

КОНЦЕНТРАЦИЯ УПРУГИХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ  
 В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ СО СВОБОД-  
 НЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

КРАВЧЕНКО А. П.

В работах [5] и [6] изучалось распределение механических напряжений и электростатической индукции в пьезоэлектрической полуплоскости с эллиптическим отверстием и эллиптическим ядром. В данной работе исследуется взаимодействие электрических и упругих полей, возникающих в указанной полуплоскости вблизи контура эллиптического отверстия, устанавливается формула связи механических напряжений с напряженностью электрического поля на свободном контуре отверстия.

1. Рассмотрим тонкую кристаллическую пьезоэлектрическую пластину с эллиптическим вырезом, близко расположенным около одной из ее прямолинейных сторон. Другие стороны пластины удалены от выреза настолько, что не оказывают существенного влияния на распределение электрических и упругих полей вблизи выреза. Срединную плоскость такой пластины принято рассматривать как пьезоэлектрическую полуплоскость с эллиптическим отверстием.

Будем считать, что срединная плоскость  $S$  пластины параллельна плоскости материальной симметрии кристалла. Систему координат в  $S$  выберем таким образом, чтобы оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  были параллельны кристаллофизическим осям, причем ось  $Ox_2$  совпадала с прямолинейной границей полуплоскости, а ось  $Ox_1$  проходила через центр отверстия и совпадала с направлением полярной оси в кристалле. Обозначим расстояние между центром отверстия и границей полуплоскости через  $h$ , полуоси эллипса — через  $a$  и  $b$ , контур отверстия — через  $L_0$ , границу полуплоскости — через  $L_0$ .

Пластина растягивается вдоль прямолинейной границы полуплоскости механическими усилиями интенсивности  $p$ . Электрическое воздействие отсутствует.

Математически задача для рассматриваемой пластины сводится к задаче для пьезоэлектрической полуплоскости, электроупругое состояние в которой определяется с помощью функций комплексных переменных  $\Phi_j(z_j)$  ( $j = 1, 3$ ), удовлетворяющих на контурах  $L_n$  ( $n = 0, 1$ ) следующим граничным условиям [7]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 \Phi_j(z_j) = f_{1n}, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 \mu_j \Phi_j(z_j) = f_{2n}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 m_{j1} \Phi_j(z_j) = f_{3n} \quad (1.1)$$

Здесь  $f_{jn}$  — функции, характеризующие загрузку контуров  $L_n$ ;  $\mu_j$  — комплексные параметры;  $m_{j1}$  — постоянные, характеризующие электромеханические свойства материала пластины.

Функции  $\Phi_j(z_j)$  определены в областях  $S_j$ , получаемых из заданной полуплоскости  $S$  известными аффинными преобразованиями [7]. С целью точного удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе полуплоскости функции  $\Phi_j(z_j)$  выберем в виде

$$\Phi_j(z_j) = \Phi_j^0(z_j) + \Phi_{j1}(z_j) + \sum_{n=1}^3 l_{jn} \overline{\Phi_{n1}}(s_{nj} z_j) \quad (1.2)$$

где  $l_{jn}, s_{nj}$  — комплексные постоянные, имеющие тот же смысл, что и в работе [5];  $\Phi_j^0(z_j)$  — функции, зависящие от загрузки сплошной полуплоскости;  $\Phi_{j1}(z_j)$  — функции, голоморфные вне контуров эллиптических отверстий  $L_{j1}$  в областях  $S_j$ . В связи с этим функции  $\Phi_{j1}(z_j)$  представим так [5]:

$$\Phi_{j1}(z_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{kj} [\zeta_j(z_j - h)]^{-k} \quad (1.3)$$

Функции, определяющие электроупругое состояние сплошной полуплоскости для данного вида загрузки, получаются такими:

$$\Phi_j^0(z_j) = A_j z_j \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= [\mu_3 \mu_2 (\mu_3 - \mu_2) \rho] (2B)^{-1} \\ A_2 &= [\mu_2 \mu_3 (\mu_1 - \mu_3) \rho] (2B)^{-1} \\ A_3 &= [\mu_1 \mu_2 (\mu_3 - \mu_1) \rho] (2B)^{-1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$B = \mu_1 \mu_2 (\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 \mu_3 (\mu_1 - \mu_3) + \mu_2 \mu_3 (\mu_3 - \mu_2)$$

Теперь функции (1.2) примут вид

$$\Phi_j(z_j) = A_j z_j + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_{kj}}{[\zeta_j(z_j)]^k} + \sum_{n=1}^3 \frac{l_{jn} \overline{\alpha_{kn}}}{[\overline{\zeta_n}(z_j)]^k} \right\} \quad (1.6)$$

Здесь переменные  $\zeta_j$  и  $\overline{\zeta_n}$  ( $j, n = 1, 3$ ) связаны с  $z_j$  следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} z_j - h &= R_j \left( \zeta_j + \frac{m_j}{\zeta_j} \right) \\ s_{nj} z_j - h &= \overline{R_n} \left( \overline{\zeta_n} + \frac{\overline{m_n}}{\overline{\zeta_n}} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$R_j = \frac{a - i\mu_j b}{2}, \quad m_j = \frac{a + i\mu_j b}{a - i\mu_j b} \quad (1.8)$$

Функции  $[\bar{z}_r(z_j)]^{-k}$  являются голоморфными в областях внутри эллипсов  $L_{j1}$ . В этих областях их можно разложить в ряды по полиномам Фабера [8],

$$[\bar{z}_r(z_j)]^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn}^{(j,r)} P_n(z_j) \quad (1.9)$$

Здесь

$$P_n(z_j) = \zeta_j^n + m_j^n \zeta_j^{-n} \quad (1.10)$$

Для определения коэффициентов  $\alpha_{kj}$  из граничных условий (1.1) на контуре отверстия методом рядов получим следующую алгебраическую систему:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 t_{mj} \alpha_{kj} + \sum_{j=1}^3 \sum_{r=1}^3 \left[ \alpha_{rj} \sum_{n=1}^3 \overline{t_{mn}} \overline{l_{nj}} \overline{A_{rk}^{(j,r)}} + \right. \\ & \left. + \overline{\alpha_{rj}} \sum_{n=1}^3 t_{mn} l_{nj} m_n^k A_{rk}^{(j,r)} \right] = \beta_{mk} \quad (m = \overline{1,3}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= -p \frac{a}{2}, \quad \beta_{21} = \beta_{31} = 0, \quad \beta_{mk} = 0 \quad (k \geq 2) \\ t_{1j} &= 1, \quad t_{2j} = \mu_j, \quad t_{3j} = m_{j1} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Следуя работе [4], можно доказать, что система (1.11) является квазирегулярной при любой близости отверстия к границе полуплоскости и имеет единственное решение [3]. В связи с этим для ее решения можно использовать метод редукции.

После определения из системы (1.11) коэффициентов  $\alpha_{kj}$  станут известными функции (1.6), посредством которых по формулам, полученным в работе [7], находятся механические напряжения  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ , электростатическая индукция  $D_1$ ,  $D_2$  и напряженность электрического поля  $E_1$ ,  $E_2$  в произвольной точке полуплоскости.

Соответствующие компоненты электроупругого поля вблизи контура эллиптического отверстия на площадках, нормальных и касательных к нему, будем находить следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11} l^2 + \sigma_{22} m^2 - 2\sigma_{12} l m \\ \sigma_{22} &= \sigma_{11} m^2 + \sigma_{22} l^2 + 2\sigma_{12} l m \\ \sigma_{12} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) l m + \sigma_{12} (m^2 - l^2) \\ D_0 &= -D_1 l + D_2 m, \quad D_r = D_1 m + D_2 l \\ E_0 &= -E_1 l + E_2 m, \quad E_r = E_1 m + E_2 l \end{aligned} \quad (1.13)$$

где



$$l = \frac{1}{L} a \sin \theta, \quad m = \frac{1}{L} b \cos \theta$$

$$L = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \quad (1.14)$$

$\theta$  — параметр, который при полном обходе по контуру эллиптического отверстия изменяется от 0 до  $2\pi$ .

В качестве примера рассмотрим пластинку, изготовленную из пьезоэлектрического кристалла бифталата рубидия, принадлежащего к кристаллографическому классу  $mm2$  ромбической системы и обладающего сильной электромеханической связью [1]. Его комплексные параметры  $\mu_j$  получаются такими [6]:

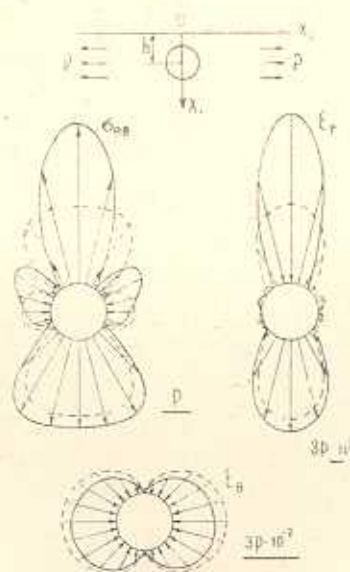
$$\mu_1 = i0,834, \quad \mu_2 = 0,684 + i0,709, \quad \mu_3 = -\bar{\mu}_2$$

При проведении численных расчетов в системе (1.11) в зависимости от выбранного расстояния  $h$  между центром эллиптического отверстия и границей полуплоскости оставалось от шести до сорока восьми уравнений. При этом погрешность удовлетворения граничных условий на контуре отверстия не превышала 1% от интенсивности внешней нагрузки, что проверялось вычислением большого числа значений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  и  $D_r$  в точках контура этого отверстия.

В табл. 1 даны значения механических напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  и напряженности электрического поля  $E_r$  и  $E_\theta$ , возникающих на площадках, нормальных и касательных к контуру кругового и эллиптического отверстий для некоторых  $h$  и  $c = b/a$ . При этом значения для механических напряжений приводятся с точностью до  $p \text{ н/м}^2$ , а для напряженности электрического поля — с точностью до  $3p \cdot 10^{-2} \text{ в/м}$ .

На фиг. 1 изображены графики распределения механических напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  и напряженности электрического поля  $E_r$  и  $E_\theta$  вблизи контура кругового отверстия при  $h = 1,25a$ . Пунктирные линии на графиках относятся к случаю, когда рассматриваемая полуплоскость заменяется плоскостью с тем же отверстием.

Из табл. 1 видно, что при сближении отверстия с границей полуплоскости наблюдается рост концентрации упругих и электрических полей около отверстия. Влияние прямолинейной границы на электроупругое состояние около отверстия оказывается существенным, если расстояние между контуром отверстия и границей полуплоскости становится меньше диаметра отверстия. Например, для случая кругового отверстия, когда расстояние между границами полуплоскости равно диаметру отвер-



Фиг. 1.

стия, увеличение концентрации механических напряжений и нормальной составляющей вектора напряженности электрического поля составляет лишь 10%. В случае, когда указанное расстояние уменьшается до 1/8 диаметра отверстия, концентрация соответствующих величин увеличивается более, чем в 2,1 раза (фиг. 1).

Таблица 1

c		c = 1/1				c = 1/2	c = 2/1
h		30a	3a	2a	1,5a	1,25a	2,25a

Значения  $\sigma_{\theta\theta}$

0	2,537	2,645	2,738	2,849	2,927	4,924	1,890
1/6	2,432	2,563	2,700	2,871	3,035	2,763	1,925
1/3	-0,256	-0,229	-0,135	0,025	0,252	-0,319	1,192
1/2	-0,910	-0,983	-1,014	-0,976	-0,837	-0,758	-1,075
2/3	-0,256	-0,441	-0,750	-1,160	-1,483	-1,346	0,139
5/6	2,432	2,517	2,478	2,066	0,974	-1,649	1,859
1	2,538	2,795	3,230	4,070	5,397	9,867	2,376

Значения  $E_r$

0	5,329	5,554	5,749	5,980	6,171	10,37	3,970
1/6	2,618	2,757	2,901	3,086	3,238	0,456	3,380
1/3	0,103	0,096	0,082	0,057	0,011	0,101	0,647
1/2	-0,000	-0,000	-0,000	0,000	0,009	-0,003	-0,000
2/3	-0,103	-0,123	-0,160	-0,211	-0,242	-0,296	-0,118
5/6	-2,618	-2,707	-2,663	-2,220	-1,090	0,117	-3,257
1	-5,329	-5,867	-6,781	-8,548	-11,35	-20,88	-4,991

Значения  $E_z$

0	-0,000	0,000	0,000	0,000	-0,000	0,000	-0,000
1/6	-0,462	-0,448	-0,439	-0,429	-0,421	-0,602	-0,246
1/3	-0,800	-0,772	-0,753	-0,727	-0,695	-0,745	-0,575
1/2	-0,924	-0,878	-0,840	-0,797	-0,747	-0,708	-0,843
2/3	-0,800	-0,750	-0,699	-0,653	-0,602	-0,653	-0,482
5/6	-0,462	-0,428	-0,389	-0,350	-0,331	-0,839	-0,131
1	0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	0,000	0,000

2. Анализ полученных результатов показал, что концентрация механических напряжений наблюдается в тех точках контура отверстия, где возникает концентрация напряженности электрического поля.

В связи с этим целесообразно получить формулу связи сопряженных электрических и упругих полей на свободном контуре отверстия из соотношений [2]



$$\begin{aligned} E_1 &= -g_{11}\tau_{11} - g_{12}\tau_{22} - g_{13}\tau_{12} + \beta_{11}^2 D_1 + \beta_{12}^2 D_2 \\ E_2 &= -g_{21}\tau_{11} - g_{22}\tau_{22} - g_{23}\tau_{12} + \beta_{12}^2 D_1 + \beta_{22}^2 D_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\beta_{m,n}^2$  — коэффициенты диэлектрической восприимчивости, измеренные при постоянных механических напряжениях;  $g_{mi}$  — пьезоэлектрические модули.

Учитывая, что на свободном контуре отверстия

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad D_r = 0 \quad (2.2)$$

из (1.13) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= l^2 \tau_{\theta\theta}, \quad \tau_{22} = m^2 \tau_{\theta\theta}, \quad \tau_{12} = -lm \tau_{\theta\theta} \\ D_1 &= -l D_\theta, \quad D_2 = m D_\theta \\ E_1 &= E_r m - E_\theta l, \quad E_2 = E_r l + E_\theta m \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя соотношения (2.3) в (2.1) и решая систему уравнений относительно  $\tau_{\theta\theta}$ , получим

$$\sigma_{\theta\theta} = i^{-1} [E_r x_r - E_\theta x_\theta] \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} i &= [g_{22}\beta_{12}^2 - g_{11}\beta_{22}^2] m^2 + [g_{11}\beta_{12}^2 - g_{21}\beta_{11}^2] l^2 + [g_{22}\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2 (g_{21} - g_{13}) - \\ &\quad - g_{11}\beta_{22}^2] ml^2 + [g_{13}\beta_{22}^2 + \beta_{12}^2 (g_{12} - g_{23}) - g_{22}\beta_{11}^2] m^2 l \\ x_r &= \beta_{11}^2 l^2 - 2\beta_{12}^2 ml + \beta_{22}^2 m^2 \\ x_\theta &= \beta_{12}^2 (m^2 - l^2) + (\beta_{22}^2 - \beta_{11}^2) ml \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким же образом можно получить формулу связи электростатической индукции с напряженностью электрического поля на свободном контуре отверстия.

Автор выражает признательность член-корр. АН УССР А. С. Космодамианскому за внимание к работе и полезные обсуждения.

ԱՋԱՏ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԱՆՑՔՈՎ ՊԻԵՋՈՒԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԿԻՍԱԶԱՐՔՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ  
ԱՌԱՉԳԱԿԱՆ ԵՎ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԳԱՇՏԵՐԻ ՀԱՄԱԿԵՆՏՐՈՆԱՑՈՒՄԸ

Ա. Պ. ԿՐԱՎՉԵՆՈ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Կոմպլեքս պոտենցիալի մեթոդով լուծված է էլիպտիկ անցքով պիեզոէլեկտրական կիսահարթության էլեկտրաառաձգական վիճակի մասին խնդիրը: Խնդիրը բերված է կվադրոնոկուլյար զծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը: Բերված է թվային հետազոտություն, որը բնութագրում է առաձգական և էլեկտրական դաշտերի բաշխումը պիեզոէլեկտրական կիսահարթությունում էլիպտիկական անցքի շրջակայքում:

# THE CONCENTRATION OF ELASTIC AND ELECTRIC FIELDS IN PIEZOELECTRIC HALF-PLANE WITH A FREE ELLIPTIC HOLE

A. P. KRAVCHENKO

## Summary

The solution of an electro-elastic state problem for a piezoelectric half-plane with an elliptic hole is received by the method of complex potentials. The stress-electric intensity connection formula on a free edge of elliptic hole is obtained.

Some numerical examples are presented.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беликова Г. С., Писаревский Ю. В., Сильвестрова И. М. Пьезоэлектрические и упругие свойства кристаллов-бифталата рубидия.— Кристаллография, 1974, т. 19, № 1.
2. Желудев И. С. Физика кристаллических диэлектриков. М.: Наука, 1968. 463 с.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
4. Космодамианский А. С. Квазирегулярность бесконечных систем в задачах о напряженном состоянии анизотропной среды с эллиптическими отверстиями. ПМ, 1968, т. 1, № 10.
5. Космодамианский А. С., Кравченко А. П., Ложкин В. Н. Действие точечного электрического заряда на границе пьезоэлектрической полуплоскости, ослабленной эллиптическим отверстием.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т. 30, № 1.
6. Космодамианский А. С., Кравченко А. П., Ложкин В. Н. Электроупругое состояние пьезоэлектрической полуплоскости с эллиптическим ядром. ПМ, 1978, т. 14, № 1.
7. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. ПМ, 1975, т. 11, № 5.
8. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 703 с.

Донецкий политехнический  
институт

Поступила в редакцию  
31. XII. 1981