ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVII, № 3, 1984 Механика

ПРОСТОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ШТАМПОМ С РАЗДЕЛЯЮЩЕЙСЯ ПО КООРДИНАТАМ И ВРЕМЕНИ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ ЖЕСТКО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

КОЛОКОЛЬЧИКОВ В. В., КУРЖАНСКАЯ Е. Г.

Прандтлем [1] и Хиллом [2] построены два классических решения задачи о деформировании прямоугольным штампом жестко-пластического полупространства. В работе [3] решение задачи Прандтля обобщается на случай сжатия слоя шероховатыми плитами для сферического деформированного состояния идеально пластического материала. В [4—6] решены некоторые контактные задачи для вязко-пластического материала Бингама.

В настоящей работе используется модель жестко-вязко-пластического материала с запаздыванием текучести. Получены уравнения, в фиксированный момент времени являющиеся уравнениями характеристик. Для частного класса простого деформирования с разделяющейся по координатам и времени интенсивностью скоростей деформаций построено обобщение решения Хилла при наличии вязко-пластических эффектов, описываемых рассматривамой моделью.

1. Определяющее соотношение, связывающее девиатор напряжения s_{ij} с девиатором скоростей деформации e_{ij} в нежесткой области, для жестко-вязко-пластической среды примем в виде

$$s_{ij}=\frac{\widehat{k}e_{ij}}{g},\qquad g=\left(\frac{1}{2}e_{ij}e_{ij}\right)^{1/2}\tag{1.1}$$

где $\widehat{k}$ — интегральный оператор, определенный следующим образом:

$$\widehat{k}e_{ij}=\int\limits_{-0}^{t}k(t-\tau)\,de_{ij}(\tau)\tag{1.2}$$

Здесь t — текущее время, τ — переменная интегрирования, $k(t-\tau)$ — ядро интегрального оператора, определенное из эксперимента на растяжение с постоянной скоростью деформации.

Если $k(t)=kh(t)$, где $k=\text{const}$, а $h(t)$ — функция Хевисайда, то модель (1.1) перейдет в модель идеальной жестко-пластической среды [7, 8]. Модель (1.1) является частным случаем без старения модели Н. Х. Арутюняна—Д. Д. Ивлева [9], учитывающей неоднородное старение в теории идеальной вязкопластичности [9]. Уравнения нелинейной вязкоупругости неоднородно стареющих тел предложены в [10]. Ниже ядро $k(t)$ взято из опытов [11] по растяжению полиизобутилена со скоростью деформаций $5{,}7\cdot 10^{-3}$ 1/сек. Уравнение, являющееся аналогом уравнения поверхности нагружения, но с учетом эффектов вязкости, находим из соотношений (1.1)

$$\tau^2 g^2 = (\widehat{k}e_{ij})(\widehat{k}e_{ij}), \quad \tau = \left(\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

Предлагаемая модель вязко-пластического течения обладает рядом особенностей. Она справедлива для скоростей деформаций, больших некоторой критической деформации g_*. В начальный момент материал, удовлетворяющий модели (1.1)—(1.2) ведет себя идеально-пластически. При этом $k(0)$ является мгновенным начальным пределом текучести. При дальнейшем изменении скоростей деформирования в таком материале существенна история их изменения. То есть происходит запаздывание текучести. Например, течения с меньшими скоростями, чем в начальный момент, могут происходить во время релаксации напряжений (фиг. 2а, б).

Скорости деформации для плоской деформации даются формулами [7, 8]:

$$\begin{gathered} e_x = -e_y = g\cos 2\varphi \\ \gamma_{xy} = g\sin 2\varphi \end{gathered} \tag{1.4}$$

Компоненты напряжения при использовании (1.1) и (1.3) запишутся так:

$$\begin{gathered} \sigma_x = \sigma + \frac{\widehat{k}(g\cos 2\varphi)}{g} \\ \sigma_y = \sigma - \frac{\widehat{k}(g\cos 2\varphi)}{g} \\ \tau_{xy} = \frac{\widehat{k}(g\sin 2\varphi)}{g} \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь σ — гидростатическое давление несжимаемой среды.

Обозначим через $\widehat{k}^{-1}$ обратный оператор к оператору $\widehat{k}$. Тогда уравнения (1.5) будут следующими:

$$\begin{gathered} \frac{1}{g}\widehat{k}^{-1}(g\sigma_x) = \frac{1}{g}\widehat{k}^{-1}(g\sigma) + \cos 2\varphi \\ \frac{1}{g}\widehat{k}^{-1}(g\sigma_y) = \frac{1}{g}\widehat{k}^{-1}(g\sigma) - \cos 2\varphi \\ \frac{1}{g}\widehat{k}^{-1}(g\tau_{xy}) = \sin 2\varphi \end{gathered} \tag{1.6}$$

Аналогично преобразуются уравнения равновесия

$$\frac{\partial \frac{1}{g}\hat{k}^{-1}(g\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial \frac{1}{g}\hat{k}^{-1}(g\tau_{xy})}{\partial y}=A(x,\ y,\ t)$$

$$\frac{\partial \frac{1}{g}\hat{k}^{-1}(g\sigma_y)}{\partial y}+\frac{\partial \frac{1}{g}\hat{k}^{-1}(g\tau_{xy})}{\partial x}=B(x,\ y,\ t) \tag{1.7}$$

где

$$A(x,\ y,\ t)=\frac{1}{g}\left[\hat{k}^{-1}\left(\sigma_x\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\hat{k}^{-1}\left(\tau_{xy}\frac{\partial g}{\partial y}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{g}\hat{k}^{-1}(g\sigma_x)\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{1}{g}\hat{k}^{-1}(g\tau_{xy})\frac{\partial g}{\partial y}\right]$$

$$B(x,\ y,\ t)=\frac{1}{g}\left[\hat{k}^{-1}\left(\sigma_y\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\hat{k}^{-1}\left(\tau_{xy}\frac{\partial g}{\partial x}\right)-\right. \tag{1.8}$$
$$\left.-\frac{1}{g}\hat{k}^{-1}(g\sigma_y)\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{1}{g}\hat{k}^{-1}(g\tau_{xy})\frac{\partial g}{\partial x}\right]$$

Для идеальной пластичности, когда $k(t)=kh(t)$, величины $A(x,\ y,\ t)$ и $B(x,\ y,\ t)$ равны нулю. Оказывается, что это свойство величин A и B справедливо для модели (1.1), если временные и пространственные аргументы функции интенсивности скоростей деформаций g разделяются.

Подстановка (1.6) в уравнения равновесия (1.7) дает

$$\frac{\partial}{\partial x}l-2\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+2\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}=A(x,\ y,\ t)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}l+2\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}+2\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}=B(x,\ y,\ t) \tag{1.9}$$

Здесь

$$l=\frac{1}{q}\hat{k}^{-1}(\sigma g) \tag{1.10}$$

Запишем уравнения Коши для скоростей деформаций с учетом несжимаемости материала

$$e_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad 2\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.11}$$

где u — скорость перемещения вдоль оси x, v — скорость перемещения вдоль оси y.

Подставляя (1.4) в (1.11), получаем уравнения вида

$$2\sin 2\varphi \frac{\partial u}{\partial x} - \cos 2\varphi \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

$$2\sin 2\varphi \frac{\partial v}{\partial y} + \cos 2\varphi \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.12)$$

Введем δ-вариацию по x и y при фиксированном времени t. Тогда

$$\delta l = \frac{\partial l}{\partial x} dx + \frac{\partial l}{\partial y} dy, \ \delta\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \quad (1.13)$$

где l определяется при помощи (1.10).

Разрешим (1.9), (1.12), (1.13) относительно $\frac{\partial l}{\partial x}$, $\frac{\partial l}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Получим

$$\frac{\partial l}{\partial x} = -\frac{1}{M}[2\,\delta\varphi dy - (\delta l - B dy)(\sin 2\varphi dy + \cos 2\varphi dx) +$$

$$+ A dy (\sin 2\varphi dx - \cos 2\varphi dy)] \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} = \frac{1}{M}[2\delta\varphi dx - (\delta l - A dx)(\sin 2\varphi dx - \cos 2\varphi dy) -$$

$$- B\, dx (\sin 2\varphi dy - \cos 2\varphi dx)]$$

$$M = \cos 2\varphi \left[dy - dx \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right]\left[dy - dx \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Аналогичные соотношения справедливы для $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Следуя Levi, Geiringer, решаются относительно производных u и v по координатам уравнения (1.12) совместно с дифференциальными соотношениями

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (1.15)$$

В результате получаются известные равенства

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dy\delta v + dx\delta u}{\left[dy - dx \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right]\left[dy - dx \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right]} \quad (1.16)$$

Приравнивая числитель и знаменатель дробей (1.14) и (1.16) нулю, получим дифференциальные уравнения характеристик

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\delta u}{\delta v} = \operatorname{tg}\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\delta\varphi \mp \frac{1}{2}\delta l = \mp dy \left[B - A \operatorname{tg}\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (1.17)$$

Отличие характеристик (1.17) для модели (1.1) от случая идеально пластичности состоит в том, что теперь они рассматриваются в фиксиро ванный момент времени (в (1.17) фигурирует δ-вариация по координата в фиксированный момент времени t), во-вторых, в зависимости l (1.10) о интенсивности скоростей деформаций, в-третьих, в зависимости от велич A и B, определяемых по (1.8).

При простом деформировании угол φ, определяемый (1.4), не зави сит от времени и поэтому из первых двух равенств (1.17) следует, что ха рактеристики в плокостях x, y и u, v имеют тот же вид, что и для идеаль ной пластичности [8]. При сложном деформировании величина φ стано вится зависящей от времени и ее связь с координатами тела существенн усложняется. Ниже остановимся на случае простого деформирования.

Дополнительно предположим, что для интенсивности скоростей де формаций пространственные и временные координаты разделяются

$$g(x,\ y,\ t) = L(x,\ y)\,S(t) \qquad (1.18$$

Тогда из (1.8), (1.18) следует, что

$$A(x,\ y,\ t) = 0, \quad B(x,\ y,\ t) = 0 \qquad (1.19$$

При выполнении (1.18), (1.19) уравнения характеристик (1.17) в плоско сти φ, σ с учетом (1.10) имеют вид

$$\delta\varphi \mp \frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{g}k^{-1}(g\delta)\right) = 0 \qquad (1.20$$

Уравнения (1.20), справедливые при простом деформировании с ин тенсивностью скоростей деформаций вида (1.18) для модели вязко-пла стичности (1.1), (1.2), описывают два действительных семейства характе ристик, отвечающих верхним и нижним знакам.

2. Рассматривается задача о давлении прямоугольного штампа на жестко-вязко-пластическое полупространство с решением, аналогичным решению Хилла для жестко-пластического полупространства [2]. Анало гично могут быть учтены эффекты вязкости и при обобщении решения Прандтля [1].

Для простого деформирования вида (1.18) в (1.4) $\varphi(x,\ y)$ есть функ ция только координат, причем справедливы равенства (1.19).

Свяжем оси координат x, y с центром приложения штампа длиной $2a$ к жестко-вязко-пластическому полупространству. Ось x направлена вдоль контактного участка, ось y — вдоль линии действия приложенных сил. Вдоль контактного участка оси x компоненты тензора напряжений равны

$$\sigma_y = -p(t),\ \tau_{xy} = 0,\ \varphi = 0 \qquad (2.1)$$

Вдоль свободного участка оси x имеем

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad (2.2)$$

Перепишем уравнения характеристик в плоскости (φ, σ), проинтегрировав (1.20)

$$\varphi \mp \lambda = \eta_{\pm} = \underset{x,\, y}{\mathrm{const}} \tag{2.3}$$

где

$$\begin{gathered}
\lambda = \frac{1}{2g}\widehat{k}^{-1}\left[g\left(\sigma - \sigma_0\right)\right] \\
\sigma = \pm \frac{1}{g}\widehat{k}\left(2g\varphi\right) + \frac{1}{g}\widehat{k}\left(gD_{\mp}\right) \\
\eta_{\pm} \equiv \pm \frac{1}{2g}\widehat{k}^{-1}\left(g\sigma_0\right) \pm \frac{D_{\mp}}{2}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

а $\eta_{\pm}$ или $D_{\mp}(t)$ — произвольные функции времени, появившиеся после интегрирования (1.20) по координатам, σ_0 — произвольная функция времени.

В качестве жестких областей примем такие же области, как и при решении Хилла [2]. В жесткой треугольной области под площадью контакта из граничных условий (2.1) и непрерывности поля напряжений при переходе из жесткой области и в вязко-пластическую, и в область штампа определяются напряжения σ и σ_x

$$\begin{gathered}
\sigma = \frac{\widehat{kg}}{g} - p(t) \\
\sigma_x = 2\frac{\widehat{kg}}{g} - p(t)
\end{gathered} \tag{2.5}$$

В жесткой треугольной области по [2], обладающей свободным участком границы, из (2.2), непрерывности напряжений при переходе из жесткой области и на границу, и в вязко-пластическую область получаются напряжения σ и σ_x

$$\sigma = -\frac{\widehat{kg}}{g}, \qquad \sigma_x = -2\frac{\widehat{kg}}{g} \tag{2.6}$$

В вязко-пластической области под угловой точкой штампа определим напряжения σ вдоль характеристики $\eta_- = \underset{x,\, y}{\mathrm{const}}$, используя вдоль нее вторую формулу (2.4). Сравним одинаковые напряжения σ, определяемые по (2.6) и по второму равенству (2.4) для D_- при непрерывном переходе из жесткой области в вязко-пластическую. Тогда

$$\frac{1}{g}\widehat{k}\left(gD_-\right) = -(\pi + 1)\frac{\widehat{kg}}{g} \tag{2.7}$$

Отсюда получаем, что

$$D_- = -(\pi + 1)\, h(t) \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) во второе равенство (2.4), для D_- найдем, что вдоль характеристик $\eta_- = \underset{x,y}{\mathrm{const}}$

$$\sigma = (2\varphi - \pi - 1)\frac{\widehat{kg}}{g} \qquad (2.9)$$

Таким образом, в вязко-пластической области из (2.9) и (1.5) вытекают выражения для компонент тензора напряжений вдоль характеристик

$$\sigma_x = (2\varphi - \pi - 1 + \cos 2\varphi)\frac{\widehat{kg}}{g}$$

$$\sigma_y = (2\varphi - \pi - 1 - \cos 2\varphi)\frac{\widehat{kg}}{g} \qquad (2.10)$$

$$\tau_{xy} = \sin 2\varphi\frac{\widehat{kg}}{g}, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Напряжения (2.9) при $\varphi = 0$ по непрерывности равны напряжениям σ в (2.5) для жесткой области. Поэтому вдоль процесса (1.18) постоянное по координатам, но переменное по времени давление p определяется интенсивностью скоростей деформирования g и функцией влияния материала $k(t)$

$$p(t) = (\pi + 2)\frac{\widehat{kg}}{g} \qquad (2.11)$$

Введем дополнительное условие, что часть полуплоскости под линией скольжения η_- остается жесткой, то есть следуя Хиллу, скорость v_n, нормальная к линии скольжения, разделяющей неподвижную жесткую область и вязко-пластическую, равна нулю ($v_n = 0$). С учетом этого компоненты скоростей деформаций согласно [2] в области вязко-пластичности даются равенствами в полярной системе координат

$$e_r = e_\theta = 0, \quad \gamma_{r\theta} = -\frac{\sqrt{2}\, v_0(t)}{r} \qquad (2.12)$$

где $v_0(t)$ — скорость движения штампа.

Отсюда интенсивность скорости деформации

$$g = \frac{v_0(t)}{\sqrt{2}\, r} \qquad (2.13)$$

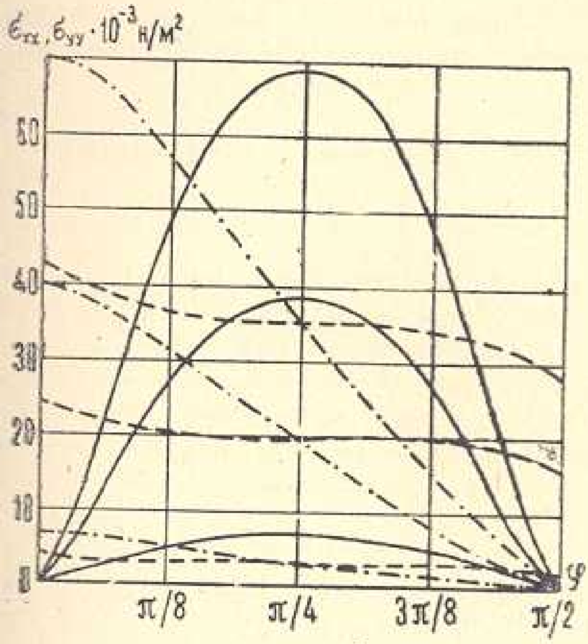
то есть принадлежит классу функций (1.18).

Подставляя (2.13) в (2.11), получим связь скоростей движения штампа с возникающими давлениями под штампом

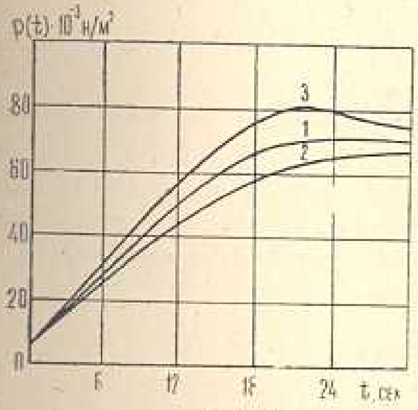
$$p(t) = (\pi + 2)\frac{\widehat{kv_0}(t)}{v_0(t)} \qquad (2.14)$$

Заметим, что в отличие от (2.14) для идеальной пластичности давление под штампом не зависит от скорости движения штампа.

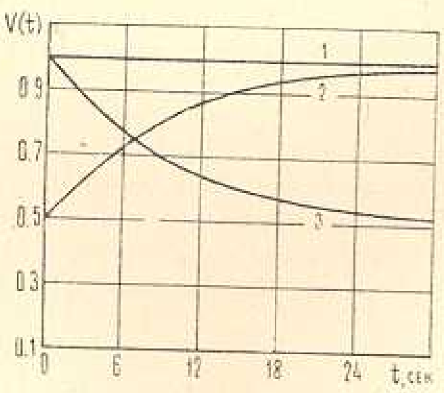
На фиг. 1 для полиизобутилена приводятся зависимости напряжений σ_{xx} (— — —), σ_{yy} (—·—·—), τ_{xy} (———) от угла φ (параметра вязко-пластической зоны с вершиной в угловой точке штампа), существенно не совпадающие в разные моменты t из-за эффектов вязкости. Верхние кривые близки к соответствующим кривым для идеальной пластичности с пределом текучести k (∞).



Фиг. 1.



Фиг. 2а.



Фиг. 2б.

На фиг. 2а приводятся изменения давления штампа от времени для трех режимов изменения скорости движения штампа v_0 (фиг. 2б). Цифры у кривых соответствуют N—номеру режима, причем

$$v_0 = h(t) \qquad \text{при } N = 1$$

$$v_0 = 1 - \frac{1}{2}\exp(-\Lambda t) \text{ при } N = 2, \ \Lambda = {}^{1}/_{10}\text{c}$$

$$v_0 = [1 + \exp(-\Lambda t)]/2 \text{ при } N = 3$$

ԸՍՏ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ԵՎ ԺԱՄԱՆԱԿԻ ԲԱԺԱՆՎՈՂ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅՈՒՆՈՎ ԿՈՇՏ ՄԱԾՈՒՑԻԿԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՍԱՐԱԿ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ ԴՐՈՇՄՈՎ

Վ. Վ. ԿՈԼՈԿՈԼՉԻԿՈՎ, Ե. Գ. ԿՈՒՐԺԱՆՍԿԱՅԱ

Ամփոփում

Հոսունության ուշացումով կոշտ մածուցիկա-պլաստիկական մոդելի օգտագործումով ստացված են ժամանակի ֆիքսած պահին խարակտերիստիկ հավասարումներ: Ըստ կոորդինատների և ժամանակի բաժանվող դեֆորմացիաների արագության ինտենսիվությունով հասարակ դեֆորմացման մասնակի դասի համար կառուցված է Խիլլի լուծումների ընդհանրացումը մածուցիկապլաստիկական ազդեցությունների առկայության դեպքում: Լուծումը թվայես նկարագրված է պոլիկոորդինատներից կիսատարածության համար:

SIMPLE DEFORMATION BY STAMP WITH DEFORMATION SPEED INTENSITY SEPARATED BY COORDINATES AND TIME FOR HARD VISCOUS-PLASTIC SEMISPACE

V. V. KOLOKOLCHIKOV, E. G. KURZHANSKAYA

Summary

In this paper the model of hard viscous-plastic material with delayed currency is used. The equations received are equations of characteristic in the fixed moment of time. Generalization of Hill solution for viscous-plastic effects describing the model in consideration was found for this special class of simple deformation with deformation speed intensity separated by coordinates and time.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прандтль Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел.— В кн.: «Теория пластичности», ИЛ, 1948.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности.— ИЛ, 1948.
3. *Ивлев Д. Д.* Об одном обобщении решения Прандтля для сферического деформированного состояния.— Тр. НИИ математики ВГУ, Воронеж, 1973, вып. 10, с. 1—3.

4. *Мясников В. П.* Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязко-пластической среды.— ПМТФ, 1961, № 2.
5. *Быковцев Г. И., Чернышов А. Д.* О вязко-пластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления.— ПМТФ, 1964, № 4, с. 94—96.
6. *Емельянов Е. М., Чернышов А. Д.* Об образовании жестких зон в вязко-пластической среде.— ПМТФ, 1974, № 3, с. 143—148.
7. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
8. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.: Наука, 1969.
9. *Арутюнян Н. Х., Ивлев Д. Д.* К теории вязко-пластичности неоднородно стареющих тел.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1982, т. 35, № 5, с. 22—26.
10. *Арутюнян Н. Х.* Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородных стареющих тел.— ДАН СССР, 1976, 231, № 3.
11. *Фихман В. Д., Радушкевич Б. В., Виноградов Г. В.* Реологические свойства полимеров при растяжении с постоянной скоростью растяжения.— В кн.: «Успехи реологии полимеров», М.: «Химия», 1970.

Куйбышевский госуниверситет

Поступила в редакцию
15. II. 1982