ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 3, 1984 Механика

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЧНОСТИ СЛОИСТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ

АЗАТЯН А. Д., АВЕТИСЯН Д. К.

В настоящее время значительное развитие получили вопросы нестационарного взаимодействия акустических волн давления с тонкостенными элементами конструкций. Исследования по этим вопросам в большинстве случаев касаются изотропных пластин и оболочек. В то же время в связи со все более широким применением конструкций из композиционных материалов (КМ) становится важным исследование взаимодействия ударных волн с конструкциями из КМ.

В [1] рассмотрена оптимизационная задача взаимодействия экспоненциально затухающей волны давления со слоистой ортотропной пластинкой при ограничении на жесткость.

В настоящей работе рассматривается оптимизационная задача нестационарного взаимодействия ортотропной пластинки с плоской акустической волной давления при ограничении на прочность, которая приводится к задаче нелинейного программирования, решаемой методом последовательной безусловной минимизации (МПБМ) в сочетании с методом Хука-Дживса для безусловной минимизации [2].

1. Рассматривается поведение прямоугольной ортотропной шарнирно опертой пластинки, заключенной в безграничном жестком плоском экране, под действием акустической ударной волны, фронт которой параллелен поверхности пластинки. Пластинка изготовлена из $(2r+1)$ числа слоев, симметрично расположенных относительно срединной плоскости. Акустическая среда, примыкающая к пластинке, характеризуется плотностью ρ и скоростью звука c. Падающая волна, взаимодействуя с пластинкой, порождает отраженную, а также излученную волну, обусловленную деформацией пластинки. Если ограничиться рассмотрением слабых ударных волн, то для описания распространяющихся в акустической среде возмущений можно пользоваться соотношениями акустической модели. Тогда искомая нагрузка, действующая на пластинку, определяется формулой

$$P = -\rho\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0} \qquad (1.1)$$

где φ_0 — потенциал падающей волны, а φ — потенциал отраженных и излученных волн. Функция φ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где Δ — оператор Лапласа.

До начала работы источника акустическая среда находится в состоянии покоя и начальные условия принимаются однородными

$$\varphi\Big|_{t=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{1.3}$$

На поверхности пластинки должно выполняться граничное условие

$$\frac{\partial(\varphi_0+\varphi)}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{\partial w}{\partial t} \tag{1.4}$$

Условие затухания потенциала φ на бесконечности запишется в виде

$$\varphi \to 0 \ \text{при} \ z \to \infty \tag{1.5}$$

Для описания изгиба пластинки воспользуемся уравнением

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P \tag{1.6}$$

где

$$D_{ik} = \frac{2}{3}\left[B_{ik}^{(r+1)}h_{r+1}^3 + \sum_{j=1}^{r} B_{ik}^{(j)}\left(h_j^3 - h_{j+1}^3\right)\right]$$

$$m_0 = \frac{2}{g}\left[\gamma_{r+1}h_{r+1} + \sum_{j=1}^{r}\gamma_j\left(h_j - h_{j+1}\right)\right]$$

Здесь w — прогиб пластинки, $B_{ik}^{(j)}$ — коэффициенты упругости, γ_j — удельный вес j-го слоя, h_j — расстояние j-го слоя от срединной плоскости пластинки, которая одновременно является срединной плоскостью среднего $(r+1)$-го слоя [3].

Уравнение (1.6) необходимо дополнить граничными условиями, зависящими от характера крепления пластинки. В случае шарнирного закрепления краев пластинки функция прогиба w и потенциалы φ_0, φ представляются в виде

$$\begin{aligned}
w(t, x, y) &= \sum_m \sum_n w_{mn}(t)\sin\lambda_m x\sin\mu_n y \\
\varphi_0(t, x, y, z) &= \sum_m \sum_n \varphi_{0mn}(t, z)\sin\lambda_m x\sin\mu_n y \\
\varphi(t, x, y, z) &= \sum_m \sum_n \varphi_{mn}(t, z)\sin\lambda_m x\sin\mu_n y
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b}$$

Предположим, что в акустической среде в направлении оси z движется плоская экспоненциально затухающая волна давления, которая в момент $t=0$ достигает поверхности пластинки. Потенциал падающей волны выбирается в виде

$$\varphi_0 = \frac{P_0 a}{\rho c \alpha} \exp\left(-\alpha\left(\tau + \bar{z}\right)\right) H\left(\tau + \bar{z}\right) \tag{1.8}$$

где $\tau = \frac{ct}{a}$, $\bar{z} = \frac{z}{a}$, P_0 — давление на фронте волны, α — постоянная, определяющая скорость падения давления за фронтом волны, H — функция Хевисайда.

2. Волновое уравнение (1.2) решается применением интегрального преобразования Лапласа по времени. При этом трансформируется также граничное условие (1.4) на поверхности пластинки. В области изображений волновой потенциал описывается уравнением

$$\Delta\varphi^* = \frac{s^2}{c^2}\varphi^* \tag{2.1}$$

а условие (1.4) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_0^* + \varphi^*\right)_{z=0} = -s w^* \tag{2.2}$$

В (2.1) и (2.2) звездочкой обозначены преобразованные по Лапласу функции, s — параметр преобразования. Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (1.5), (2.2), записывается следующим образом:

$$\varphi^* = \sum_m \sum_n \frac{\exp\left(-\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{c^2}}\, z\right)}{\sqrt{k^2 + \frac{s^2}{c^2}}} \left(s w_{mn}^* + \frac{\partial \varphi_{0mn}^*}{\partial z}\right) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \tag{2.3}$$

где $k^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2$.

При переходе к оригиналам с помощью теоремы о свертке функций искомая величина P, согласно (1.1), получается в виде

$$P = -\rho \sum_m \sum_n \left\{ \frac{\partial \varphi_{0mn}}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{\partial w_{mn}(t)}{\partial t} J_0[k_1(t-\tau_1)]\, d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + c\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{\partial \varphi_{0mn}(\tau_1, z)}{\partial z}\bigg|_{z=0} J_0[k_1(t-\tau_1)]\, d\tau_1 \right\} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \tag{2.4}$$

Здесь J_0 — бесселева функция первого рода, $k_1^2 = k^2 c^2$. На основе гипотезы плоского отражения [4]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=0}$$

соотношение (2.4) упрощается и представляется в виде

$$P = -\rho\sum_m\sum_n\left(2\frac{\partial\varphi_{0mn}}{\partial t} + c\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{z=0}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y \tag{2.5}$$

Подставляя (1.7) в уравнение движения пластинки (1.6) и учитывая (2.5), получим

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + 2\beta\frac{dw_{mn}}{dt} + \omega_0^2 w_{mn} = -2\frac{\rho}{m_0}\frac{\partial\varphi_{0mn}}{\partial t}\Big|_{z=0} \tag{2.6}$$

Здесь

$$\beta = \frac{c\rho}{m_0},\quad \omega_0^2 = \frac{\pi^4}{m_0}\left[\frac{D_{11}m^4}{a^4} + \frac{2(D_{12}+2D_{66})}{a^2b^2} + \frac{D_{22}n^4}{b^4}\right]$$

Решение уравнения (2.6) при $\beta^2-\omega_0^2>0$

$$w_{mn} = \frac{32P_0}{m_0\pi^2}\,\frac{\exp(-\beta t)\,(\omega_{mn}^{(1)}\operatorname{ch}\omega_{mn}^{(1)}t - \gamma\operatorname{sh}\omega_{mn}^{(1)}t) - \omega_{mn}^{(1)}\exp\left(-\frac{\alpha ct}{a}\right)}{mn\omega_{mn}^{(1)}\left[(\omega_{mn}^{(1)})^2-\gamma^2\right]}$$

где $\omega_{mn}^{(1)} = (\beta^2-\omega_0^2)^{1/2}$, при $\beta^2=\omega_0^2$

$$w_{mn} = \frac{32P_0}{m_0\pi^2\gamma^2}\exp\left(-\frac{\alpha ct}{a}\right)\left[\exp(\gamma t)(\gamma t-1)+1\right] \tag{2.7}$$

при $\beta^2-\omega_0^2<0$

$$w_{mn} = \frac{32P_0}{m_0\pi^2}\,\frac{\exp(-\beta t)\,(\gamma\sin\omega_{mn}^{(2)}t - \omega_{mn}^{(2)}\cos\omega_{mn}^{(2)}t) + \omega_{mn}^{(2)}\exp\left(-\frac{\alpha ct}{a}\right)}{mn\omega_{mn}^{(2)}\left[(\omega_{mn}^{(2)})^2+\gamma^2\right]}$$

где $\omega_{mn}^{(2)} = i\omega_{mn}^{(1)}$. Здесь $\gamma = \frac{\alpha c}{a} - \beta$.

Через w выражаются все расчетные величины.

Пусть слои пластинки изготовлены из элементарных слоев ортотропного КМ, уложенных поочередно под углами $\pm\psi_s$ к одному из главных геометрических направлений пластинки, s — номер слоя. Напряжения в главных геометрических направлениях пластинки имеют вид [5]

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^s &= -z\left(B_{11}^s\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}^s\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16}^s\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\\
\sigma_{22}^s &= -z\left(B_{12}^s\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22}^s\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{26}^s\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\\
\tau_{12}^s &= -z\left(B_{16}^s\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{26}^s\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{66}^s\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, r+1)$$

Как следует из (2.8), напряжения вычисляются по формулам для более общего случая, чем ортотропия.

Дело в том, что конструкции, образованные путем симметричной укладки элементарных слоев ортотропного КМ, в целом, можно считать ортотропными, хотя каждый элементарный слой является анизотропным (анизотропия появляется вследствие укладки элементарных слоев КМ под углами $\pm\psi_s$ к главным геометрическим направлениям пластинки). Это всегда надо учитывать при вычислении напряжений [6].

Напряжения σ_1^s, σ_2^s, τ_{12}^s в элементарных слоях КМ определяются по известным формулам поворота [5]

$$
\begin{aligned}
\sigma_1^s &= \sigma_{11}^s \cos^2\psi_s + \sigma_{22}^s \sin^2\psi_s + \tau_{12}^s \sin 2\psi_s \\
\sigma_2^s &= \sigma_{11}^s \sin^2\psi_s + \sigma_{22}^s \cos^2\psi_s - \tau_{12}^s \sin 2\psi_s \\
\tau_{12}^s &= -\frac{\sigma_{11}^s - \sigma_{22}^s}{2} \sin 2\psi_s + \tau_{12}^s \cos 2\psi_s
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

$$(s = 1, 2, \ldots, r+1)$$

Условия прочности для каждого слоя пластинки берутся в виде [7]

$$\left(\frac{\sigma_1^s}{\sigma_{B1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^s}{\sigma_{B2}}\right)^2 - \frac{\sigma_1^s \sigma_2^s}{\sigma_{B1}^2} + \left(\frac{\tau_{12}^s}{\tau_{B0}}\right)^2 \leqslant 1 \tag{2.10}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, r+1)$$

где σ_{B1}, σ_{B2}, τ_{B0} — константы, которые выражаются через прочностные характеристики материала, соответствующие простейшим деформациям (растяжение и сдвиг).

3. Далее рассматривается оптимизационная задача отыскания углов $\pm\psi_s$ укладки элементарных слоев КМ в слоях пластинки и распределения безразмерных толщин слоев $\overline{\alpha}_s = h_s/h$, которым соответствует наибольшая несущая способность пластинки заданного веса при ограничении на прочность. Подставляя (2.9) в (2.10), с учетом (2.7), (2.8) приходим к неравенству вида

$$P_0^2 F(t, x, y, \psi_s, \overline{\alpha}_s) \leqslant 1 \tag{3.1}$$

где функция F не выписана в явном виде из-за громоздкости. Как следует из (3.1), данная оптимизационная задача эквивалентна следующей: найти

$$F^* = \min_{\psi_s, \overline{\alpha}_s} \max_{t, x, y} F(t, x, y, \psi_s, \overline{\alpha}_s)$$

при

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad \sum_{s=1}^{r} \overline{\alpha}_s \leqslant 0{,}5, \quad \overline{\alpha}_s \geqslant 0$$

$$0 \leqslant \psi_s \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad s = 1, 2, \ldots, r+1, \ t \geqslant 0$$

Нетрудно заметить, что в конечном счете функция F выражается через функцию прогиба $w(t, x, y)$. С учетом выражения (2.7) для коэффициентов w_{mn} функции прогиба w легко видеть, что при $t \to \infty$ $F \to 0$. Аналитическое исследование $F(t, x, y, \psi_s, \overline{\alpha}_s)$ как функции от t, x, y при фиксированных ψ_s, $\overline{\alpha}_s$ с целью определения экстремумов сложно ввиду необходимости решения трансцендентных уравнений. Численное же исследование показывает, что с возрастанием t, начиная с точки $t = 0$, в которой $F = 0$, при фиксированных x, y функция F монотонно возрастает, достигает максимума, и затем убывает, претерпевая осцилляции. Первый максимум является глобальным, поэтому, учитывая гладкость F как функции от t, в качестве значения t, доставляющего максимум, берется то, при котором F'_t впервые меняет знак. При фиксированном t функция $F(t, x, y, \psi_s, \overline{\alpha}_s)$, рассматриваемая как функция от x, y, достигает своего максимума в точке $x = y = \frac{l}{2}$, то есть в центре пластинки.

Нахождение функции F^* представляет собой задачу нелинейного программирования. Для решения этой задачи применяется метод последовательной безусловной минимизации (МПБМ) в сочетании с методом Хука-Дживса для безусловной минимизации [2].

Для иллюстрации проведены численные исследования для квадратной ($a = b = l$) пластинки, изготовленной из элементарных слоев материала СВАМ 5:1

$$\left(\rho_{\text{СВАМ}} = 1{,}85 \cdot 10^3 \frac{\text{кГ}}{\text{м}^3}, \quad E_1 = 29{,}89 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad E_2 = 18{,}424 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right.$$

$$\left. G_{12} = 4{,}802 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad \nu_2 = 0{,}12\right),$$

и боропластика [8]

$$\left(\rho_{\text{бор}} = 1{,}95 \cdot 10^3 \frac{\text{кГ}}{\text{м}^3}, \quad E_1 = 194{,}23 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad E_2 = 19{,}404 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right.$$

$$\left. G_{12} = 6{,}45 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad \nu_2 = 0{,}0297\right)$$

уложенных под углами $\pm \psi_s$ к одному из главных геометрических направлений пластинки. Рассматривались следующие варианты геометрических размеров пластинки: $\lambda = h/l = 0{,}005$; $0{,}01$; $0{,}02$; $0{,}05$. Профиль падающей волны выбирался в виде (1.8) при $\alpha = 0{,}1$; 3. В качестве внешней среды выбран воздух с акустическими параметрами $\rho = 1{,}225$ кг/м³, $c = 340 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Некоторые из полученных результатов расчета представлены в виде таблиц и графиков на фиг. 1—4.

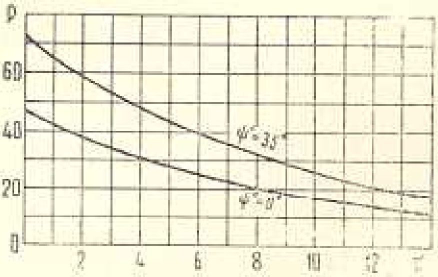
В табл. 1—2 приведены наибольшие $\overline{P}_0'$ и наименьшие $\overline{P}_0''$ значения безразмерного давления $\overline{P}_0 = P_0/\rho_0 c^2$ на фронте падающей волны и соответствующие им углы укладки ψ', ψ'' элементарных слоев.

Таблица 1

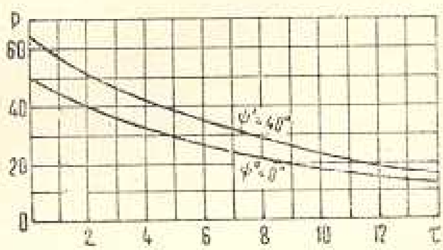
σ	0,1				3			
λ	0,005	0,01	0,02	0,05	0,005	0,01	0,02	0,05
ψ' (град)	45	45	40; 50	40; 50	45	45	30; 60	40; 50
$\overline{P}_0' \cdot 10^4$	0,57	1,56	5,54	31,76	5,01	9,12	20,70	76,30
ψ'' (град)	90	90	90	90	35; 55	25; 65	20; 70	5; 85
$\overline{P}_0'' \cdot 10^4$	0,50	1,28	4,31	24,85	4,57	8,55	19,10	60,40

Таблица 2

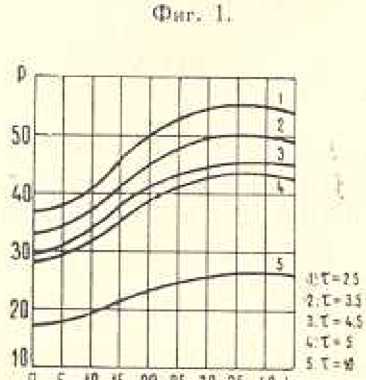
σ	0,1				3			
λ	0,005	0,01	0,02	0,05	0,005	0,01	0,02	0,05
ψ' (град)	35; 55	35; 55	45	35; 55	40; 50	40; 50	40; 50	35; 55
$\overline{P}_0' \cdot 10^4$	0,51	1,64	6,87	35,96	3,97	7,11	16,60	65,30
ψ'' (град)	90	90	90	90	5; 85	5; 85	5; 85	90
$\overline{P}_0'' \cdot 10^4$	0,33	1,04	4,23	23,21	2,02	3,68	8,98	35,40



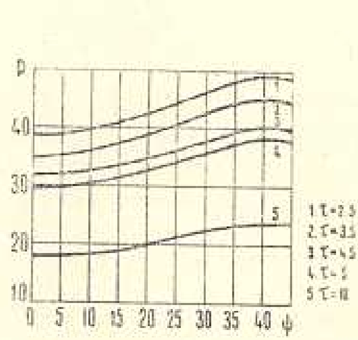
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг 3.



Фиг. 4.

Здесь ρ_0 — плотность материала пластинки. В табл. 1 приведены числовые результаты для пластинки из материала СВАМ 5:1, а в табл. 2—для пластинки из боропластика. Как показывают расчеты, благодаря оптимальному расположению элементарных слоев КМ в пластинке, можно добиться значительного увеличения ее несущей способности, причем для пластинки из боропластика можно добиться увеличения несущей способности в 1,4—1,9 раз.

На фиг. 1—2 приведены графики изменения давления P, определяемого по формуле (2.5), на поверхности пластинки в зависимости от времени для углов ψ' и ψ''. Давление P отнесено к величине $10^4 \cdot \rho_0 c^2$. На фиг. 1 показан характер изменения давления P во времени для пластинки, изготовленной из боропластика, а на фиг. 2 — для пластинки из материала СВАМ 5:1.

Фиг. 3—4 иллюстрируют характер изменения давления на поверхности пластинки в зависимости от углов укладки в различные моменты времени. Фиг. 3 соответствует случаю пластинки из боропластика, фиг. 4 — пластинке из материала СВАМ 5:1. Приведенные графики соответствуют значениям $\lambda = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}1$.

ՃՆՇՄԱՆ ԱԿՈՒՍՏԻԿ ԱԼԻՔԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ՕՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱՆ

Լ. Դ. ԱԶԱՏՅԱՆ, Ջ. Կ. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է օրթոտրոպ սալի և ճնշման հարթ ակուստիկ ալիքի ոչ ստացիոնար փոխազդեցության օպտիմիզացիոն խնդիրը, սալի ամրության սահմանափակման դեպքում։ Այս խնդիրը բերվում է ոչ գծային ծրագրավորման խնդրին, որը լուծվում է հաջորդական ոչ պայմանական մինիմիզացիայի մեթոդով, զուգակցելով այն Հուկ-Ջիվսի ոչ պայմանական մինիմիզացիայի մեթոդի հետ։ Հարթ անդրադարձման հիպոթեզի կիրառումով քառակուսի միաշերտ սալի համար ստացված է նրա վրա ազդող հիդրոդինամիկ ճնշման կախվածությունը ժամանակից և կոմպոզիցիոն նյութի ժապավենի փաթաթման անկյունից։

OPTIMIZATION OF STRENGTH OF LAMINATED ORTHOTHROPIC PLATE EFFECTED BY ACOUSTIC WAVE PRESSURE

L. D. AZATIAN, J. K. AVETISIAN

Summary

This article deals with the optimization problem of interaction of the orthothropic plate and plane acoustic wave pressure with strength limitation.

The given problem is brought to the task of non-linear programming which is solved by the method of successive absolute minimizing in combination with the method of Hooke-Dzhievs. The dependence of hydrodynamic pressure on time and angles of placing the glass-fibre-reinforced plastic tape in the plate layers is derived by using the hypothesis of plane reflection.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азатян Л. Д., Гнуни В. Ц., Сейранян С. П.* Оптимизационная задача динамического взаимодействия слоистой ортотропной пластины с акустической ударной волной.— Уч. записки ЕГУ, 1980, № 1.
2. *Фиакко, Мак-Кормик.* Нелинейное программирование, методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972.
3. *Амбарцумян С. А.* Расчет слоистых оболочек вращения.— Докл. АН Арм.ССР, 1949, т. 11, № 2.
4. *Mindlin R. D., Bleich H. H.* Response of an elastic cylindrical shell to a transverse step shoce wave.—Appl. Mech., 1953, vol. 20, No. 2.
5. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
6. *Азатян Л. Д.* К вопросу учета анизотропии и несимметричности расположения элементарных слоев в однородном ортотропном пакете пластин и оболочек из композиционных материалов. Уч. записки ЕГУ, 1981, № 2.
7. *Бажанов В. Л., Гольденблат И. И.* и др. Сопротивление стеклопластиков. М.: Машгиз, 1968.
8. *Robert M. Jones.* Mechanics of composite materials. Scripta book company W.D.C. 1974.

Институт механики АН Армянской ССР
Ленинаканский филиал Ереванского политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию 6. X. 1982