$+\int\limits_{\Lambda}\overline{K_{ij}^{(s)}(t',\ \tau)}\,m_r(t,\ \tau)\,d\tau+\iint\limits_{\Lambda}[K_r(t,\ \tau;\ t',\ \tau')\,m_{ij}^{(s)}(\tau)\,\overline{m_{ij}^{(s)}(\tau')}\,+$$

$$+K_r(t,\ \tau;\ t',\ \tau')\,K_{ij}^{(s)}(\tau,\ \tau')+K_{ij}^{(s)}(\tau,\ \tau')\,m_r(t,\ \tau)\,\overline{m_r(t',\ \tau')}]\,d\tau d\tau' \quad (1.3)$$

Здесь для сокращения записи под t, t' следует понимать $t+\rho(\vec{r}')$, $t+\rho(\vec{r}+\vec{r}')$ и т. д., а черта сверху означает комплексное сопряжение.

Таким образом, решение системы уравнений (1.1) сводится к нахождению значений математических ожиданий и корреляционных функций деформаций ползучести при известных значениях этих характеристик для случайного поля напряжений и весовой функции случайного линейного интегрального оператора.

2. *Основные характеристики случайной весовой функции*

Будем считать, что уравнения (1.1) для неоднородно-стареющей среды можно получить формальным переходом из уравнений для однородной среды путем замены переменных t, τ на переменные $t+\rho(\vec{r}')$, $\tau+\rho(\vec{\xi}')$. Тогда основные характеристики случайных весовых функций $\Gamma_1[t+\rho(\vec{r}'),\ \tau+\rho(\vec{\xi}')]$ и $\Gamma_2[t+\rho(\vec{r}'),\ \tau+\rho(\vec{\xi}')]$ могут быть получены таким же формальным переходом из характеристик весовых функций $\Gamma_1(t,\ \tau)$ и $\Gamma_2(t,\ \tau)$.

Регулярная часть функции ползучести(то есть ядро интегрального уравнения типа Вольтерра) имеет вид [2]

$$\Gamma(t,\ \tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\ \tau)\right]$$

Тогда, используя результаты работы [3], где следует положить $B=\alpha_1=\alpha_2=1$, легко найти основные характеристики случайной весовой функции неоднородно-стареющей среды:

$$\langle\Gamma[t+\rho(\vec{r}'),\ \tau+\rho(\vec{\xi}')]\rangle=m_\Gamma[t+\rho(\vec{r}'),\ \tau+\rho(\vec{\xi}')]=$$
$$=\int\limits_{\tau+\rho(\vec{\xi}')}^{t+\rho(\vec{r}')}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{E(\tau)}+C[t+\rho(\vec{r}'),\ \tau]\right\}z(\tau)\,d\tau \quad (2.1)$$

$$K_\Gamma[t+\rho(\vec{r}'),\ t'+\rho(\vec{r}+\vec{r}'),\ \tau+\rho(\vec{\xi}')]=$$

$$=\int\limits_{\tau+\rho(\vec{\xi}')}^{\min[t+\rho(\vec{r}'),\ t'+\rho(\vec{r}+\vec{r}')]}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{E(\tau)}+C[t+\rho(\vec{r}'),\ \tau]\right\}\times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\frac{1}{E(\tau)} + C[t' + \rho(\vec{r} + \vec{r}'), \tau]\right\} z(\tau)\, d\tau \tag{2.2}$$

Здесь $z(t)$ — среднее число изменений поля деформаций в единицу времени.

3. Основные характеристики случайного напряжения

При решении задач в излагаемой постановке средний уровень напряжений, как правило, задается, то есть задается математическое ожидание предполагаемых напряжений. Нахождение же корреляционной функции связано не только с определенными математическими трудностями, но и с характером случайного воздействия.

Ниже делается попытка найти вид корреляционной функции напряжения для неоднородно-стареющей среды, исходя из достаточно общих соображений.

Для пространственно-временного случайного поля напряжений (стационарного и однородного) можно построить соответствующее ему разложение интегралом Фурье [4]

$$\sigma(t, \vec{r}) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i(\omega t + \vec{\varkappa}\vec{r})\right) \chi(\omega, \vec{\varkappa})\, d\omega\, d\varkappa_1 d\varkappa_2 d\varkappa_3 \tag{3.1}$$

где $\chi(\omega, \vec{\varkappa})$ — спектральная плотность случайного напряжения, в свою очередь, является случайной функцией, для которой

$$K_\chi(\omega, \omega'; \vec{\varkappa}, \vec{\varkappa}') = \delta(\vec{\varkappa} - \vec{\varkappa}')\,\delta(\omega - \omega')\, V(\omega, \vec{\varkappa}) \tag{3.2}$$

где $V(\omega, \vec{\varkappa})$ — спектральная плотность, определяемая системой уравнений:

$$\begin{gathered} K_\sigma(\tau, \vec{r}) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i(\omega\tau + \vec{\varkappa}\vec{r})\right) V(\omega, \vec{\varkappa})\, d\varkappa_1 d\varkappa_2 d\varkappa_3 d\omega \\ V(\omega, \vec{\varkappa}) = (2\pi)^{-4} \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i(\omega\tau + \vec{\varkappa}\vec{r})\right) K_\sigma(\tau, \vec{r})\, d\tau\, dx\, dy\, dz \end{gathered} \tag{3.3}$$

Для пространственно-временного (стационарного и однородного) силового поля в форме Н. Х. Арутюняна корреляционная функция напряжений должна иметь вид

$$K_\sigma(t, t'; \vec{r}, \vec{r}') = K_\sigma[\tau + \theta(\vec{r})] \tag{3.4}$$

где $\tau = t' - t$, а $\theta(\vec{r}) = \rho(\vec{r} + \vec{r}') - \rho(\vec{r}')$

Условие (3.4) будет соблюдено и в том случае, если спектральная плотность корреляционной функции эквивалентна соотношению

$$V(\omega, \vec{\varkappa}) = \delta[\vec{\varkappa} - \omega |r|^{-2} \theta(\vec{r}) \cdot \vec{r}] W(\omega) \tag{3.5}$$

в чем легко убедиться, решая совместно (3.3) и (3.5). Здесь $W(\omega)$ — спектральная плотность корреляционной функции временного случайного поля.

Подставляя значение спектральной плотности из (3.5) в первое уравнение (3.3), найдем простое выражение для корреляционной функции напряжения через спектральную плотность временного случайного поля:

$$K_\sigma(\tau, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega[\tau + \theta(\vec{r})]) W(\omega) \, d\omega \tag{3.6}$$

Таким образом, знание спектральной плотности корреляционной функции временного случайного поля позволяет свести к квадратурам выражение для корреляционной функции напряжения пространственно-временного случайного поля.

Рассмотрим вспомогательную задачу, в которой примем, аналогично [3], что изменения поля деформаций происходят в случайные моменты времени T_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), а напряжение в конструкции в момент времени t от единичного импульса отклонения деформации от некоторого среднего ее значения, возникшего в момент времени τ, обозначим через $P(t, \tau)$. Величины отклонений в различные случайные моменты времени обозначим через B_k и естественно считать их независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Тогда напряжение в конструкции определится

$$\sigma(t) = \sum_k B_k P(t, T_k)$$

Применяя преобразование интегралом Фурье к правой и левой части последнего равенства, найдем

$$\chi(\omega) = \sum_k B_k H(\omega, T_k) \tag{3.7}$$

Здесь $\chi(\omega)$ — спектральная плотность напряжения $\sigma(t)$, а $H(\omega, T_k)$ определяется квадратурой

$$H(\omega, T_k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \omega') \exp(-i\omega' T_k) \, d\omega'$$

где $F(\omega, \omega')$ — спектральная плотность напряжения $P(t, T_k)$.

Соотношение (3.7) позволяет от исследования случайного поля напряжений перейти к исследованию соответствующих спектральных плотностей.

Используя ряд преобразований, аналогичных упомянутой выше работе, найдем для корреляционной функции спектральной плотности соотношение

$$K_\gamma(\omega, \omega') = \alpha_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\omega, \xi)\,\overline{H(\omega', \xi)}\,y(\xi)\,d\xi \tag{3.8}$$

Здесь α_2 — момент второго порядка случайной величины B, $y(\xi)$ — среднее число изменений поля деформаций в единичном частотном интервале.

С другой стороны, разложение случайной функции напряжения интегралом Фурье возможно, если

$$K_\gamma(\omega, \omega') = \delta(\omega - \omega')\,W(\omega) \tag{3.9}$$

что следует из (3.2) для случая только временного поля. Одновременное выполнение равенств (3.8) и (3.9) возможно, в частности, и тогда, если

$$F(\omega, \omega') = \delta(\omega - \omega'), \quad y(\omega) = W(\omega) = \text{const} \tag{3.10}$$

В этом случае выражение для корреляционной функции случайного напряжения неоднородной стареющей среды приобретает достаточно простой вид

$$K_\sigma(\tau, \vec{r}) = (2\pi)^2 \alpha_2 y_0 \delta[\tau + \theta(\vec{r})] \tag{3.11}$$

что непосредственно следует из уравнения (3.6).

Вид корреляционной функции случайного напряжения (3.11) позволяет сделать вывод, что условия (3.10) приводят напряжения к случайной функции, представляемой белым шумом с интенсивностью

$$G(t) = (2\pi)^2 \alpha_2 y_0$$

Подставляя выражение (3.11) в исходные уравнения (1.3), для объемного напряженного состояния после ряда преобразований найдем

$$\begin{aligned} K_y[\tau + \theta(\vec{r})] &= K_\sigma[\tau + \theta(\vec{r})] + (2\pi)^2 \alpha_2 y_0 \overline{m_r[|\tau + \theta(\vec{r})|]} + \\ &+ 4\pi^2 \alpha_2 y_0 m_r[|\tau + \theta(\vec{r})|] + 4\pi^2 \alpha_2 y_0 K_r[\tau + \theta(\vec{r});\ 0] \cdot T + \\ &+ 4\pi^2 \alpha_2 y_0 \int\limits_T m_r[t + \rho(\vec{r}') - \xi]\, m_r[t' + \rho(\vec{r} + \vec{r}') - \xi]\, d\xi + \\ &+ \iint\limits_T K_r[\tau + \theta(\vec{r});\ \xi - \xi']\, m_\sigma(\xi)\, \overline{m_\sigma(\xi')}\, d\xi\, d\xi' \end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь T — область интегрирования, а переменные интегрирования имеют вид $\xi = \tau + \rho(\vec{r}')$, $\xi' = \tau' + \rho(\vec{r} + \vec{r}')$.

Таким образом, уравнения (1.2) и (3.12) являются основными для расчета характеристик напряженно-деформированного состояния для неоднородно-стареющей среды, описываемой уравнениями, предложенными в работе [2], при случайных воздействиях.

Здесь рассмотрен случай, когда заданы в качестве исходных характеристики случайного напряжения. Если задаются характеристики случайного поля деформаций, то, находя резольвенту исходных ядер интегральных уравнений и разрешая последние относительно деформаций, аналогичным путем могут быть построены уравнения для определения характеристик случайного напряжения.

4. *Приложение теории к решению задач механики*

Ниже рассматривается задача о распределении напряжений в неоднородно-стареющем стержне при случайном температурном воздействии $T(x, t)$, решение которой можно получить на основании найденных выше соотношений.

Основное уравнение для напряжений будет иметь вид

$$\frac{\partial u[x', t+\rho(x')]}{\partial x'} = \varepsilon_x[t+\rho(x')] = \sigma_x[t+\rho(x')]\cdot E^{-1}[t+\rho(x')] -$$

$$- \int\limits_{\tau+\rho(x'')}^{t+\rho(x')} \sigma_x[\tau+\rho(x'')]\cdot\Gamma[t+\rho(x'), \tau+\rho(x'')]\, d[\tau+\rho(x'')] + \alpha T(x', t) \quad (4.1)$$

где все входящие сюда функции, кроме модуля упругости E и коэффициента температурного расширения α, являются случайными. Используя представление (1.2), легко найти

$$\frac{\partial m_u[x', t+\rho(x')]}{\partial x'} = m_\varepsilon[t+\rho(x')] = \frac{m_\sigma[t+\rho(x')]}{E[t+\rho(x')]} + \alpha m_T(x, t) -$$

$$- \int\limits_{\tau+\rho(x'')}^{t+\rho(x')} m_\sigma[\tau+\rho(x'')]\, m_\Gamma[t+\rho(x'), \tau+\rho(x'')]\, d[\tau+\rho(x'')] \quad (4.2)$$

В связи с появлением в (4.1) дополнительного температурного члена, выражение для корреляционной функции из (3.12) непосредственно не следует.

Однако, проведя ряд преобразований, найдем

$$K_\varepsilon(t', t) = \frac{K_\sigma(t', t)}{E(t)E(t')} - \frac{1}{E(t)}\int\limits_T K_\sigma(t, \tau)\,\overline{m_\Gamma(t', \tau)}\, d\tau +$$

$$+ \frac{\alpha}{E(t)} K_{\sigma T}(t; t', x') - \frac{1}{E(t')}\int\limits_T \overline{K_\sigma(t', \tau)}\, m_\Gamma(t, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \iint\limits_T [K_\sigma(\tau, \tau')\, K_\Gamma(t, \tau; t', \tau') + K_\sigma(\tau, \tau')\, m_\Gamma(t, \tau)\,\overline{m_\Gamma(t', \tau')} +$$

$$+ K_\Gamma(t, \tau; t', \tau')\, m_\sigma(\tau)\,\overline{m_\sigma(\tau')}\,]\, d\tau d\tau' -$$

$$-\alpha\int_T K_{\circ T}(\tau;\ t',\ x')\, m_r(t,\ \tau)\, d\tau + \alpha E^{-1}(t')\,\overline{K_{\circ T}(t';\ t,\ x)} -$$

$$-\alpha\int_T \overline{K_{\circ T}(\tau,\ t,\ x)}\,\overline{m_r(t',\ \tau)}\, d\tau + \alpha^2 K_T(t,\ x;\ t',\ x') \tag{4.3}$$

Здесь для сокращения записи под t, t' следует понимать $t+\rho(x')$, $t'+\rho(x+x')$ и т. д.

Следует иметь также в виду, что структура уравнения (4.1) несколько отличается от структуры уравнений (1.1), то есть в последнем случае из соотношения (3.11) следует

$$K_\circ(t,\ t';\ x) = (2\pi)^2\alpha_2 y_0\delta[\tau+\theta(x)]\, E[(t'+\rho(x+x')]\cdot E[t+\rho(x')]$$

где $\tau = t'-t$.

Определим характеристики весовой функции. Примем среднее число изменений поля деформаций в единицу времени за постоянную величину, равную z_0. Такое допущение можно сделать всегда, если даже z изменяется во времени. В этом случае можно построить такой временной интервал, где изменением поля деформаций можно пренебречь и положить его равным z_0. В этом случае следует говорить о квазистационарном поле. Тогда из (2.1) следует выражение для математического ожидания

$$m_r[t+\rho(x'),\ \tau+\rho(x'')] =$$

$$= -z_0\left\{C[t+\rho(x'),\ \tau+\rho(x'')] + \frac{1}{E[\tau+\rho(x'')]} - \frac{1}{E[t+\rho(x')]}\right\} \tag{4.4}$$

при этом в фигурных скобках получается существенно-положительная функция. Такая форма записи весьма удобна, так как позволяет пользоваться обычными уравнениями механики неоднородного старения и ползучести для детерминированных функций.

Для решения конкретной задачи о температурных напряжениях в стержне положим модуль упругости $E = \mathrm{const}$, а момент начала процесса неоднородного старения отнесем достаточно далеко. Тогда из (4.4) следует

$$m_r = -z_0 c_0 \tag{4.5}$$

где c_0 — предельное значение меры ползучести материала стержня в его старом возрасте.

Выражение для корреляционной функции при постоянном модуле следует из (2.2)

$$K_r[t'+\rho(x+x'),\ t+\rho(x'),\ \tau+\rho(x'')] =$$

$$= z_0\int_{\tau+\rho(x'')}^{\min[t'+\rho(x+x'),\ t+\rho(x')]} \frac{\partial C[t+\rho(x'),\tau]}{\partial\tau}\,\frac{\partial C[t'+\rho(x+x'),\ \tau]}{\partial\tau}\, d\tau$$

Ясно, что данный интеграл в элементарных функциях не выражается.

Пользуясь сначала методом интегрирования по частям, а затем преобразованием Абеля для бесконечного ряда в условиях стационарного и однородного пространственно-временного случайного поля для значений $\gamma < 1$, найдем окончательное выражение для корреляционной функции весовой функции системы

$$K_r[t' + \rho(x + x') - t - \rho(x'); \tau + \rho(x'')] =$$

$$= \frac{\gamma c_0^2 z_0}{2} \{\exp(-\gamma[t' + \rho(x + x') - t - \rho(x')]) -$$

$$- \exp(-\gamma[t' + \rho(x + x') + t + \rho(x') - 2\tau - 2\rho(x'')])\} \qquad (4.6)$$

Найденные характеристики весовой функции (4.5) и (4.6) позволяют существенно упростить исходные уравнения для вероятностных характеристик искомого поля и записать их в виде

$$\frac{\partial m_u[x', t + \rho(x')]}{\partial x'} = m_\varepsilon[t + \rho(x')] =$$

$$= \frac{m_\sigma[t + \rho(x')]}{E} + c_0 z_0 \int\limits_{\tau + \rho(x'')}^{t + \rho(x')} m_\sigma(\tau)\, d\tau + \alpha m_T(x, t) \qquad (4.7)$$

$$K_\varepsilon[\tau + \theta(x)] = \frac{K_\sigma[\tau + \theta(x)]}{E^2} + 2\alpha^2 K_T(t' - t;\ x' - x) +$$

$$+ \alpha^2 \overline{K_T(t - t';\ x - x')} + 2\cdot(2\pi)^2 \alpha_2 y_0 E c_0 z_0 \cdot [T] +$$

$$+ \alpha^2 E_0 c_0 z_0 \int\limits_T K_T(t' - \tau;\ x' - x)\, d\tau + \alpha^2 E_0 z_0 \int\limits_T \overline{K_T(t - \tau;\ x - x')}\, d\tau + \qquad (4.8)$$

$$+ 2\pi^2 \alpha_2 y_0 E^2 z_0 \gamma c_0^2 \exp(-\gamma[\tau + \theta(x)]) \cdot T \cdot [T] + (2\pi)^2 \alpha_2 y_0 E^2 c_0^2 z_0^2 \cdot T \cdot [T] +$$

$$+ \iint\limits_T K_r[\tau + \theta(x);\ \xi' - \xi]\, m_\sigma(\xi)\, \overline{m_\sigma(\xi')}\, d\xi d\xi'$$

Здесь T — область интегрирования, $\tau + \theta(x) = t' + \rho(x + x') - t - \rho(x')$, а $[T]$ — единичная временная размерность, которая образуется в результате интегрирования по δ-функции Дирака и которая будет опущена в дальнейшем изложении.

Таким образом, задача о распределении температурных напряжений сведена к системе двух несовместных уравнений (4.7) и (4.8).

Конкретизируем задачу и рассмотрим стержень длины L, защемленный на концах, а для температурного поля известно лишь его математическое ожидание и корреляционная функция, то есть информация, которая может быть извлечена из реального эксперимента

$$m_T(x, t) = Ax \sin(t/t_0); \quad K_T(t' - t;\ x' - x) =$$

$$= a^2 \exp\left(-\zeta|t' - t| - \left(\frac{x' - x}{x_0}\right)^2\right)$$

Здесь A, a, ζ, x_0, t_0 — постоянные параметры, характеризующие интенсивность случайного процесса.

Следуя [5], будем считать, что средние значения для напряжений не зависят от координат точки. Это означает, что центр тяжести процесса неоднородного старения сосредоточен в математическом ожидании весовой функции системы. Тогда, интегрируя уравнение (4.7) по координатам точки и используя граничные условия для перемещений, найдем

$$m_\sigma(t) + c_0 z_0 \cdot E \int\limits_{\tau+\rho(x'')}^{t+\rho(x')} m_\sigma(\tau)\, d\tau = f(t)$$

где

$$f(t) = -\frac{\alpha E}{L} \int\limits_0^L m_T(t, \xi)\, d\xi$$

Уравнение для напряжений легко приводится к дифференциальному, решением которого будет

$$m_\sigma[t+\rho(x')] = f[t+\rho(x')] - c_0 z_0 E \int\limits_{\tau+\rho(x'')}^{t+\rho(x')} f(\tau) \exp(-c_0 z_0 E(t-\tau))\, d\tau$$

и для принятого значения $m_T(x, t)$ температурного поля распределение напряжений в стержне будет иметь вид

$$m_\sigma[t+\rho(x')] = \chi\cdot\eta \left\{ \frac{\eta \cdot \sin[(t+\rho(x'))/t_0] - \cos[(t+\rho(x'))/t_0]}{\eta^2+1} - \right.$$

$$- \frac{\eta \cdot \sin[(\tau+\rho(x''))/t_0] - \cos[(\tau+\rho(x''))/t_0]}{\eta^2+1} \exp(-c_0 z_0 E[t+\rho(x') -$$

$$\left. -\tau-\rho(x'')]) \right\} - \chi \sin[(t+\rho(x'))/t_0] \qquad (4.9)$$

Здесь $\chi = 1/2 \cdot \alpha EAL$, $\eta = c_0 z_0 E t_0$ — безразмерная величина.

При этом второй член в фигурных скобках начнет быстро убывать с ростом времени наблюдения, и напряжения в стержне будут совершать гармонические колебания с периодом $2\pi t_0$. Учитывая, что начало процесса старения $\tau + \rho(x'')$ может быть отнесено достаточно далеко, то этим членом в выражении математического ожидания (4.9) вообще можно пренебречь, если положить $\tau + \rho(x'') \Rightarrow -\infty$.

Общее уравнение для корреляционной функции поля напряжений имеет вид

$$K_\sigma[|\tau+\theta(x)|] = \frac{K_\sigma[|\tau+\theta(x)|]}{E^2} + 8\pi^2\alpha_2 y_0 E c_0 z_0 +$$

$$+\alpha^2 a^2\left(3+\frac{2Ec_0 z_0}{\zeta}\right)\exp\left(-\zeta|\tau+\theta(x)|-\left(\frac{x'-x}{x_0}\right)^2\right)+$$

$$+2\pi^2\alpha_2 y_0 E^2 c_0^2 z_0[|\tau+\theta(x)|](\gamma\exp(-\gamma|\tau+\theta(x)|)+2z_0)+$$

$$+\frac{\gamma z_0 c_0^2 \chi^2 t_0^2}{4}\left[\frac{\cos\left(\frac{\tau+\theta(x)}{t_0}\right)}{\gamma^2+1}-\frac{\cos\left(\frac{\tau+\theta(x)}{t_0}\right)+\delta\sin\left(\frac{|\tau+\theta(x)|}{t_0}\right)}{\delta^2+1}\right]\times$$

$$\times\exp(-\gamma|\tau+\theta(x)|) \qquad (4.10)$$

где $\delta=2\gamma t_0$ является безразмерной величиной.

Из последнего соотношения следует, что корреляционная функция зависит как от времени, так и от координат точки, то есть полностью характеризует неоднородно-стареющую среду. Из этого выражения, в частности, можно выделить ту часть функции, которая определяется только ползучестью неоднородно-стареющего тела:

$$\frac{K_s^{\text{пол}}[|\tau+\theta(x)|]}{E^2}=8\pi^2\alpha_2 y_0 E c_0 z_0+\frac{2\alpha^2 a^2 E c_0 z_0}{\zeta}\times$$

$$\times\exp\left(-\zeta|\tau+\theta(x)|-\left(\frac{x'-x}{x_0}\right)^2\right)+$$

$$+2\pi^2\alpha_2 y_0 E^2 c_0^2 z_0[|\tau+\theta(x)|](\gamma\exp(-\gamma|\tau+\theta(x)|)+2z_0)+$$

$$+\frac{\gamma z_0 c_0^2 \chi^2 t_0^2}{4}\left[\frac{\cos\left(\frac{\tau+\theta(x)}{t_0}\right)}{\gamma^2+1}-\frac{\cos\left(\frac{\tau+\theta(x)}{t_0}\right)+\delta\sin\left(\frac{|\tau+\theta(x)|}{t_0}\right)}{\delta^2+1}\right]\times$$

$$\times\exp(-\gamma|\tau+\theta(x)|) \qquad (4.11)$$

Рассмотрим случай, когда в исходном уравнении (4.1) случайные напряжения являются функциями только времени. Тогда

$$\frac{\sigma_x(t)}{E(t)}\cdot L-\int\limits_{\tau=\beta(x^0)}^{t}\sigma_x(\tau)\Gamma^*(t,\tau)\,d\tau+\alpha T^*(t)=0 \qquad (4.12)$$

а корреляционная функция для напряжений в этом случае приводится к виду

$$\frac{K_s(t'-t)}{E^2}+8\pi^2\alpha_2 y_0 z_0 E c_0+\frac{3\sqrt{\pi}\,\alpha^2 a^2 z_0 E c_0 x_0}{2L}+$$

$$+\frac{3\sqrt{\pi}\,\alpha^2 a^2 x_0}{4L}\left(3-\frac{2z_0 E c_0}{\zeta}\right)\exp(-\zeta|t'-t|)+$$

$$+2\pi^2\alpha_2 y_0 z_0 E^2 c_0^2|t'-t|\left[\frac{\left(\exp\left(\frac{\gamma kL}{2}\right)-\exp\left(-\frac{\gamma kL}{2}\right)\right)^2}{L^2\gamma k^2}\exp(-\gamma|t'-t|)+\right.$$

$$+2z_0\Bigg]+\frac{z_0c_0^2\chi^2t_0^2}{4\gamma k^2L^2}\Bigg[\frac{\cos\left(\frac{t'-t}{t_0}\right)}{\gamma^2+1}\left(\exp\left(\frac{\gamma kL}{2}\right)-\exp\left(-\frac{\gamma kL}{2}\right)\right)^2-$$

$$-\frac{\cos\left(\frac{t'-t}{t_0}\right)+\delta\sin\left(\frac{|t'-t|}{t_0}\right)}{\delta^2+1}(\exp(-\gamma kL)-1)^2\Bigg]\exp(-\gamma|t'-t|)=0 \tag{4.13}$$

Последнее выражение вычислено из предположения линейного закона изменения функции старения по координатам точки, то есть $\rho(x)=k\cdot x$, хотя может быть принят и любой другой закон, а двойной интеграл найден с использованием функции Лапласа для длины стержня $L/x_0 \geqslant 5$.

Существенным отличием (4.10) от корреляционной функции (4.13) является то, что последнее выражение от координат точки уже не зависит, а определяется только длиной стержня L. Для численного сравнения этих соотношений найдем соответствующие им выражения для дисперсий

$$D_\sigma(0)=\frac{D_\theta(0)}{E^2}+8\pi^2\sigma_2y_0Ec_0z_0+\alpha^2a^2\left(3+\frac{2Ec_0z_0}{\zeta}\right)\exp\left(-\left(\frac{x'-x}{x_0}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{\gamma z_0c_0^2\chi^2t_0^2}{4}\left[\frac{1}{\gamma^2+1}-\frac{1}{\delta^2+1}\right] \tag{4.14}$$

$$\frac{D_\theta^*(0)}{E^2}+\frac{9\sqrt{\pi}\,\alpha^2a^2x_0}{4L}+8\pi^2\sigma_2y_0z_0Ec_0+\frac{z_0c_0^2\chi^2t_0^2}{4\gamma k^2L^2}\times$$

$$\times\left[\frac{\left(\exp\left(\frac{\gamma kL}{2}\right)-\exp\left(-\frac{\gamma kL}{2}\right)\right)^2}{\gamma^2+1}-\frac{(\exp(-\gamma kL)-1)^2}{\delta^2+1}\right]=0 \tag{4.15}$$

При численной оценке этих выражений следует иметь в виду, что

$$\frac{\exp\left(\frac{x}{2}\right)-\exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{x}\approx\frac{1-\exp(-x)}{x}\approx 1 \quad \text{для} \quad x=\gamma kL<1$$

и выполняется это приближенное равенство тем точнее, чем меньше γkL. При $x \geqslant 1$ выражение слева начинает расти, а справа быстро уменьшаться и они могут достигнуть таких значений, при которых дисперсия для напряжений в (4.15) станет отрицательной, что недопустимо. Поэтому применение уравнения (4.12) ограничено случаем, когда $\gamma kL < 1$.

Значение дисперсии по уравнению (4.14) всегда будет больше соответствующего значения по уравнению (4.15), и если случайное температурное поле распределено по закону, близкому к нормальному, то максимальные напряжения в стержне будут достигать значений $m_\sigma+3\bar{\sigma}$, где $\bar{\sigma}$ — средне-квадратическое отклонение.

Действительно, рассмотрим стержень с характеристиками: $\alpha=1\cdot10^{-5}$ [1/град], $E=4\cdot10^5$ [кгс/см²], $c_0=9\cdot10^{-7}$ [см²/кгс], $z_0=2$ [1/сут],

$L = 20$ [см], $\gamma = 0{,}05$ [1/сут], $a_2 y_0 = 0{,}4\cdot 10^{-12}$ — безразмерная величина, $A = 10$ [град/см], $a = 1$ [град], $\zeta = 2$ [1/сут], $x_0 = 5\cdot 10^{-2}$ [см], $t_0 = 5\cdot 10^{-1}$ [сут].

Тогда среднее значение напряжений находится из уравнения (4.9) и составит в момент приложения нагрузки $m_z = 127{,}478$ кгс/см^2, а значения средне-квадратических отклонений, определяемых по соотношениям (4.15), (4.14) и (4.11) равны соответственно $\overline{\sigma}^* = 3{,}271$ кгс/см^2, $\overline{\sigma} = 6{,}975$ кгс/см^2 и $\overline{\sigma}_{\text{пол}} = 0{,}813$ кгс/см^2.

Значение $\overline{\sigma}^*$ найдено для $k < 1$, а $\overline{\sigma}$ и $\overline{\sigma}_{\text{пол}}$ в точках $x' = x$. Отсюда максимально-возможное значение напряжения, возникающее в стержне в момент приложения нагрузки, составит $|m_z + 3\overline{\sigma}| = 148{,}\ 403$ кгс/см^2. Аналогичные расчеты могут быть выполнены и для любого текущего момента времени t и координат точки x.

То обстоятельство, что уравнение (4.14) дает большее значение дисперсии, чем (4.15), вполне закономерно: чем меньше ограничений мы накладываем на исходные уравнения, с тем большей степенью вероятности находятся искомые величины, а следовательно, пропорционально растут и границы доверительных интервалов для этих величин.

Из полученных соотношений вытекает еще один интересный вывод. Не нашла здесь своего подтверждения бытующая в литературе точка зрения, что именно с позиций теории случайных воздействий и учета последействия удастся найти наиболее точные уравнения для оценки долговечности конструкций. Как видно из соотношения (4.9), средние значения напряжений будут совершать некоторые гармонические колебания вслед за аналогичными колебаниями возмущающей нагрузки.

В заключение автор выражает глубокую признательность академику Н. Х. Арутюняну как за саму постановку задачи, так и за ценные советы, высказанные им при обсуждении настоящей работы.

ԾԵՐԱՑՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Ն. ԳՈՒՐԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են սողքի հաշվառումով անհամասեռ ծերացող միջավայրի համար վիճակի հավասարումները: Տվյալ հավասարումները ձևափոխվում են մեխանիկայի այնպիսի խնդիրներ լուծելու համար, երբ արտաքին ազդեցությունները տրված են պատահական ֆունկցիաներով կամ նրանց հիմնական բնութագրիչներով: Մտցվում է համակարգի կշռային ֆունկցիայի գաղափարը: Որպես այդպիսիք հանդես են գալիս սողքի պատահական կորիզը կամ համապատասխան ինտեգրալ հավասարման ռեզոլվենտը:

ABOUT A CLASS OF RANDOM LINEAR INTEGRAL OPERATOR IN THE THEORY OF CREEP OF AGEING MEDIA

V. N. DOLININ

Summary

The author considers the equations of state for non-homogeneously ageing media with account of creepage. The data of relationship is converted for solving such problems of mechanics when outside effects are assingned by random functions or their basic characteristics.

The concept of weight function of the system is introduced, the random cores of creepage or relaxation serving as such. The method for determining basic characteristics of weight function, its expectation and correlation function, is also given in the paper.

To illustrate the usage of the determined relationships, the solution of the task on the distribution of stresses in heterogeneously ageing rod at random temperature influence is presented. The solution of this task allows us to make some rather interesting conclusions, e.g. from the point of view of the theory of random effects and with account of aftereffect we cannot determine the relationship for evaluating the durability of constructions made of structurally instable materials.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред.— ДАН СССР, 1976, т. 229, № 3.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
3. *Долинин В. Н.* Исследование законов распределения случайных напряжений для вязко-упругой среды.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1982, т. 35, № 1.
4. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Изд. Наука, 1967.
5. *Арутюнян Н. Х.* Теория ползучести неоднородно-стареющих сред. М.: Изд. ин-та проблем механики, 1981.

Московский научно-исследовательский институт строительной физики

Поступила в редакцию 23. II. 1982