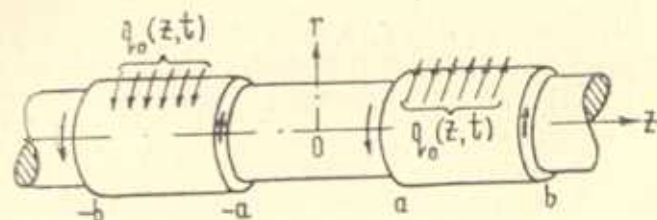


Пусть $C_1(t, \tau)$ — мера ползучести, $G_1(t)$ — переменный во времени модуль сдвига материала оболочек, а $\tau_1(z)$ — зависящий от осевой координаты их возраст.

Те же характеристики для основания цилиндра пусть будут $C_2(t, \tau)$, $G_2(t)$ и $\tau_2(z)$ соответственно.



Фиг. 1.

В дальнейшем примем, что коэффициент поперечной деформации ползучести равен коэффициенту упругой поперечной деформации и постоянен во времени, то есть

$$\gamma_2(t, \tau) = \gamma_1(t) = \gamma = \text{const}$$

Будем также считать, что

$$\tau_2(z) = \tau_2 = \text{const}$$

Сначала выведем определяющее уравнение первой задачи.

Оболочку будем трактовать в рамках теории тонких оболочек [4]. В разбираемом случае уравнение равновесия оболочки сводится к следующему:

$$\frac{dT}{dz} = q(z, t) - q_0(z, t) \quad (1.1)$$

где

$$T(z, t) = T_{zz}(z, t) + M_{zz}(z, t)/R$$

а из упругих соотношений [4] будем иметь:

$$T_{zz} = G_1(t) h \frac{dv_1(z, t)}{dz}, \quad M_{zz} = \frac{G_1(t) h^3}{6R} \frac{dv_1(z, t)}{dz} \quad (1.2)$$

Здесь T_{zz} — тангенциальные усилия, отнесенные к единице длины дуги, M_{zz} — крутящий момент, $q(z, t)$ — искомый закон распределения тангенциальных контактных напряжений, действующих на отрезке соединения оболочки с цилиндром, $v_1(z, t)$ — перемещение точек оболочки в окружном направлении.

При этом (1.1) должно рассматриваться при условиях

$$T(z, t)|_{z=a} = M_a(t)/R, \quad T(z, t)|_{z=b} = M_b(t)/R \quad (1.3)$$

Теперь, интегрируя уравнение (1.1), получим

$$T(z, t) = \int_a^z [q(y, t) - q_0(y, t)] dy + c(t)$$

Учитывая граничные условия (1.3) и соотношения (1.2), вправо написать

$$G_1(t) h \left(1 + \frac{h^2}{6R^2}\right) \frac{dv_1(z, t)}{dz} = \int_a^z [q(y, t) - q_0(y, t)] dy + \frac{M_a(t)}{R}$$

Придерживаясь точности теории тонких оболочек, далее положим

$$1 + \frac{h^2}{6R^2} \approx 1$$

в результате чего придем к соотношению

$$\gamma_1(z, t) = \frac{dv_1(z, t)}{dz} = \frac{1}{G_1(t) h} \left[\frac{M_a(t)}{R} + \int_a^z q(y, t) dy - \int_a^z q_0(y, t) dy \right] \quad (1.4)$$

Легко видеть, что второе условие (1.3) попросту эквивалентно обычному моментному условию равновесия оболочки

$$R \int_a^b [q(y, t) - q_0(y, t)] dy = M_b(t) - M_a(t) \quad (1.5)$$

С другой стороны, упруго-мгновенная деформация граничных точек цилиндра от распределенной по отрезкам $[-b, -a]$ и $[a, b]$ кососимметричной нагрузки на основе аппарата преобразования Фурье будет даваться формулой

$$\gamma_2(z, t) = \frac{dv_2(z, t)}{dz} = \frac{2}{\pi G_2(t)} \frac{d}{dz} \int_a^b L(z, y) q(y, t) dy \quad (1.6)$$

Здесь $v_2(z, t)$ — перемещение граничных точек цилиндра в окружном направлении, а

$$L(z, y) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{l(s)}{s} \left[\cos \frac{z-y}{R} s - \cos \frac{z+y}{R} s \right] ds \quad (1.7)$$

$$l(s) = I_1(s)/I_2(s)$$

где $I_n(s)$ ($n = 1, 2$) — модифицированные функции Бесселя первого рода.

Вторые граничные условия для перерезывающих сил [4] здесь не принимаются во внимание, поскольку рассматривается чистое кручение оболочки.

Далее заметим, что деформации кручения с учетом ползучести материала через упруго-мгновенные деформации выражаются формулой [5]

$$\gamma_i^*(z, t) = \gamma_i(z, t) - \int_{\tau_0}^t \gamma_i(z, \tau) G_i[\tau + \rho_i(z)] K_i[t + \rho_i(z), \tau + \rho_i(z)] d\tau \quad (1.8)$$

($i = 1, 2$)

здесь

$$K_i[t + \rho_i(z), \tau + \rho_i(z)] = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{G_i[\tau + \rho_i(z)]} + \right. \\ \left. + 2(1 + \nu) C_i[t + \rho_i(z), \tau + \rho_i(z)] \right\}$$

$$\rho_1(z) = \tau_1(z) - \tau_0, \quad \rho_2 = \tau_2 - \tau_0$$

Применительно к обсуждаемому случаю соотношения (1.8) примут вид

$$\gamma_1^*(z, t) = \frac{1}{hG_1[t + \rho_1(z)]} [\varphi(z, t) - \varphi_0(z, t)] - \\ - \frac{1}{h} \int_{\tau_0}^t [\varphi(z, \tau) - \varphi_0(z, \tau)] K_1[t + \rho_1(z), \tau + \rho_1(z)] d\tau \quad (1.9)$$

$$\gamma_2^*(z, t) = \frac{2}{\pi G_2[t + \rho_2]} \frac{d}{dz} \int_a^b L(z, y) \varphi'(y, t) dy - \\ - \frac{2}{\pi} \int_{\tau_0}^t \left[\frac{d}{dz} \int_a^b L(z, y) \varphi'(y, \tau) dy \right] K_2[t + \rho_2, \tau + \rho_2] d\tau$$

Здесь введены обозначения:

$$\varphi(z, t) = \int_a^z q(y, t) dy, \quad \varphi_0(z, t) = \frac{M_0(t)}{R} - \int_a^z q_0(y, t) dy \quad (1.10)$$

Теперь, принимая во внимание условие контакта

$$\gamma_1^*(z, t) = \gamma_2^*(z, t) \quad (a \leq z \leq b)$$

получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{2}{\pi G_2[t + \rho_2]} \frac{d}{dz} \int_a^b L(z, y) \varphi'(y, t) dy - \\ - \frac{2}{\pi} \int_{\tau_0}^t \left[\frac{d}{dz} \int_a^b L(z, y) \varphi'(y, \tau) dy \right] K_2[t + \rho_2, \tau + \rho_2] d\tau =$$

$$= \frac{1}{hG_1[t + \rho_1(z)]} [\varphi(z, t) + \varphi_0(z, t)] - \\ - \frac{1}{h} \int_{\tau_0}^t [\varphi(z, \tau) + \varphi_0(z, \tau)] K_1[t + \rho_1(z), \tau + \rho_1(z)] d\tau \quad (1.11)$$

при граничных условиях

$$\varphi(a, t) = 0, \quad \varphi(b, t) = M_b(t)/R - \varphi_0(b, t) \quad (1.12)$$

Переходя в (1.10) — (1.12) к безразмерным координатам

$$z = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2}, \quad y = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2}$$

и вводя обозначение

$$q^*(x, t) = \frac{b-a}{2} q(y, t), \quad L^*(\xi, x) = L(z, y), \quad \rho_1(z) = x_1(\xi)$$

запишем (1.11) и (1.12) в виде

$$\frac{2}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_{-1}^1 L^*(\xi, x) \varphi'(x, t) dx - \frac{2}{\pi} \int_{\tau_0}^t \left[\frac{d}{d\xi} \int_{-1}^1 L^*(\xi, x) \varphi'(x, \tau) dx \right] \times \\ \times G_2[t + x_2] K_2[t + x_2, \tau + x_2] d\tau = \lambda(\xi, t) [\varphi(\xi, t) + \varphi_0(\xi, t)] - \\ - \lambda(\xi, t) \int_{\tau_0}^t [\varphi(\xi, \tau) + \varphi_0(\xi, \tau)] G_1[t + x_1(\xi)] K_1[t + x_1(\xi), \tau + x_1(\xi)] d\tau \quad (1.13)$$

$$\varphi(-1, t) = 0, \quad \varphi(1, t) = M_b(t)/R - \varphi_0(1, t) \quad (1.14)$$

При этом

$$\varphi(\xi, t) = \int_{-1}^{\xi} q^*(x, t) dx, \quad \varphi_0(\xi, t) = \frac{M_a(t)}{R} - \int_{-1}^{\xi} q_0^*(x, t) dx \\ \lambda(\xi, t) = (b-a) G_2[t + x_2] / G_1[t + x_1(\xi)] 2h$$

Перейдем к исследованию структуры ядра $L^*(\xi, x)$.

Отметим, что функция $l(s)$ имеет следующие асимптотические представления:

$$l(s) = \begin{cases} 1 + \frac{\beta_1}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) & \text{при } s \rightarrow \infty \quad \beta_1 = \frac{3}{2} \\ \frac{\beta_2}{s} + O(s) & \text{при } s \rightarrow 0 \quad \beta_2 = \frac{15}{8} \end{cases} \quad (1.15)$$

Так как [6]

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-s} - \cos xs}{s} ds = \ln|x|, \quad \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos xs}{s^2} ds = \frac{\pi}{2}|x| \quad (1.16)$$

то при помощи (1.15) и (1.16) $L^*(\xi, x)$ представляется в виде

$$L^*(\xi, x) = \ln \frac{1}{|\xi - x|} - \frac{\lambda_1}{2} |\xi - x| + L^{**}(\xi, x)$$

где

$$L^{**}(\xi, x) = 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{l(s)}{s} - \frac{1}{s} - \frac{\beta_1}{s^2} \right] \sin \alpha(\xi + c/2) s \sin \alpha(x + c/2) s ds + \\ + \ln(\xi + x + c) + \frac{\lambda_1}{2} (\xi + x + c), \quad \alpha = \frac{b-a}{2R}, \quad c = \frac{2(b+a)}{b-a}, \quad \lambda_1 = 2\beta_1$$

Таким образом, ядро интегро-дифференциального уравнения (1.13) можно представить в виде суммы главной и регулярной частей.

Далее, приняв во внимание вышесказанное, после некоторых выкладок в первой задаче придем к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{x-\xi} + \Phi(\xi, x) \right] \varphi'(x, t) dx - \int_0^t \left\{ \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{x-\xi} + \Phi(\xi, x) \right] \varphi'(x, \tau) dx \right\} \times \\ \times G_2[t+x_2] K_2[t+x_2, \tau+x_2] d\tau = [\lambda(\xi, t) + \lambda_1] \varphi(\xi, t) - \\ - \int_0^t F(t, \tau, \xi) K_2[t+x_2, \tau+x_2] \varphi(\xi, \tau) d\tau + f(\xi, t) \quad (1.17)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-1, t) = 0, \quad \varphi(1, t) = M_b(t)/R - \varphi_0(1, t) \quad (1.18)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Phi(\xi, x) = \frac{1}{x+\xi+c} + 2 \frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} \left[\frac{l(s)}{s} - \frac{1}{s} - \frac{\beta_1}{s^2} \right] \times \\ \times \sin \alpha(\xi + c/2) s \sin \alpha(x + c/2) s ds \\ F(t, \tau, \xi) = \lambda(t, \xi) G_1[t+x_1(\xi)] K_1[t+x_1(\xi), \tau+x_1(\xi)] + \\ + \lambda_1 G_2[t+x_2] K_2[t+x_2, \tau+x_2] \\ f(\xi, t) = \lambda_1 \int_0^t G_2[t+x_2] K_2[t+x_2, \tau+x_2] d\tau + \lambda(\xi, t) \varphi_0(\xi, t) -$$

$$-\lambda_1 - \lambda(\xi, t) \int_{\tau_0}^t \varphi_0(\xi, \tau) G_1[t + x_1(\xi)] K_1[t + x_1(\xi), \tau + x_1(\xi)] d\tau$$

Заметим, что входящие в (1.17) первые интегралы следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Поступая вполне аналогичным образом, находим, что решение второй задачи также сводится к интегро-дифференциальному уравнению типа (1.17), где в выражение $l(s)$ вместо $l_1(s)$ и $l_2(s)$ будут входить функции Бесселя второго рода $K_1(s)$ и $K_2(s)$ (функции Макдональда) соответственно, а граничные условия имеют точно такой же вид, что и (1.18).

§ 2. Сведение основных уравнений к бесконечной системе линейных интегральных уравнений Вольтерра. Рассмотрим только уравнение (1.17) при граничных условиях (1.18). Уравнение второй задачи решается аналогичным способом.

Решение уравнения (1.17) представим в виде ряда

$$\varphi'(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t) \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2.1)$$

Здесь $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — многочлены Чебышева первого рода, а $X_n(t)$ ($n = 0, 1, 2$) — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Очевидно, что

$$\varphi(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t) \int_{-1}^{\xi} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (2.2)$$

Отсюда при помощи граничных условий (1.18) получим

$$\pi X_0(t) = M_b(t)/R - \varphi_0(1, t) \quad (2.3)$$

Далее воспользуемся известным соотношением

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)}{(x-\xi)\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n=0 \\ \pi U_{n-1}(\xi), & n=1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.4)$$

где $U_{n-1}(\xi) = \sin(n \arccos \xi)/\sqrt{1-\xi^2}$ — многочлены Чебышева второго рода.

Используя свойства ортогональности функций Чебышева и учитывая соотношения (2.1)–(2.4), по известной процедуре [7, 8] получим следующую бесконечную систему линейных интегральных уравнений Вольтерра:

$$X_m(t) + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(1)} X_n(t) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t K_{m,n}^{(3)}(t, \tau) X_n(\tau) d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(2)}(t) X_n(t) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^{(1)} \int_{x_0}^t G_2[t+x_2] K_2[t+x_2, \tau+x_2] \\
& + x_2] X_n(\tau) d\tau - \int_{x_0}^t G_2[t+x_2] K_2[t+x_2, \tau+x_2] X_m(\tau) d\tau = H_m(t) \quad (2.5) \\
& \quad (\kappa = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
K_{m,n}^{(1)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) \Phi(\xi, x)}{V1-x^2} U_{m-1}(\xi) V1-\xi^2 d\xi dx \\
K_{m,n}^{(2)}(t) &= \frac{1}{n} \int_{-1}^1 [\lambda_1 + \lambda(\xi, t)] U_{m-1}(\xi) U_{n-1}(\xi) (1-\xi^2) d\xi \\
K_{m,n}^{(3)}(t, \tau) &= \frac{1}{n} \int_{-1}^1 F(\xi, t, \tau) U_{m-1}(\xi) U_{n-1}(\xi) (1-\xi^2) d\xi \\
H_m(t) &= \frac{2}{\pi} X_0(t) \int_{-1}^1 U_{m-1}(\xi) V1-\xi^2 [\pi - \arccos \xi] [\lambda_1 + \lambda(\xi, t)] d\xi - \\
& - \frac{2}{\pi} \int_{x_0}^t X_0(\tau) d\tau \int_{-1}^1 F(\xi, t, \tau) [\pi - \arccos \xi] U_{m-1}(\xi) V1-\xi^2 d\xi - \\
& - \frac{2}{\pi^2} (I - K^*) X_0(t) K_{m,0}^{(1)} + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(\xi, t) U_{m-1}(\xi) V1-\xi^2 d\xi \\
K^* f(t) &= \int_{x_0}^t G_2[t+x_2] K_2[t+x_2, \tau+x_2] f(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Далее (2.5) можно представить в виде

$$X_m(t) - \int_{x_0}^t G_2[t+x_2] K_2[t+x_2, \tau+x_2] X_m(\tau) d\tau = C_m(t) \quad (2.6)$$

Для представления (2.6) в каноническом виде обратим уравнение (2.6), рассматривая его как интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром $G_2[t+x_2] K_2[t+x_2, \tau+x_2]$ и неизвестной функцией $X_m(t)$.

После обращения уравнение (2.6) запишется в виде

$$X_m(t) = (I + R_2) c_m(t) = c_m(t) + \int_{\tau_0}^t R_2(t, \tau) c_m(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

где $R_2(t, \tau)$ — резольвента ядра $G_2[t + x_2] K_2[t + x_2, \tau + x_2]$.

После простых преобразований уравнение (2.7) примет вид

$$X_m(t) = d_m(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi^2} K_{m,n}^{(1)} + \frac{2}{\pi} K_{m,n}^{(2)}(t) \right] X_n(t) + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t [K_{m,n}^{(3)}(t, \tau) + G_{m,n}(t, \tau) - R_2(t, \tau) K_{m,n}^{(2)}(\tau)] X_n(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

Здесь

$$G_{m,n}(t, \tau) = \int_{\tau_0}^t R_2(t, \eta) K_{m,n}^{(3)}(\eta, \tau) d\eta, \quad d_m(t) = H_m(t) + \int_{\tau_0}^t R_2(t, \tau) H_m(\tau) d\tau$$

Перейдем к исследованию* бесконечной системы линейных интегральных уравнений (2.8), которое проводится на основе принципа неподвижной точки Банаха [9].

Введем в рассмотрение множество m всех ограниченных последовательностей непрерывных функций, определенных на отрезке $[\tau_0, T]$, то есть

$$X(t) = \{X_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in m, \quad t \in [\tau_0, T], \quad |X_n(t)| < M_x$$

Введем метрику равенством

$$\rho(x, y) = \sup_t \sup_n |X_n(t) - Y_n(t)|$$

Можно показать, что множество m введением этим равенством метрики становится полным метрическим пространством. Рассмотрим в пространстве m линейный оператор $z = Ay$, который действует следующим образом:

$$z_m(t) = d_m(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi^2} K_{m,n}^{(1)} + \frac{2}{\pi} K_{m,n}^{(2)}(t) \right] X_n(t) + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t [K_{m,n}^{(3)}(t, \tau) + G_{m,n}(t, \tau) - R_2(t, \tau) K_{m,n}^{(2)}(\tau)] X_n(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

где

$$\{d_m(t)\}_{m=1}^{\infty} \in m.$$

* Изложенная здесь методика исследования бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра довольно общей структуры предложена С. М. Мхитаряном.

Предположим, что оператор A переводит элементы пространства сно-
ва в элементы этого же пространства.

Выясним условия, при которых оператор A является сжимающим опе-
ратором

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(Ay_1, Ay_2) \leq \alpha \rho(y_1, y_2) \quad (0 < \alpha < 1) \quad (2.10)$$

Пусть $y_i(t) = \{y_n^{(i)}(t)\}_{n=1}^{\infty} \in m$, $(i = 1, 2)$, тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \rho(z_1, z_2) &= \rho(Ay_1, Ay_2) = \sup_t \sup_n |z_m^{(1)} - z_m^{(2)}| = \\ &= \sup_t \sup_n \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi^2} K_{m,n}^{(1)} + \frac{2}{\pi} K_{m,n}^{(2)}(t) \right] [y_n^{(1)}(t) - y_n^{(2)}(t)] + \right. \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t [K_{m,n}^{(3)}(t, \tau) + G_{m,n}(t, \tau) - R_2(t, \tau) K_{m,n}^{(2)}(\tau)] [y_n^{(1)}(\tau) - \\ &- y_n^{(2)}(\tau)] d\tau \left. \leq \sup_n \sup_t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi^2} |K_{m,n}^{(1)}| + \frac{2}{\pi} |K_{m,n}^{(2)}(t)| \right] + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t [|K_{m,n}^{(3)}(t, \tau)| + |G_{m,n}(t, \tau)| + |R_2(t, \tau)| |K_{m,n}^{(2)}(\tau)|] \right\} \rho(y_1, y_2) \end{aligned}$$

Отсюда получим, что при условии

$$\begin{aligned} \alpha = \sup_n \sup_t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi^2} |K_{m,n}^{(1)}| + \frac{2}{\pi} |K_{m,n}^{(2)}(t)| \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_0}^t [|K_{m,n}^{(3)}(t, \tau)| + |G_{m,n}(t, \tau)| + |R_2(t, \tau)| |K_{m,n}^{(2)}(\tau)|] \right\} < 1 \quad (2.11) \end{aligned}$$

оператор A является сжимающим оператором. Если выполнено условие
(2.11) то, согласно принципу сжатых отображений Банаха, можно утвер-
ждать, что оператор A , заданный равенством (2.9), имеет в пространстве
 m единственную неподвижную точку y_0 такую, что $y_0 = Ay_0$ и которую
можно найти методом последовательных приближений, исходя из любого
начального элемента m .

Отметим, что при помощи (2.1) для коэффициентов интенсивности
крутящихся контактных напряжений на концах оболочки получим выра-
жения

$$K_{-1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \sqrt{1+x} q(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X_n(t) \quad (2.12)$$

$$K_1 = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{1-x} q(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t)$$

§ 3. Численные примеры. Численные результаты получены для первой задачи на ЭВМ-1022 при различных режимах загрузки оболочек и в довольно широком диапазоне изменения характерных физических и геометрических параметров. В качестве материала оболочки и цилиндра взят бетон. Рассмотрены три варианта загрузки оболочек:

- 1) $q_0(x, t) = QH(t - \tau_0), M_a(t) = M_b(t) = 0$
- 2) $q_0(x, t) = \delta(x)H(t - \tau_0), M_a(t) = M_b(t) = 0$
- 3) $q_0(x, t) = 0, M_a(t) = 0, M_b(t) = MH(t - \tau_0)$

Здесь $H(t)$ — функция Хевисайда, а $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Предполагается также, что $G_1(t) = G_2(t) = G = \text{const}$. Тогда согласно (1.8) для ядер ползучести будем иметь

$$K_i(t, \tau) = E \partial G_i(t, \tau) / \partial \tau \quad (i = 1, 2)$$

а для мер ползучести $C_1(t, \tau)$ и $C_2(t, \tau)$ [5]

$$C_1(t, \tau) = \varphi_1(\tau) [1 - \exp(-\gamma_1(t - \tau))]$$

$$C_2(t, \tau) = \varphi_2(\tau) [1 - \exp(-\gamma_2(t - \tau))]$$

$$\varphi_1(\tau) = C_0 + \frac{A}{\tau + \alpha_1(\xi)}, \quad \varphi_2(\tau) = C_0 + \frac{A}{\tau + \alpha_2}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$$

Здесь $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ — функции, характеризующие старение материалов оболочки и цилиндра.

Для упругих и геометрических характеристик приняты следующие значения:

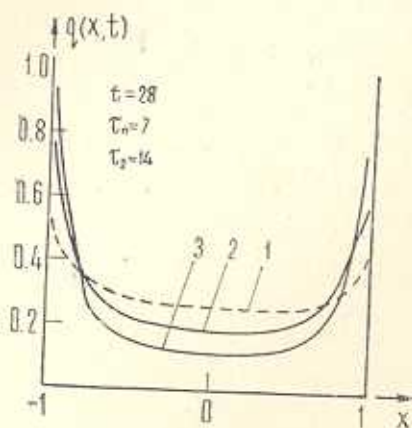
$$a = 0,5 R; \quad b = 2,5 R; \quad h/R = 0,042; \quad E = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа};$$

$$C_0 = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}, \quad A = 4,82 \cdot 10^{-4} \text{ сут} \cdot \text{МПа}^{-1}, \quad \gamma = 0,026 \cdot 1/\text{сут}.$$

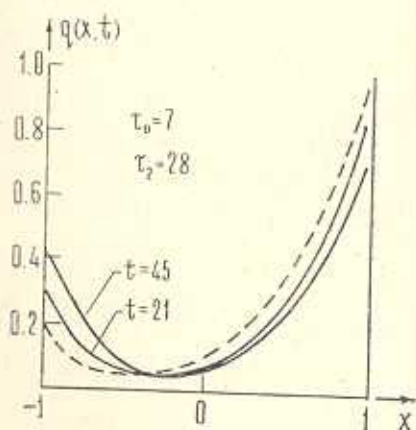
При указанных данных сначала (для фиксированных моментов времени) была решена соответствующая укороченная система (2.8) интегральных уравнений. При этом для каждого момента времени была решена система из 12 уравнений. Дальнейшее увеличение числа уравнений до 24 привело к изменению лишь четвертых значащих цифр после запятой. В общей сложности для всех рассматриваемых моментов времени была решена система из 144 уравнений. Затем по формуле (2.1) были вычислены значения контактных напряжений, а по формулам (2.12) — значения их коэффициентов интенсивности. Результаты вычислений представлены в виде графиков и таблиц.

При этом на фиг. 2 представлен график изменения контактных напряжений $q(x, t)$ в первом варианте загрузки оболочек. Кривая 1 (пунктирная линия) соответствует чисто упругому контакту оболочек с цилиндром. Кривая 2 соответствует случаю, когда $\tau_1(\xi) = \tau_0 = \text{const}$, $\tau_2 \neq \tau_0$ и, следовательно, $\alpha_1(\xi) = 0$. Кривая 3 соответствует случаю, когда оболочки упругие, а цилиндр обладает свойствами ползучести. На фиг. 3

представлен график изменения $q(x, t)$ для различных моментов времени t и когда $\tau_1(\xi) = \tau_0 = \text{const}$, $\tau_2 \neq \tau_0$ в третьем варианте загрузки оболочки. На фиг. 4 представлен график изменения $q(0, t)$ во времени, когда оболочки обладают свойствами ползучести, причем $\tau_1(\xi) = \tau_0 H(-\xi) + \tau_3 H(\xi)$ ($|\xi| < 1$), а основание (цилиндр) является чисто упругим.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В табл. 1 представлены значения K_{-1} и K_1 , причем для удобства их сравнения в первой строке записаны значения K_{-1} , а во второй строке — значения K_1 , когда имеет место первый вариант загрузки оболочки и $\tau_1(\xi) = \tau_0 = \text{const}$, $\tau_2 \neq \tau_0$. В табл. 2 приведены значения K_{-1} и K_1 при первом варианте загрузки, когда $\tau_1(\xi) = \tau_0 H(-\xi) + \tau_3 H(\xi)$ ($|\xi| < 1$), а цилиндр является чисто упругим телом. В табл. 3 приведены значения K_{-1} и K_1 при втором варианте загрузки оболочки, когда $\tau_1(\xi) = \tau_0 = \text{const}$, $\tau_2 \neq \tau_0$. В табл. 4 приведены значения K_{-1} и K_1 при первом же варианте загрузки оболочки, когда оболочки чисто упругие, а цилиндр обладает свойствами ползучести.

Из анализа указанных графиков и таблиц следует, что

а) Учет фактора неоднородности старения контактирующих тел по сравнению с упругим случаем приводит к существенному перераспределению контактных напряжений, причем в средней части контактной зоны напряжения обычно уменьшаются, а в крайних частях этой зоны они увеличиваются (фиг. 2, 3).

б) В первом варианте загрузки оболочки, когда $\tau_1(\xi) = \tau_0 H(-\xi) + \tau_3 H(\xi)$ ($|\xi| < 1$), а основание чисто упругое, контактные напряжения $q(0, t)$ с возрастанием τ_3 ($\tau_0 = \text{const}$) увеличиваются, стремясь к упругим напряжениям (фиг. 4).

в) Коэффициенты интенсивности в первом варианте загрузки оболочки при фиксированном моменте времени t с увеличением возраста основания τ_2 ($\tau_0 = \text{const}$) уменьшаются (табл. 1), а во втором и третьем варианте загрузки оболочки коэффициенты интенсивности с увеличением возраста основания увеличиваются (табл. 3). В последнем случае коэффи-

денты интенсивности при фиксированных τ_2 с возрастанием времени t уменьшаются.

Таблица 1

$\tau_0 = 7$ сут			
$t \backslash \tau_2$	14	28	45
7	0,382 0,104	0,382 0,104	0,382 0,104
14	0,362 0,169	0,351 0,161	0,344 0,156
28	0,346 0,180	0,333 0,172	0,324 0,164
56	0,340 0,189	0,329 0,176	0,321 0,170
∞	0,338 0,193	0,327 0,183	0,320 0,176

Таблица 2

$\tau_0 = 7$ сут			
$t \backslash \tau_2$	14	28	45
7	0,352 0,079	0,352 0,079	0,352 0,079
14	0,479 0,258	0,421 0,231	0,412 0,221
28	0,620 0,462	0,533 0,402	0,479 0,387
56	0,711 0,581	0,615 0,515	0,550 0,492
∞	0,726 0,591	0,621 0,532	0,561 0,509

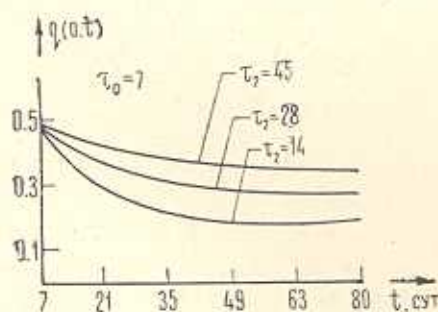
Таблица 3

$\tau_0 = 7$ сут			
$t \backslash \tau_2$	14	28	45
7	0,730 0,452	0,730 0,452	0,730 0,452
14	0,619 0,401	0,623 0,450	0,631 0,457
28	0,552 0,385	0,561 0,428	0,572 0,434
56	0,543 0,374	0,552 0,417	0,763 0,425
∞	0,535 0,369	0,542 0,411	0,557 0,419

Таблица 4

$t \backslash \tau_2$	7	14	45
7	0,382 0,104	—	—
14	0,550 0,214	0,382 0,104	—
28	0,743 0,372	0,655 0,278	—
56	0,874 0,391	0,749 0,313	0,382 0,104
∞	0,895 0,411	0,831 0,318	0,742 0,277

г) В первом варианте загрузки оболочек, когда $\tau_1(\dot{\epsilon}) = \tau_0 = \text{const}$, $\tau_2 \neq \tau_0$ при фиксированном значении τ_2 с возрастанием t K_{-1}



Фиг. 4.

уменьшается. При этом значения коэффициента интенсивности K_{-1} с учетом ползучести остаются меньшими значений K_{-1} в чисто упругом

случае. Для значений коэффициентов K_1 имеют место обратный эффект. Это явление объясняется фактором существенного влияния друга на друга ближних концов оболочек (табл. 1) В первом же варианте загрузки оболочек, когда $\tau_1(\xi) = \tau_0 H(-\xi) + \tau_3 H(\xi)$ ($|\xi| < 1$), а основание чисто упругое, коэффициенты интенсивности K_{-1} и K_1 при фиксированном значении τ_3 с возрастанием t увеличиваются. В асимптотическом случае (для больших t) они приближаются друг к другу, хотя в чисто упругом случае значения K_{-1} и K_1 существенно отличаются друг от друга (табл. 2).

Следует отметить, что характер распределения контактных напряжений существенно зависит от нагрузки, параметров ползучести и положения точки в контактной зоне. Никаким из этих факторов нельзя пренебречь.

ԱՌԱՉԳԱՄԱՅՈՒՑԻԿ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ ՊԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐՈՎ ՊԱՆՆԵՐԻ ՈՂՈՐՄԱՆ ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԳԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

.Զ. Ա. ԳԱՎԹՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԽԻՔԱՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում դիտարկված են անհամասեռորեն ծերացող մարմինների սողքի տեսության շրջանակներում, բարակ վերջավոր դլանային թաղանթներից հոծ դլանին կամ դլանային անցքով ստարածությանը ուժի փոխանցման երկու դիրման խնդիրներ, երբ փոխազդեցության մեջ գտնվող մարմիններն ունեն տարբեր հասակներ: Նշված խնդիրների լուծումներն Չերիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի օգնությամբ բերվում են Վոլտերայի ինտեգրալ համասարումների անվերջ համակարգերի, որոնց ուսումնասիրությունը կատարվում է սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա: Բերված են թվային օրինակներ:

ON TWO CONTACT PROBLEMS OF CYLINDER TORSION WITH THE AID OF CYLINDRICAL SHELLS TAKING INTO ACCOUNT THEIR VISCOELASTIC PROPERTIES

Z. A. DAVTIAN, S. M. MCHITARIAN

S u m m a r y

In terms of the creep theory of heterogeneously aging materials, two contact problems of torsion of cylinders with the aid of cylindrical shells of finite length are considered. It is assumed that the contacting elements possess properties of creeping and have different ages. The definition of contact stress is brought to a solution of a singular integrodifferential equation. With the help of Chebyshev's polynomial device the last equation then is reduced to an equivalent infinite system of Walter's linear integral equations.

Numerical results are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арцгюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.—Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
2. Арцгюнян Н. Х. О теории ползучести для неоднородно-стареющих сред.—ДАН СССР, 1976, т. 229, № 3.
3. Давтян Э. А. О двух задачах кручения усиленного тонким покрытием бесконечного цилиндра в условиях неоднородной ползучести.—ДАН Арм.ССР, 1979, т. 69, № 1.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1965.
5. Арцгюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
7. Арцгюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками.—ПММ, 1972, т. 36, № 5.
8. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.—ПММ, 1970, т. 34, № 3.
9. Люстерник А. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
6. X. 1982