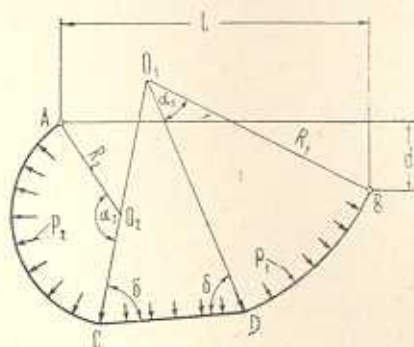


ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОЙ ВСТАВКИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ЧАХОЯН А. А.

При проектировании аппаратов на воздушной подушке важна проблема их устойчивости и колебаний. В связи с этим вопрос определения собственных частот гибкого ограждения аппарата представляет практический интерес. Здесь рассматривается эта задача, причем ограждение моделируется в виде двух длинных круговых цилиндрических мягких оболочек различных радиусов, соединенных жестким элементом. Оболочка, которая закреплена двумя параллельными образующими, считается нерастяжимой, кроме того, пренебрегается весом оболочки. Поперечное сечение оболочки показано на фиг. 1, причем невозмущенной формой ее сечения служат две



Фиг. 1.

дуги различных радиусов, соединенные жестким элементом. Оболочка нагружена равномерно распределенным давлением p_1 на участке CDB и давлением p_2 ($p_2 > p_1$) на участке AC . Форма сечения оболочки в состоянии равновесия определяется радиусом правой и левой частей R_1 и R_2 , длиной жесткого элемента $CD = L_0$, а также углами α_1 и α_2 . Считая задачу плоской, отнесем все рассуждения к оболочке, размер которой

вдоль образующей равен единице, то есть задачу сводим к свободным колебаниям нерастяжимой нити с включением жесткого стержня, натянутой в исходном положении внутренним давлением.

Из условия равновесия оболочки имеем

$$R_2 = \bar{p} R_1 \quad (1.1)$$

где $\bar{p} = p_1/p_2$ — коэффициент перепада давления.

Обозначив через $u = u(\varphi, t)$ и $v = v(\varphi, t)$ нормальное и тангенциальное перемещения текущей точки контура, а через φ — полярную координату этой точки (положительное направление против направления хода часовой стрелки), можно найти угол поворота касательной к контуру в этой точке

$$\eta_j = \frac{1}{R_j} \left(v_j - \frac{\partial u_j}{\partial \varphi_j} \right) \quad (j = 1, 2) \quad (1.2)$$

и записать условие нерастяжимости в виде [1]

$$u_j = -\frac{\sigma v_j}{\partial \varphi_j} \quad (j = 1, 2) \quad (1.3)$$

Здесь и далее индексом «1» обозначены величины, относящиеся к правой части оболочки, а индексом «2» — величины, относящиеся к левой части.

Дифференциальные уравнения для гибких частей системы в проекциях на направления нормали и касательной имеют вид [2]

для правой части ($0 \leq \varphi_1 \leq \alpha_1$)

$$\begin{aligned} \rho R_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= -N_{1g} - p_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi_1^2} \right) \\ \rho R_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial N_{1g}}{\partial \varphi_1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

для левой части ($-\alpha_2 \leq \varphi_2 \leq 0$)

$$\begin{aligned} \rho R_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= -N_{2g} - p_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi_2^2} \right) \\ \rho R_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial N_{2g}}{\partial \varphi_2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где ρ — приведенная плотность (масса оболочки на единицу площади ее срединной поверхности), N_{1g} и N_{2g} — динамические добавки окружных нормальных усилий соответственно правой и левой частей оболочки.

Дифференциальные уравнения колебаний жесткой вставки CD имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_0 L_0 \frac{d^2 x_c}{dt^2} &= [N_{1g}(0, t) - N_{2g}(0, t)] \sin \delta - \\ &- p_1 R_1 [\gamma_1(0, t) + \gamma_2(0, t)] \cos \delta + p_1 L_0 \dot{\psi} \\ \rho_0 L_0 \frac{d^2 y_c}{dt^2} &= [N_{1g}(0, t) + N_{2g}(0, t)] \cos \delta + \\ &+ p_2 R_2 [\gamma_1(0, t) - \gamma_2(0, t)] \sin \delta \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} J \frac{d^2 \psi}{dt^2} &= [N_{1g}(0, t) - N_{2g}(0, t)] \frac{L_0 \cos \delta}{2} + [\gamma_1(0, t) + \\ &+ \gamma_2(0, t)] \frac{L_0 \sin \delta}{2} p_2 R_2 - p_2 R_2 L_0 \dot{\psi} \sin \delta \end{aligned}$$

где $\delta = \arccos(L_0/2R_1)$, ρ_0 — приведенная плотность жесткой вставки, J и ψ — момент инерции и угол поворота жесткой вставки относительно оси, проходящей через ее центр тяжести и перпендикуляр-

ной к поперечному сечению вставки, x_c — перемещение центра тяжести жесткой вставки вдоль ее поперечного сечения (положительное направление — вправо), y_c — перемещение центра тяжести вставки, перпендикулярное перемещению x_c (положительное направление — вверх), $\gamma_1(0, t)$, $\gamma_2(0, t)$ — углы поворота касательной к контуру оболочки в точках C и D , возникающие при колебаниях оболочки, а $N_{1g}(0, t)$ и $N_{2g}(0, t)$ — динамические добавки окружных нормальных усилий в этих точках.

Исключая из (1.4) и (1.5) N_{1g} и N_{2g} , учитывая (1.3), получим дифференциальные уравнения для тангенциальных перемещений v_1 и v_2 в виде

$$\rho \frac{R_j}{p_j} \left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 v_j}{\partial t^2 \partial \varphi_j^2} \right) + \frac{\partial^4 v_j}{\partial \varphi_j^4} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial \varphi_j^2} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1.7)$$

Частное решение системы (1.6) и (1.7) примем в виде

$$\begin{aligned} v_{jn} &= V_{jn}(\varphi_j) \exp(ik_n t); \quad x_{cn} = X_{cn} \exp(ik_n t) \\ y_{cn} &= Y_{cn} \exp(ik_n t); \quad \psi_n = \Psi_n \exp(ik_n t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.7), получим дифференциальные уравнения в виде

$$\frac{d^4 V_{jn}}{d\varphi_j^4} + 2\beta_{jn} \frac{d^2 V_{jn}}{d\varphi_j^2} + (1 - 2\beta_{jn}) V_{jn} = 0 \quad (1.9)$$

где

$$2\beta_{jn} = 1 + \rho R_j k_n^2 / p_j$$

Решения дифференциальных уравнений (1.9) имеют вид

$$\begin{aligned} V_{1n} &= C_{1n} \sin z_{1n} \varphi_1 + C_{2n} \cos z_{1n} \varphi_1 + C_{3n} \operatorname{sh} z_{2n} \varphi_1 + C_{4n} \operatorname{ch} z_{2n} \varphi_1 \\ V_{2n} &= C_{5n} \sin z_{3n} \varphi_2 + C_{6n} \cos z_{3n} \varphi_2 + C_{7n} \operatorname{sh} z_{4n} \varphi_2 + C_{8n} \operatorname{ch} z_{4n} \varphi_2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} z_{1n, 2n} &= \sqrt{V \beta_{1n}^2 + 2\beta_{1n} - 1 \pm \beta_{1n}} \\ z_{3n, 4n} &= \sqrt{V \beta_{2n}^2 + 2\beta_{2n} - 1 \pm \beta_{2n}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$C_{1n}, C_{2n}, \dots, C_{8n}$ — постоянные интегрирования.

Из (1.6) с учетом (1.1) — (1.5), (1.8), (1.10) получим для амплитуд перемещений X_{cn} , Y_{cn} и угла поворота Ψ_n

$$\begin{aligned} \beta_n^* X_{cn} &= (\Phi_{1n} - \Phi_{2n}) \sin \delta + (\Phi_{3n} + \Phi_{4n}) \cos \delta - \bar{p} L_0 \Psi_n \\ \beta_n^* Y_{cn} &= (\Phi_{3n} - \Phi_{4n}) \sin \delta - (\Phi_{1n} - \Phi_{2n}) \cos \delta \\ \Psi_n &= [(\Phi_{1n} - \Phi_{2n}) \cos \delta - (\Phi_{3n} + \Phi_{4n}) \sin \delta] B_n / L_0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{1n} &= \bar{p} (C_{3n} z_{2n} z_{1n}^2 - C_{1n} z_{1n} z_{2n}^2); \quad \Phi_{2n} = C_{7n} z_{4n} z_{3n}^2 - C_{5n} z_{3n} z_{4n}^2 \\ \Phi_{3n} &= \bar{p} [C_{2n} (1 - z_{1n}^2) + C_{4n} (1 + z_{2n}^2)]; \quad \Phi_{4n} = C_{6n} (1 - z_{3n}^2) + C_{8n} (1 + z_{4n}^2) \\ \beta_n^* &= \rho_n L_0 k_n^2 / \rho_2; \quad B_n = 6L_0 / (\beta_n^* - 12R_2 \sin \delta) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Постоянные интегрирования $C_{1n}, C_{2n}, \dots, C_{8n}$ определяются граничными условиями

$$v_1(x_1, t) = u_1(x_1, t) = v_2(-x_2, t) = u_2(-x_2, t) = 0 \quad (1.14)$$

а также условиями стыковки жесткой вставки CD с криволинейными элементами AC и DB

$$\begin{aligned} v_1(0, t) \sin \delta + u_1(0, t) \cos \delta &= x_c \\ v_1(0, t) \cos \delta - u_1(0, t) \sin \delta &= y_c + L_0 \dot{\psi} / 2 \\ v_2(0, t) \sin \delta - u_2(0, t) \cos \delta &= x_c \\ v_2(0, t) \cos \delta + u_2(0, t) \sin \delta &= -(y_c - L_0 \dot{\psi} / 2) \end{aligned} \quad (1.15)$$

С учетом (1.3), (1.8) эти условия и система (1.12) приводят к однородной системе алгебраических уравнений для постоянных интегрирования $X_{cn}, Y_{cn}, \Psi_n, C_{1n}, C_{2n}, \dots, C_{8n}$.

Из условия существования нетривиального решения этой системы получим уравнения для определения собственных частот колебания k_n . Результаты машинного решения этого уравнения для частного случая $\bar{p} = 0,5$; $l/L = 0,4$; $d/L = 0,06$; $\varepsilon = L_2/L_1 = 1,5$ показаны на фиг. 2, где $k_n^{(0)}$ — значение собственных частот при $L_0 = 0$ (то есть без жесткой вставки), L_1 и L_2 — длина дуги соответственно правой и левой криволинейных частей, L — полная длина дуги оболочки ($L = L_0 + L_1 + L_2$), n — номер частоты, $\bar{p} = \rho_n / \rho$.

В частности, если $\bar{p} = 0$ и $\varepsilon = 1$, то есть для симметричной цилиндрической оболочки с радиусами $R_1 = R_2 = R$ и центральными углами $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ выражения (1.12) принимают вид:

а) антисимметричные формы колебаний

$$\begin{aligned} \beta_n^* X_{cn} &= 2(\Phi_{1n} \sin \delta + \Phi_{3n} \cos \delta) - L_0 \Psi_n; \quad Y_{cn} = 0 \\ \Psi_n &= 12(\Phi_{3n} \sin \delta - \Phi_{1n} \cos \delta) / (12R \sin \delta - \beta_n^*) \end{aligned}$$

б) симметричные формы колебаний

$$X_{cn} = 0; \quad \Psi_n = 0; \quad \beta_n^* Y_{cn} = 2(\Phi_{3n} \sin \delta - \Phi_{1n} \cos \delta)$$

При этом граничные условия и условия стыковки приводят к однородной системе уравнений:

а) при антисимметричных колебаниях

$$C_{1n} \sin z_{1n} \alpha + C_{2n} \cos z_{1n} \alpha + C_{3n} \operatorname{sh} z_{2n} \alpha + C_{4n} \operatorname{ch} z_{2n} \alpha = 0$$

$$C_{1n} z_{1n} \cos z_{1n} \alpha - C_{2n} z_{1n} \sin z_{1n} \alpha + C_{3n} z_{2n} \operatorname{ch} z_{2n} \alpha + C_{4n} z_{2n} \operatorname{sh} z_{2n} \alpha = 0$$

$$C_{1n} z_{1n} [2(1 - B_n \operatorname{ctg} \delta) z_{2n}^2 - \beta_n^* \operatorname{ctg} \delta] +$$

$$+ C_{2n} [\beta_n^* - 2(1 - z_{1n}^2) (\operatorname{ctg} \delta + B_n)] +$$

$$+ C_{3n} [2(B_n \operatorname{ctg} \delta - 1) z_{2n}^2 - \beta_n^* \operatorname{ctg} \delta] +$$

$$+ C_{4n} [\beta_n^* - 2(1 + z_{2n}^2) (B_n + \operatorname{ctg} \delta)] = 0 \quad (1.16)$$

$$C_{2n} [\operatorname{ctg} \delta + B_n (1 - z_{1n}^2)] + C_{1n} [1 + B_n z_{2n}^2 \operatorname{ctg} \delta] z_{1n} +$$

$$+ C_{3n} [1 - B_n z_{1n}^2 \operatorname{ctg} \delta] z_{2n} + C_{4n} [\operatorname{ctg} \delta + B_n (1 + z_{2n}^2)] = 0$$

б) симметричные формы колебаний

$$C_{1n} \sin z_{1n} \alpha + C_{2n} \cos z_{1n} \alpha + C_{3n} \operatorname{sh} z_{2n} \alpha + C_{4n} \operatorname{ch} z_{2n} \alpha = 0$$

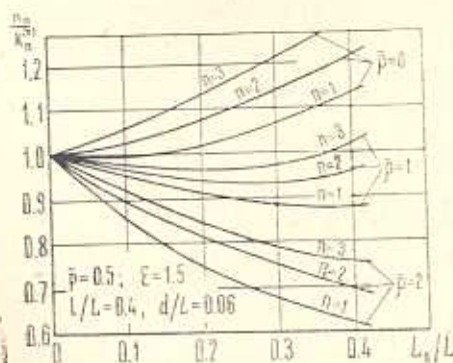
$$C_{1n} z_{1n} \cos z_{1n} \alpha - C_{2n} z_{1n} \sin z_{1n} \alpha + C_{3n} z_{2n} \operatorname{ch} z_{2n} \alpha + C_{4n} z_{2n} \operatorname{sh} z_{2n} \alpha = 0$$

$$C_{1n} z_{1n} \operatorname{ctg} \delta - C_{2n} + C_{3n} z_{2n} \operatorname{ctg} \delta - C_{4n} = 0 \quad (1.17)$$

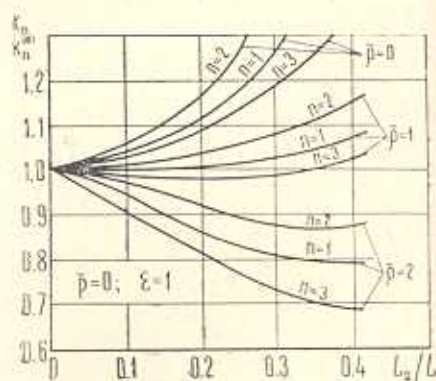
$$C_{1n} z_{1n} (\beta_n^* + 2z_{2n}^2 \operatorname{ctg} \delta) + C_{2n} [\beta_n^* \operatorname{ctg} \delta + 2(1 - z_{1n}^2)] +$$

$$+ C_{3n} z_{2n} (\beta_n^* - 2z_{1n}^2 \operatorname{ctg} \delta) + C_{4n} [\beta_n^* \operatorname{ctg} \delta + 2(1 + z_{2n}^2)] = 0$$

Выражая z_{1n} и z_{2n} через k_n (по формулам (1.11)), из условия существования нетривиального решения системы (1.16) и (1.17) получим уравнение для определения собственных частот k_n . Результаты решения этих уравнений показаны на фиг. 3, причем нечетным номерам соответствуют антисимметричные формы колебаний, а четным — симметричные формы колебаний.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Из полученных результатов видно, что на величину собственных частот существенно влияет ширина жесткой вставки только в тех случаях, когда ее погонная масса заметно отличается от погонной массы гибкой части оболочки.

Ա. Ա. ՉԱԽՈՅԱՆ

Ա մ ֆ ն ֆ ու մ

Ուսումնասիրվում է գլանաձև փափուկ թաղանթի ազատ-աատանումները, երբ թաղանթը իր մեջ ներգրավում է կոշտ շերտ: Եզրագծի երկու տարրեր կողմերում թաղանթի վրա ազդում են երկու տարրեր ճնշումներ: Ստացվել են բանաձևեր թաղանթի սեփական հաճախականությունների որոշման համար:

THE INFLUENCE OF A STIFF INSERT ON NATURAL FREQUENCIES OF A PNEUMATIC SHELL

A. A. CHAKHOYAN

S u m m a r y

The paper deals with the problem of free vibrations of the soft cylindrical shell containing a stiff plate.

On the two sides of the shell contour two different pressures act with two different values respectively.

The work resulted in obtaining the expressions for determining the natural frequencies of the shell.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1967. 444 с.
2. Чухоян А. А. Собственные частоты безмоментной цилиндрической оболочки при действии внутреннего давления.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, № 1, с. 33—37.

Լենյականский филиал Ереванского
политехнического института
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
18. X. 1982