

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОЛОСТИ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ
С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

ВИГДЕРГАУЗ С. Б.

При статическом расчете упругого тела необходимо знать максимальную величину нагрузки, которую оно может выдержать без перехода в пластическое состояние, появления трещин, хрупкого разрушения и иных нежелательных эффектов. Когда по условиям форма границы тела достаточно произвольна, естественно искать оптимальную границу, в наибольшей степени расширяющую уровень допустимых нагрузок. Такая постановка представляет интерес для качественной оценки предельных возможностей различных упругих конструкций и их оптимального проектирования в рамках принятой расчетной схемы.

§ 1. *Постановка задачи.* Если в занятой телом области S с границей Γ ввести положительную функцию координат $F(x, y, z)$ (критерий выхода из упругого состояния), то оптимальная граница доставляет минимум величине F_0 — максимуму по области функции F [1]:

$$f = \min_{\Gamma} F_0 = \min_{\Gamma} \max_{x,y,z} F \quad x, y, z \in S \quad (1.1)$$

Область S является внешностью конечного числа замкнутых непересекающихся полостей с гладкой границей Γ_k , $k = \overline{1, n}$, $\cup \Gamma_k = \Gamma$ и содержит бесконечно удаленную точку. Материал тела предполагается линейным, однородным и изотропным с модулем сдвига G . Поверхности Γ_k в совокупности симметричны относительно оси Z цилиндрической системы координат (z, r, θ) . Они нагружены нормальным давлением постоянной интенсивности p , а на бесконечности задано однородное осесимметричное поле напряжений

$$\sigma_r = \sigma_\theta = q_1, \quad \sigma_z = q_2; \quad q_1, q_2 > 0 \quad (1.2)$$

Γ_k ограничивают снаружи n односвязных областей Σ_k , дополняющих S до полного пространства E_3 . Все области имеют нулевой объем, то есть не допускается вырождение полостей в поверхности, линии и точки разрыва.

Обратная задача (1.1) об определении границы относится к минимаксным задачам оптимизации с локальным критерием качества. До недавнего времени она рассматривалась только в двумерном варианте (растяжение и изгиб бесконечных пластинок с отверстиями). Подробная библиография имеется в [2]. Наиболее полно плоская задача изучена в [1], где

в качестве F выбран критерий пластичности Мизеса, пропорциональный величине второго инварианта девиатора тензора напряжений [3]. Было установлено, что оптимальной является т. н. равнопрочная граница, вдоль которой напряжения постоянны. Фактическое отыскание границы сводится к задаче Дирихле для плоскости с разрезами вдоль действительной оси [4] или к линейному интегральному уравнению регулярного типа [5]. Оба способа существенно используют аппарат конформных отображений и поэтому неприменимы к пространственной задаче.

§ 2. *Граничные условия.* В силу линейности среды ее напряженное состояние можно представить как сумму однородного поля (1.2) и возмущения, вносимого полостями. Пусть u , w — радиальное и осевое смещение точек S , отвечающее возмущению. В [6] доказано, что на оптимальной по критерию Мизеса границе величины u , w — линейные функции соответствующих координат

$$4Gw = (2q_1 - q_2 + p)z + C_k \quad (2.1)$$

$$4Gu = (q_2 + p)r, \quad r, z \in \Gamma_k, \quad k = \overline{1, n} \quad (2.2)$$

C_k — определенные постоянные. При этом функция $w(z, r)$ гармонична в S , убывает на бесконечности как $O(R^{-2})$, $R^2 = (z^2 + r^2)$ и во всех точках $(S + \Gamma)$ связана с $u(z, r)$ соотношениями

$$r \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial(ur)}{\partial z}; \quad r \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial(ur)}{\partial r} \quad (2.3)$$

Вводя s — длину дуги вдоль положительного направления к кривой γ_k , $k = \overline{1, n}$ — сечению Γ_k меридианной плоскостью $\theta = \theta_0$, а также v — внешнюю для S нормаль к γ_k , преобразуем условие (2.2) с помощью (2.3) к виду

$$2G \frac{\partial w}{\partial v} = (q_2 + p) \frac{\partial z}{\partial v} \quad (2.4)$$

При выводе (2.4) использованы также известные соотношения [7]

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial r}{\partial s}; \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial v} \quad (2.5)$$

Условия (2.1), (2.4), переопределяющие гармоническую функцию $w(z, r)$ с заданной асимптотикой, и используются для решения рассматриваемой задачи.

§ 3. *Интегральное уравнение.* Продолжим функцию $w(z, r)$, рассматривая (2.1) как исходное тождество для ее определения во всех точках $\Sigma = U\Sigma_k$. Теперь $w(z, r)$ непрерывна всюду в E_3 и гармонична по отдельности в S и Σ . В таком случае $w(x, y, z)$ представима в E_3 потенциалом простого слоя с плотностью μ [7]

$$w(x, y, z) = \int_{\Gamma} \mu / \rho d\Gamma; \quad \rho^2 = (x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \xi)^2 \quad (3.1)$$

$$\mu = \mu(\zeta, \eta, \xi); \quad \zeta, \eta, \xi \in \Gamma$$

Для соблюдения указанной в § 2 асимптотики требуется, чтобы среднее значение плотности на Γ равнялось нулю.

Величина μ определяется скачком нормальных производных потенциала (3.1) при переходе через границу [7]

$$4\pi\mu = \frac{\partial w(z, r)}{\partial \nu} - \frac{\partial w(z, r)}{\partial \nu_0} \quad (3.2)$$

$$z, r \in \gamma_k$$

ν_0 — внутренняя для S нормаль к Γ . Используя (2.4), значения $w(z, r)$ в Σ и очевидное соотношение $\partial z / \partial \nu = -\partial z / \partial \nu_0$, получим из (3.2)

$$8\pi G^k = (2q_1 + q_2 + 3p) \frac{\partial z}{\partial \nu_0} \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.1) и переходя в интеграле к цилиндрическим координатам, имеем

$$w(z_0, r_0) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\gamma} r \frac{\partial z}{\partial \nu_0} ds \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{[(z - z_0)^2 + (r^2 + r_0^2 + 2|rr_0| \cos(\theta - \theta_0))]^{1/2}}$$

$$\alpha = \frac{2q_1 + q_2 + 3p}{2q_1 - q_2 + p}; \quad z_0, r_0 \in E_k, \gamma \in U\gamma_k$$

Вычисляя внутренний интеграл [8], учитывая (2.5) и полагая, что $z_0, r_0 \in \gamma$, приходим к нелинейному интегральному уравнению для определения координат точек меридионального сечения оптимальных границ через независимый параметр s :

$$z_0 + C_k = \int_{\gamma} \frac{|r| \partial r / \partial s K(m) ds}{[(z - z_0)^2 + (|r| + |r_0|)^2]^{1/2}} \quad (3.4)$$

$$m^2 = 4|rr_0| / [(z - z_0)^2 + (|r| + |r_0|)^2]; \quad m^2 \leq 1$$

K — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем m .

Уравнение (3.4) близко по структуре ядра к интегральному представлению упругих осесимметричных потенциалов — обобщенных аналитических функций в комплексной плоскости (z, r) с вырождением на мнимой оси [9].

При m , близком к единице, $K(m)$ допускает асимптотическое представление [8]: $K(m) = \ln(4/m_1) + o(m_1)$, $m^2 + m_1^2 = 1$, поэтому подынтегральное выражение в (3.4) имеет логарифмическую особенность в точках на оси r : $z_0 = z = 0$, $r \neq 0$, $r_0 \neq 0$. Как показывает непосредственная проверка, в остальных точках γ оно ограничено.

Если продолжить $w(z, r)$ в Σ , исходя из формулы (2.4), а не (2.1):

$$2Gw(z, r) = -(q_2 + p)z + C_k; \quad z, r \in \Sigma_k \quad (3.5)$$

то полученная функция гармонична в S и Σ , разрывна на Γ и имеет там в силу (3.2), (3.5) нулевой скачок нормальных производных. Следовательно

но [7], $w(z, r)$ можно представить потенциалом двойного слоя с плотностью λ :

$$8\pi G_i = (2q_1 + q_2 + 3p)z$$

Полученное таким образом уравнение для γ совпадает, однако, с (3.4), если его дополнительно преобразовать по формуле Грина.

Благодаря выбранному продолжению для $w(z, r)$, уравнение (3.4) справедливо не только на Γ , но и в Σ_k , $k = \overline{1, n}$, поэтому его можно упростить для случая, когда все полости пересекают ось Z (в точках a_k, b_k , $k = \overline{1, n}$). Предварительно доказывается

Лемма. Пусть не зависящая от θ функция $v(z, r)$ гармонична в конечной односвязной области T , содержащей отрезок оси Z , и принимает на нем значение

$$v(z, r) = \alpha z + \beta \quad (3.6)$$

α, β — постоянные. Тогда (3.6) имеет место и всюду в T .

Рассмотрим достаточно малую окрестность произвольной точки отрезка, целиком лежащую в T . В ней $v(z, r)$ допускает разложение

$$v(z, r) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(z, r^2) \quad (3.7)$$

где $P_m(z, r^2)$ — однородный гармонический полином степени m от z, r^2 [10]

$$P_m(z, r^2) = \sum_{l=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} d_l z^{m-2l} r^{2l}; \quad P_0 = 1$$

нормированный по условию $d_0 = 1$.

В точках оси Z , принадлежащих окрестности, (3.7) переходит в ряд по возрастающим степеням z , и в силу (3.6), $c_0 = \beta$, $c_1 = \alpha$, $c_m = 0$, $m > 1$, поэтому (3.6) справедливо в данной окрестности, а значит и всюду в T .

Применяя лемму к $w(z, r)$ в областях Σ_k , заключаем, что уравнение (3.4) в рассматриваемом случае без потери общности редуцируется из каждой Σ_k на отрезок $[a_k, b_k]$. Учитывая, что модуль $m = 0$ при $r_0 = 0$, а $2K(0) = \pi$, получим окончательно

$$z_0 + C_k = \frac{\alpha}{2} \int_{\gamma} \frac{|r| |r'(s)| ds}{[(z - z_0)^2 + r^2]^{1/2}}, \quad z_0 \in [a_k, b_k] \quad (3.8)$$

§ 4. Решение уравнения. Из постановки задачи следует, что оптимальная граница определяется с точностью до подобия и образует семейство, параметрически зависящее от масштабного множителя D . Ниже приводятся результаты расчетов для трех практически важных случаев.

4.1. Одиночная полость на оси Z . В [6] на основе решения прямой задачи для внешности эллипсоида вращения [3] показано, что он является

оптимальным при определенном отношении осей, зависящем от параметров нагрузки через решение трансцендентного уравнения, существующее только при дополнительном ограничении

$$2q_1 + p > q_2 \quad (4.1)$$

Приняв для определенности $q_2 \geq q_1$, перейдем в (3.8) к эллиптическим координатам вытянутого по оси Z сфероида [3].

$$r^2 = D(s^2 - 1)(1 - \mu^2), \quad z = Ds\mu; \quad 1 \leq s \leq \infty, \quad |\mu| \leq 1$$

и переменной интегрирования μ , считая контур γ эллипсом $s = s_0$,

$$z_0 = \alpha \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{(z_0^2 - 2z_0 s_0 \mu + s_0^2 - \mu^2 + 1)^{1/2}} \quad (4.2)$$

В силу симметрии $C_1 = 0$. Вычисляя в (4.2) интеграл [8], получим для параметра s_0 уравнение

$$(1 - s_0^2)(1/2 \ln(s_0 + 1)/(s_0 - 1) - 1) = \alpha$$

эквивалентное выведенному в [6].

Если $p = 0$, то при $q_1 = q_2$ оптимальной является сфера, при $2q_1 = q_2$ полость вырождается в «иглу» вдоль оси Z .

Аналогично рассматривается и сжатый эллипсоид ($q_1 > q_2$). При $q_2 = 0$ он вырождается в круговую щель в плоскости $z = 0$. Для сравнения напомним, что и в плоском случае оптимальным является эллипс [4], но зависимость между отношением его осей и отношением нагрузок — линейная.

4.2. Две полости на оси Z . С учетом антисимметрии относительно оси (3.8) преобразуется к виду

$$z_0 - \alpha \int_{a_1}^{b_1} |r| r'(z) [R(z, r, z_0) - R(z, r, -z_0)] dz = C_1 \quad (4.3)$$

$$R(z, r, z_0) = [(z - z_0)^2 + r^2]^{-1/2}, \quad a_1 \leq z_0 \leq b_1$$

где $r(z) > 0$ — верхняя половина левого контура, $a_1 < b_1 < 0$, $a_2 = -b_1$, $b_2 = -a_1$, $C_2 = -C_1$.

Поскольку правая часть уравнения (4.3) — постоянная, то оно эквивалентно вариационной задаче на минимум неаддитивного функционала J — вариации функции $f(z_0) = I(z_0) - z_0$ на отрезке $[a_1, b_1]$, $I(z_0)$ — интеграл в (4.3).

Для численного решения этой задачи на ЭВМ применялся метод локальных вариаций [11] с постоянным шагом $h = (b_1 - a_1)/n$, $n = 10 \div 100$. При замене $I(z_0)$ конечной суммой приближенное выражение для J имеет вид

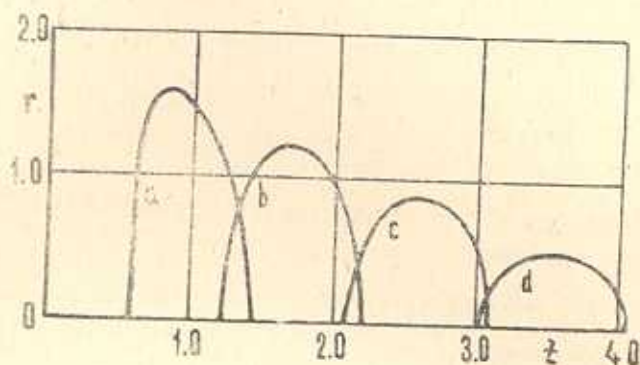
$$J \approx \sum_{i=1}^{n-1} \left| \sum_{j=0}^n I_j(z_0^{i+1}) - I_j(z_0^i) - h \right|$$

$$z_0^i = a_1 + hi - h/2$$

I_j — интеграл, взятый по отрезку $[a_1 + hj, a_1 + hj + h]$.

В расчетах принималось, что $a_1 = b_1 - 1$, и величина a_1 являлась независимым геометрическим параметром задачи. Начальным приближением служила окружность: $r^2(z) + (z - b_1 - 0,5)^2 = 0,25$. При данном h вариация δ функции $r(z)$ последовательно уменьшалась до достижения заданной точности. I_j вычислялись по квадратурным формулам с аппроксимацией $r(z)$ кубическими сплайнами.

На фиг. 1 представлены сечения равнопрочных контуров при $q_1 = q_2 = 0$, $p = 1$ для $|a_1| = 0,5$ (a); 1,0 (b); 2,0 (c); 3,0 (d).



Фиг. 1.

4.3. Тороидальная полость. Уравнение (3.4) относительно функции $z = z(r) \leq 0$ сводится к промежутку $[a, b]$ на оси r ; $b > a > 0$:

$$\int_a^b r [R_1(z, r, z_0, r_0) - R_1(z, r, -z_0, r_0)] dr = z_0 \quad (4.4)$$

$$R_1(z, r, z_0, r_0) = \frac{K(m)}{[(z - z_0)^2 + (|r| + |r_0|)^2]^{1/2}}$$

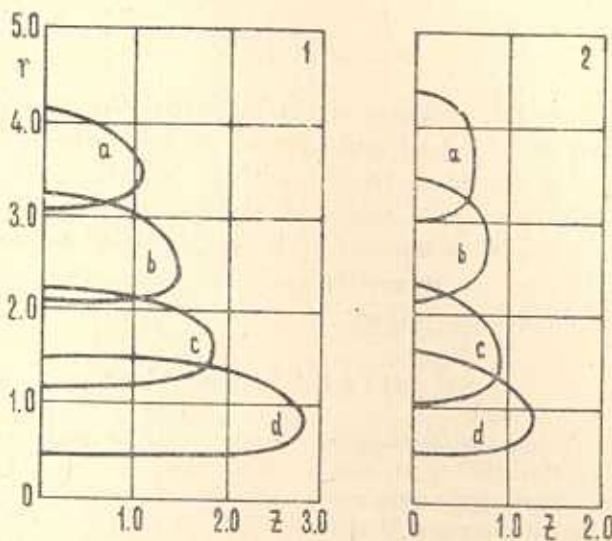
Здесь a, b — точки пересечения оси r с контуром γ в верхней полу-плоскости: из условия антисимметрии $C_1 = 0$.

Для решения (4.4) использовался метод последовательных приближений. Как и в п. 4.2, принято $b - a = 1$, a — параметр. Начальным приближением служила окружность. Интеграл в (4.4) вычислялся поточечно с помощью квадратурных формул высокого порядка и интерполяции $z(r)$ кубическими сплайнами.

На фиг. 2 представлены оптимальные контуры для $q_1/q_2 = 1$ (1) и 3 (2). Кривым $a-d$ соответствуют значения параметра $a = 0,5, 1, 2, 3$.

Заключение. Предложенный метод пригоден для определения оптимальной формы включений в однородных осесимметричных полях и другой физической природы. Так, условие (2.4) отвечает обтеканию системы тел идеальной жидкостью [10], а (2.1) — граничному условию на поверхности проводников в однородном электростатическом поле [12]. Уравнения (2.3) в обоих случаях также выполняются.

Анализ численных результатов показывает, что как и в плоском случае [4, 5], взаимодействие оптимальных контуров проявляется в выпрямлении сближенных частей границы. Картина усложняется для тороидальной полости, не имеющей двумерного аналога.



Фиг. 2.

Автор благодарит К. А. Лурье за полезное обсуждение результатов работы.

ՇՐՏԻՄԱԿ ԿՈՌՈՉՆԵՐ ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՈՒՄԵՏՏԵԿՈՒԹՅԱՆ
ԱՌԱՉԳՄԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵԶ

Ս. Բ. ՎԻՊԵՐԳԱՆԻԶ

Ա մ ֆ ո փ ո լ մ

Առանցքային սիմետրիկության տարրերակում դիտարկվում է բաղձաշերտ առաձգական տարածության օպտիմալ եզրի փնտրման խնդիրը: Հեղինակի կողմից նախկինում ստացված օպտիմալության անհրաժեշտ կորային պայմանների հիման վրա կառուցված է համեմատաբար պարզ կառուցվածքի կորիզով ոչ գծային ինտեգրալ հավասարում: Բերված է թվային օրինակ, որը բացահայտում է օպտիմալ եզրի տեսքի կախվածությունը տիրույթի երկրաչափությունից և բեռերի պարամետրերից:

OPTIMAL CAVITIES IN ELASTIC SPACE WITH AXIAL SYMMETRY

S. B. VIGDERGAUZ

Summary

The axi-symmetric version of three-dimensional problem to determine the optimal boundary of multi-bounded elastic space is considered. Based on previously obtained, by the author, necessary boundary conditions of optimality, a one-dimensional nonlinear integral equation with relatively simple kernel is derived. The examples of numerical solution showing the influence of geometric and load parameters on the optimal shape of the boundary are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В. Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 920—925.
2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 963—979.
5. Вигдергауз С. Б. Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 3, с. 566—569.
6. Вигдергауз С. Б. Условия оптимальности в осесимметричных задачах теории упругости.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 2.
7. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 431 с.
8. Двойт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1969. 228 с.
9. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978. 464 с.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1972. 308 с.
11. Черноушко Ф. А., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления: Численные методы. М.: Наука, 1973. 238 с.
12. Поля Г., Сетё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.

Ленинградское производственное
электромашиностроительное
объединение «Электросила»
им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию
22. II. 1982