ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVII, № 3, 1984 Механика

К ВОПРОСУ О МАСШТАБНОМ ЭФФЕКТЕ В АСИММЕТРИЧНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

ПЕТРОСЯН Л. Г.

При теоретическом исследовании механики жидкостей с внутренней микроструктурой широкое распространение получил метод, в основе которого лежит теория жидкостей с несимметричным тензором напряжений — асимметричная гидродинамика [1—5 и др.]*. Однако, в литературе имеется очень мало сведений о величинах материальных постоянных несимметричных жидкостей, фигурирующих в определяющих уравнениях для тензоров силовых и моментных напряжений. В работе [6] предложен метод экспериментального определения коэффициентов, характеризующих микроструктуру жидкости, основанный на результатах измерения удельных объемных расходов исследуемой жидкости при ее прокачивании через два капилляра разного поперечного сечения.

Следуя той же методике, нетрудно полученные результаты, в частности, значения динамической ньютоновской вязкости сопоставить с известными данными о сдвиговой вязкости жидкости и, как вывод, решить вопрос о граничных условиях для вектора $\vec{\omega}$, характеризующего вращение частиц на стенке.

Задача экспериментального определения параметров, характеризующих микроструктуру, а также коэффициентов вязкости, позволяющих описать течения несимметричных жидкостей в капиллярах, является весьма актуальной.

Рассмотрим установившееся ламинарное течение несжимаемой жидкости по цилиндрической трубе круглого сечения. Выберем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с осью z, направленной вдоль оси трубы и будем предполагать трубу бесконечно длинной, а поток — направленным вдоль оси трубы.

Для компонентов поступательной и угловой скоростей имеем

$$\begin{aligned} &v_r = v_\varphi = 0, \quad v_z = w(r) \\ &\omega_r = \omega_z = 0, \quad \omega_\varphi = \omega(r) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Система дифференциальных уравнений для компонентов векторов $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ в данном случае имеет вид [9]

* Первая корректная теория с внутренним вращательным взаимодействием частиц была дана в [7], о чем было отмечено в работе [8].

$$(\mu+\mu_r)\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)+2\mu_r\frac{d}{dr}(r\omega)=r\frac{dp}{dz} \tag{1.2}$$

$$(c_a'+c_d')\frac{d}{dr}\left(\frac{d\omega}{dr}+\frac{\omega}{r}\right)-2\mu_r\frac{dw}{dr}-4\mu_r\omega=0 \tag{1.3}$$

причем $dp/dz=\mathrm{const}$, а уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно.

В качестве граничных условий используем

$$\vec{v}(r_0)=0,\quad \vec{\omega}(r_0)=\frac{\alpha}{2}\nabla\times\vec{v} \tag{1.4}$$

где $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Здесь α — параметр граничных условий, который подлежит определению.

Решая систему уравнений (1.2), (1.3) при граничных условиях (1.4), получим выражение для профиля скорости (при $\alpha=0$)

$$w^*=\frac{w}{w_0}=1-r^{*2}+2N^2\frac{1}{\lambda}\frac{I_0(\lambda r^*)-I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} \tag{1.5}$$

где

$$r^*=r/r_0,\quad N=[\mu_r/(\mu+\mu_r)]^{1/2},\quad w_0=-\frac{r_0^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}$$

$$\lambda=kr_0=\left(\frac{4\mu}{\mu_r+\mu}\frac{\mu_r}{c_a'+c_d'}\right)^{1/2}r_0,\quad k=\frac{N}{l},\quad l=\left(\frac{c_a'+c_d'}{4\mu}\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

Здесь $I_0(\lambda)$ и $I_1(\lambda)$ — соответственно модифицированные цилиндрические (бесселевы) функции нулевого и первого порядка первого рода, N — безразмерный параметр связи, l — характерная материальная длина вещества, w_0 — максимальная по сечению скорость на оси трубы в классическом течении Пуазейля, μ, μ_r и $(c_a'+c_d')$ — физические константы, характеризующие изотропные свойства структурной жидкости, в частности, μ — динамическая ньютоновская вязкость, μ_r — динамическая вращательная вязкость, $(c_a'+c_d')$ — суммы коэффициентов моментных вязкостей.

Из (1.5) найдем объемный расход структурной жидкости*

$$Q^*=\frac{Q}{Q_0}=1-\frac{8N^2}{\lambda^2}\left[\frac{\lambda}{2}\frac{I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)}-1\right] \tag{1.7}$$

где

$$Q_0=-\frac{\pi r_0^4}{8\mu}\frac{dp}{dz}$$

* Задача о течении по цилиндрической трубе круглого сечения с более широкой вариацией граничных условий рассмотрена в работе [2].

Здесь Q_0 — расход жидкости в классическом течении Гагена—Пуазейля. Отметим, что с увеличением r_0 растет λ, и в достаточно широкой трубе радиуса $R_0 \gg r_0$ течение несимметричной жидкости описывается формулой Гагена—Пуазейля. При этом (1.7) переходит в выражение

$$Q = -\frac{\pi r_0^4}{8\mu}\frac{dp}{dz} = Q_0$$

Прокачивая исследуемую несимметричную жидкость через два капилляра с внутренними радиусами r_0 и ar_0 $(0 < a < 1)$, получим

$$Q_1 = Q_{01}\left\{1 - \frac{8N^2}{\lambda^2}\left[\frac{\lambda}{2}\frac{I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} - 1\right]\right\}$$

$$Q_2 = Q_{02}\left\{1 - \frac{8N^2}{a^2\lambda^2}\left[\frac{a\lambda}{2}\frac{I_0(a\lambda)}{I_1(a\lambda)} - 1\right]\right\}$$

Отсюда [6]

$$M[2I_1(a\lambda) - a\lambda I_0(a\lambda)]\, I_1(\lambda) = [2I_1(\lambda) - \lambda I_0(\lambda)]\, I_1(a\lambda) \tag{1.8}$$

где

$$M = \frac{Q_{02}}{a^2 Q_{01}}\frac{Q_1 - Q_{01}}{Q_2 - Q_{02}} \tag{1.9}$$

Значения M получают из экспериментальных данных. Для уменьшения погрешности экспериментального определения M необходимо выбирать капилляры с внутренними диаметрами, соответствующими по возможности меньшей величине a [6].

Из (1.8) определяется λ.

Величина параметра N^2 определяется из выражения (1.7)

$$N^2 = \frac{Q - Q_0}{4Q_0}\frac{\lambda^2 I_1(\lambda)}{2I_1(\lambda) - \lambda I_0(\lambda)}$$

которое вместе с найденным ранее λ дает полное количественное описание стационарного течения несимметричной жидкости в капиллярах любого диаметра.

Заметим, что если в дифференциальных уравнениях поля микрополярной теории жидкостей, приведенных в работе [4], заменить материальные постоянные $\varkappa_v$, μ_v, β_v, γ_v, ε_v, соответственно, постоянными $2\mu_r$, $\mu - \mu_r$, $c_d' - c_a'$, $c_d' + c_a'$, c_0', то эти уравнения полностью совпадут с уравнениями, полученными другими авторами [1—5,10] (в работе [2] авторы не рассматривали спиновую инерцию).

Такая замена целесообразна и обусловлена тем, что из трех вязкостных коэффициентов (μ, μ_r и $\gamma = c_a' + c_d'$), фигурирующих в задаче Пуазейля для несимметричных жидкостей, один — μ известен и является сдвиговой ньютоновской вязкостью. Тогда необходимо дополнительно определить лишь вращательную вязкость μ_r и моментную вязкость (суммарная) $\gamma = c_a' + c_d'$.

Отметим, что такая замена приводит к следующему виду классического условия Стокса: $3\lambda + 2\mu = 0$ для несимметричных жидкостей, тогда как в работе [4] оно имеет вид $3\lambda_v + 2\mu_v + \varkappa_v = 0$, в чем у автора вышеуказанной работы [4] нет большой уверенности. Здесь $\lambda_v = \lambda$ есть второй коэффициент вязкости.

В работе [11] экспериментально исследовалось влияние поверхностных сил на свойства тонких слоев жидкости. В частности, приводятся результаты исследований вязкости μ в кварцевых капиллярах радиусами r_0 от 10^{-6} м до $3 \cdot 10^{-8}$ м (то есть $r_0 \leq 10^{-6}$ м) при температуре около 20° С. Было установлено, что течение полярных жидкостей в микрокапиллярах внутреннего радиуса $r_0 \leq 10^{-6}$ м не описывается формулой Гагена-Пуазейля, причем с уменьшением радиуса капилляра отклонения от него сильно возрастают.

Так, например, используя данные работы [11] о течении воды в капиллярах внутренних радиусов $r_{01} = 3 \cdot 10^{-7}$ м и $r_{02} = a r_{01} = 5 \cdot 10^{-8}$ м ($a = 1/6$), в работе [6] приводятся найденные с помощью уравнения (1.8) значения параметров: $\lambda = 21{,}2$ и $N^2 = 0{,}42$. Более удобным для практического использования является параметр $k = \lambda / r_{01} = 70{,}3 \cdot 10^6$ м$^{-1}$.*

Как было отмечено выше, в этих расчетах приняты граничные условия полного прилипания ($\alpha = 0$). Тогда принимая для сдвиговой вязкости воды при температуре 20° С значение [12] $\mu = 1{,}0042 \cdot 10^{-3}$ кг·м$^{-1}$ с$^{-1}$, получим следующие значения для вращательной вязкости $\mu_r = 0{,}7271 \times \times 10^{-3}$ кг·м$^{-1}$ с$^{-1}$ и для моментной вязкости (суммарная) $\gamma = c_0' + c_d' = 3{,}4 \cdot 10^{-19}$ кг·м·с$^{-1}$. На основании этих данных для характерной материальной длины воды получим $l = 9{,}2 \cdot 10^{-9}$ м.

Важным безразмерным параметром является L, представляющий собой отношение радиуса трубы r_0 к характерной материальной длине l, то есть

$$L = \frac{r_0}{l}$$

Это число характеризует взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости.

Можно ожидать, что эффект несимметричности жидкости будет значительным, когда либо l велико (что соответствует большому размеру подструктуры вещества), либо радиус трубы r_0 мал.

Большое значение L означает большой радиус трубы или малую материальную длину l. В этом случае влияние микроструктуры жидкости незначительно. Здесь, по-видимому, представляет интерес второй случай, когда радиус трубы r_0 мал и сравним с l.

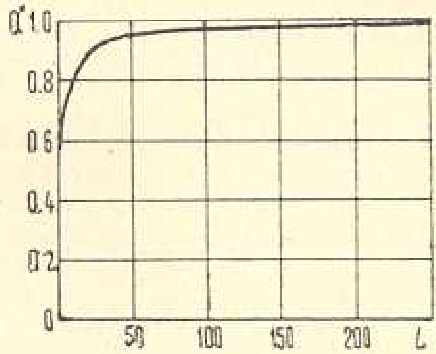
---

* С большой точностью такие значения для параметров N^2 и k получаются и при выборе других пар внутренних радиусов капилляров r_{01} и r_{02}.

Формулу для расхода жидкости (1.7) представим в виде

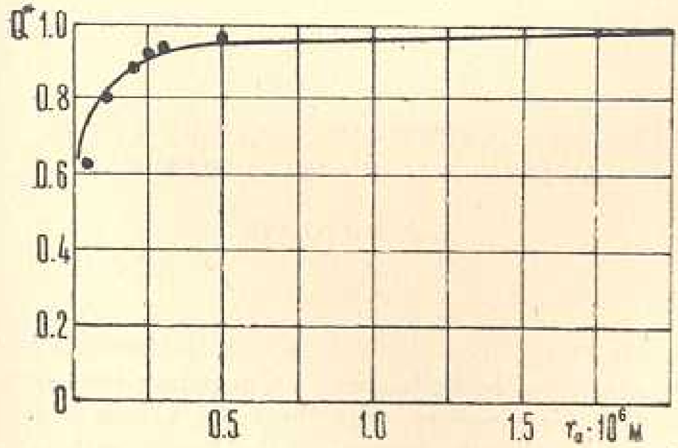
$$Q^* = 1 - \frac{8N}{L}\left[\frac{I_0(NL)}{2I_1(NL)} - \frac{1}{NL}\right] \tag{1.10}$$

На фиг. 1 приведен график зависимости безразмерного расхода воды от параметра L. Из графика видно, что снижение L соответствует уменьшению расхода воды. Напомним, что снижение L соответствует уменьшению радиуса трубы (фиг. 2). Таким образом, чем меньше радиус трубы, тем более явно выражено влияние подструктуры, вызывающее существенное уменьшение расхода жидкости. Так, объемный расход воды через капилляр радиуса $r_0 = 4 \cdot 10^{-8}$ м в 1,5 раза меньше рассчитанного по формуле Гагена-Пуазейля при подстановке в нее постоянного табличного значения коэффициента сдвиговой ньютоновской вязкости [11], что и получается согласно формулам (1.7) или (1.10).



Фиг. 1.

На фиг. 2 представлена теоретическая кривая зависимости безразмерного расхода воды от радиуса капилляра, вычисленная по формуле (1.7). Полученные данные об изменении расхода воды, как видно из графика, хорошо согласуются с результатами работы [11] (точки — экспериментальные данные [11]).



Фиг. 2.

Сопоставление экспериментальных данных по вязкости с табличным значением сдвиговой ньютоновской вязкости и по расходу жидкости с вычисленным значением по теории несимметричных жидкостей свидетельствует, по крайней мере, для воды, в пользу гипотезы о полном прилипании жидкости ($\alpha = 0$) к твердой границе трубы при $r = r_0$.

Таким образом, на поверхности соприкосновения жидкости с твердой границей для угловой скорости вращения частиц (микровращения) имеем

$$\vec{\omega}(\vec{x}_B, t) = \vec{\omega}_B$$

где $\vec{x}_B$ — точка на твердой границе, имеющая заданный вектор вращения $\vec{\omega}_B$.

Приведенное сравнение теоретической зависимости безразмерного расхода воды от параметра взаимосвязи между геометрией и свойствами жидкости с результатами измерений, показало, что классическая теория вполне применима, когда характерная материальная длина вещества, по крайней мере, на два порядка меньше, чем характерный размер капилляра.

ԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՀԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ ՄԱՍՇՏԱԲԱՅԻՆ ԷՖԵԿՏԻ ՀԱՐՑԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Կատարված է ոչ սիմետրիկ լարման տենզորով հեղուկների տեսության-ասիմետրիկ հիդրոդինամիկայի, վերլուծությունը։ Համեմատելով առաջներում մածուցիկության համար ստացված փորձնական տվյալները սահքի նյուտոնյան մածուցիկության աղյուսակային արժեքի և հեղուկի ծախսը ոչ սիմետրիկ հեղուկների տեսությամբ հաշված արժեքների հետ, հաստատվում է պինդ եզրին հեղուկի լրիվ կպչման հիպոթեզը-պինդ եզրի նկատմամբ մասնիկների պտտման բացակայությունը։

ON THE PROBLEM OF SCALE EFFECT IN ASYMMETRIC HYDRODYNAMICS

L. G. PETROSIAN

S u m m a r y

The analysis of the theory of liquids with asymmetric stress tensor is fulfilled (asymmetric hydrodynamics). Comparing the early obtained experimental data for viscosity with the table values of the displaced Newtonian viscosity and the outflow of the liquid with the calculated value (according to the theory of asymmetric liquids); the hypothesis on the complete adhesion of the liquid to the solid boundary is asserted, i.e. the absence of rotation of the particles in respect to the solid boundary.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Condiff D., Dahler J.* Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress. — The physics of fluids. Publ. by the American Institute of Physics, 1964, vol. 7, No. 6, p. 842—854.
2. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметрическая гидромеханика.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 297—308.
3. *Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т.* О неизотермической модели несимметричных жидкостей.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5, с. 132—136.
4. *Эринген А. К.* Теория микрополярных жидкостей.— Механика, пер. сб. переводов иностран. ст., 1969, № 4 (116), с. 79—93.
5. *Петросян Л. Г.* К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей.— ПМ, 1976, т. 12, № 11, с. 103—109.
6. *Мигун Н. П.* Метод экспериментального определения параметров, характеризующих микроструктуру микрополярных жидкостей.—Инж.-физ. ж., 1981, т. 41, № 2, с. 220—224.
7. *Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В.* Основные уравнения теории упругих сред с вращательным взаимодействием частиц.— Физ. тверд. тела, 1960, т. 2, № 7, с. 1399—1409.
8. *Truesdell C., Noll W.* The Non-Linear Field Theories of Mechanics. — Flügge's Handbuch der Physik, Bd. 3, Teil 3, Berlin—Heidelberg—New York: 1965, 603 p.
9. *Петросян Л. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения.— 3. Пристеночный и приосевой эффекты в пуазейлевском течении суспензии.— Ученые записки ЕГУ, 1978, № 2, с. 46—54.
10. *Петросян Л. Г.* К вопросу течения структурных жидкостей в окрестности критической точки.— Ученые записки ЕГУ, 1980, № 1, с. 24—30.
11. *Дерягин Б. В., Железный Б. В., Зорин В. Д., Чураев Н. В.* Свойства жидкостей в тонких кварцевых капиллярах.— В кн. Поверхностные силы в тонких пленках и устойчивость коллоидов. М.: Наука, 1974, с. 90—94.
12. *Енохович А. С.* Справочник по физике.— М.: Просвещение, 1978. 416 с.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
1. X. 1982