

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

ПОТАПОВ В. Д.

Исследование устойчивости сжатых оболочек, материал которых обладает вязкоупругими свойствами, обычно проводится в квазистатической постановке, когда силы инерции, появляющиеся в процессе деформирования конструкции во времени, считаются малыми по сравнению с другими внешними нагрузками и в системе разрешающих уравнений теории оболочек опускаются. Такое допущение можно считать оправданным в том случае, когда движение оболочки происходит при малых ускорениях перемещений точек ее срединной поверхности. Если же внешние нагрузки настолько велики, что по истечении конечного промежутка времени (при квазистатической постановке задачи) наступает «хлопок» оболочки, то в момент «хлопка» и в моменты времени, непосредственно предшествующие ему и следующие за ним, наблюдается резкое изменение ускорений движения конструкции, а в такой ситуации пренебрежение силами инерции недопустимо. С этой точки зрения более правильное представление о поведении оболочки на всем интервале ее нагружения может быть получено только на основе рассмотрения задачи в динамической постановке.

Задача выпучивания сжатых круговых оболочек с учетом сил инерции решалась в работе Браунса Я. А. и Тетерса Г. А. [1]. Ими было показано, что учет инерционных членов дает решение с затухающими колебаниями непосредственно после приложения нагрузки и после «хлопка» около кривой квазистатического деформирования. Некоторые аспекты устойчивости оболочек при конечных прогибах в динамической постановке задачи рассмотрены в статьях [2, 3]. Качественному анализу деформирования нелинейных систем на примере фермы Мизеса посвящена работа [4]. Отмечается, что с позиций теории устойчивости движения вязкоупругая ферма Мизеса всегда является асимптотически устойчивой по Ляпунову. Авторами предложен критерий, в соответствии с которым конструкция устойчива на некотором отрезке времени, если ускорение движения сосредоточенной массы остается ограниченным при стремлении этой массы к нулю.

Ниже исследуется поведение оболочек на примере пологой удлиненной цилиндрической панели, материал которой обладает ограниченной вязкостью.

Рассмотрим оболочку, выполненную из изотропного материала с постоянным во времени коэффициентом Пуассона μ . Оболочка имеет массу, величину которой, приходящуюся на единицу площади срединной поверхности, примем равной m . Тогда уравнение движения для оболочки имеет вид

$$D\Gamma w^{IV} + Pw'' + \frac{P}{R} = q - m\ddot{w} \quad (1.1)$$

где

$$\Gamma w = w(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) w(\tau) d\tau, \quad E(t) = E = \text{const}$$

$\Gamma(t-\tau)$ — ядро релаксации, $0 < \int_0^{\infty} \Gamma(\theta) d\theta = G < 1$

$$P = -\frac{Eh}{(1-\mu^2)l} \Gamma \left(\frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx - \int_0^l \frac{w}{R} dx \right).$$

Остальные обозначения общепринятые.

В начале остановимся на оценке влияния динамических добавок на деформирование оболочек, находящихся под действием малой поперечной нагрузки.

При квазистатической постановке задачи прогибы оболочки в условиях ограниченной ползучести стабилизируются во времени, асимптотически приближаясь к значениям, определяемым так же, как в упругой оболочке, модуль упругости которой равен длительному модулю.

Рассмотрим возмущенное движение оболочки, которое вызвано возмущениями начальных условий $\delta w(0, x)$, $\delta \dot{w}(0, x)$. Считая начальные возмущения и возмущения в текущий момент времени малыми, линейризуем уравнение возмущенного движения (1.1) относительно возмущений

$$D\Gamma \delta w^{IV} + P \delta w'' + \delta P w'' + \frac{\delta P}{R} = -m \delta \ddot{w} \quad (1.2)$$

Примем

$$\delta w(t, x) = \delta f_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x, \quad w(t, x) = f_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x$$

Из уравнения (1.2) с помощью метода Бубнова—Галеркина получим

$$\Gamma \delta f_1 - 3 \left[P_0 \delta f_1 + \left(f_1 - \frac{4kh}{\pi^3} \right) \delta P_0 \right] = -\frac{m l^4}{\pi^4 D} \delta f_1 \quad (1.3)$$

где

$$P_0 = \Gamma \left(\frac{8k}{\pi^3} \frac{f_1}{h} - \frac{f_1^2}{h^2} \right), \quad \delta P_0 = \Gamma \left(\frac{8k}{\pi^3} - 2 \frac{f_1}{h} \right) \frac{\delta f_1}{h}, \quad k = \frac{l^2}{Rh}$$

Для исследования поведения возмущений δf_1 при достаточно больших значениях времени t перенесем начало его отсчета в $-\infty$. Тогда очевидно

$$f_1 = \text{const}, \quad P_0 = \left(\frac{8k}{\pi^3} \frac{f_1}{h} - \frac{f_1^2}{h^2} \right) (1-G) = \text{const}$$

Запишем уравнение (1.3) следующим образом:

$$\left[1 + 6 \left(\frac{f_1}{h} - \frac{4k}{\pi^2} \right)^2 \right] \left[\delta f_1(t) - \int_{-\infty}^t T(t-\tau) \delta f_1(\tau) d\tau \right] - 3P_0 \delta f_1(t) = - \frac{ml^4}{\pi^4 D} \delta \ddot{f}_1(t) \quad (1.4)$$

Его решение ищем в виде

$$\delta f_1(t) = c \exp(\lambda t) \quad (1.5)$$

После подстановки выражения (1.5) в уравнение (1.4) имеем

$$A \left[1 - \int_0^{\infty} T(\theta) \exp(-\lambda \theta) d\theta \right] - 3P_0 = - \frac{ml^4}{\pi^4 D} \lambda^2 \quad (1.6)$$

причем

$$A = 1 + 6 \left(\frac{f_1}{h} - \frac{4k}{\pi^2} \right)^2$$

Возьмем ядро $T(\theta)$ в виде

$$T(\theta) = \gamma K \exp(-\gamma(1+K)\theta)$$

Из уравнения (1.6) следует кубическое уравнение относительно λ .

$$\lambda^3 + \gamma(1+K)\lambda^2 + \frac{\pi^4 D}{ml^4} (A - 3P_0)\lambda + \gamma \frac{\pi^4 D}{ml^4} [A - 3P_0(1+K)] = 0 \quad (1.7)$$

Используя критерий Рауса-Гурвица, приведем условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (1.7)

$$A > 0, \quad A - 3(1+K)P_0 > 0 \quad (1.8)$$

При малых f_1 величина $P_0 > 0$ и, следовательно, при выполнении второго условия первое выполняется и подавно. Итак, окончательно имеем, что невозмущенное движение асимптотически устойчиво по Ляпунову по отношению к возмущению начальных условий, если справедливо неравенство (1.8), которое может быть представлено в виде

$$1 + 3 \left(3 \frac{f_1^2}{h^2} - \frac{24k}{\pi^2} \frac{f_1}{h} + \frac{32k^2}{\pi^4} \right) > 0 \quad (1.9)$$

В этом случае корнями уравнения (1.7) будут: один — отрицательный, два других — комплексно сопряженные.

По мере увеличения f_1 неравенство (1.9) сменится равенством, которое соответствует предельной точке q_s на кривой $q \sim f_1$ упругой оболочки с длительным модулем упругости ее материала. В этом случае один из корней λ становится нулевым и указанное равенство непосредственно вытекает из уравнения (1.7), если в нем положить $\lambda = 0$.

Таким образом, при $q < q_*$ оболочка асимптотически устойчива по отношению к симметричным возмущениям начальных условий

$$\delta w(0, x) = \delta f_1(0) \sin \frac{\pi}{l} x, \quad \delta \dot{w}(0, x) = \delta \dot{f}_1(0) \sin \frac{\pi}{l} x$$

Далее рассмотрим возмущенное движение оболочки при несимметричных возмущениях начальных условий

$$\delta w(0, x) = \delta f_2(0) \sin \frac{2\pi}{l} x, \quad \delta \dot{w}(0, x) = \delta \dot{f}_2(0) \sin \frac{2\pi}{l} x.$$

Предполагая возмущения $\delta w(t, x)$ малыми, воспользуемся линеаризованными уравнениями возмущенного движения (1.2), из которых при

$$\delta w(t, x) = \delta f_2(t) \sin \frac{2\pi}{l} x$$

следует

$$\Gamma \delta f_2 - \frac{3}{4} P_0 \delta f_2 = - \frac{ml^4}{16\pi^4 D} \delta \ddot{f}_2 \quad (1.10)$$

Решение уравнения (1.10) вновь ищем в виде (1.5). После подстановки выражения (1.5) в уравнение (1.10) получим

$$\left[1 - \int_0^{\infty} \Gamma(\theta) \exp(-\lambda\theta) d\theta \right] - \frac{3}{4} (1-G) \left(\frac{8k}{\pi^2} - \frac{f_1}{h} \right) \frac{f_1}{h} = - \frac{ml^4}{16\pi^4 D} \lambda^2 \quad (1.11)$$

В случае экспоненциального ядра отсюда имеем

$$\lambda^3 + \gamma(1+K)\lambda^2 + \frac{16\pi^4 D}{ml^4} \left(1 - \frac{3}{4} P_0^* \right) \lambda + \gamma \frac{16\pi^4 D}{ml^4} \left[1 - \frac{3}{4} (1+K) P_0^* \right] = 0$$

где

$$P_0^* = \frac{1}{1+K} \left(\frac{8k}{\pi^2} - \frac{f_1}{h} \right) \frac{f_1}{h}$$

Критерий Раусса-Гурвица приводит к неравенству

$$\frac{3}{4} (1+K) P_0^* < 1 \quad (1.12)$$

Нагрузку q , при которой неравенство (1.12) превращается в равенство, обозначим через q_* . Следовательно, невозмущенное движение оболочки асимптотически устойчиво по Ляпунову по отношению к несимметричным возмущениям начальных условий, если интенсивность нагрузки q меньше q_* .

Нагрузке q_4 отвечает нулевое значение одного из корней λ . Условие, из которого она определяется, может быть получено из уравнения (1.11), если положить в нем λ равным нулю.

Значения нагрузок q_3 и q_4 аналогично могут быть найдены в общем случае ядра релаксации $T(t-\tau)$, для чего достаточно в уравнениях (1.7) и (1.11) положить $\lambda = 0$.

Итак, если $q_3 > q_4$, то симметричное (невозмущенное) движение оболочки асимптотически устойчиво по Ляпунову по отношению к симметричным возмущениям начальных условий при $q < q_3$. Этот вывод согласуется с выводом, сделанным на основании квазистатической постановки задачи.

Если же $q_3 > q > q_4$, то оболочка неустойчива по Ляпунову по отношению к несимметричным возмущениям начальных условий.

К аналогичным выводам можно прийти, используя в качестве функции $w(t, x)$ конечную сумму

$$w(t, x) = \sum_{j=1}^n f_j(t) \sin \frac{j\pi}{l} x \quad (1.13)$$

Применяя метод Бубнова—Галеркина, из уравнения (1.1) в этом случае получим

$$\frac{m l^4}{j^4 \pi^4 D} \ddot{f}_j + \Gamma f_j - 3P_0 \left[\frac{f_j}{j^2} - \frac{2kh}{j^3 \pi^3} (1 - \cos j\pi) \right] = \frac{24(1 - \cos j\pi)}{j^3 \pi^3} h q^* \quad (1.14)$$

где

$$P_0 = \Gamma \sum_{j=1}^n \left[\frac{4k}{\pi^3} \frac{f_j}{jh} (1 - \cos j\pi) - j^2 \frac{f_j^2}{h^2} \right]$$

Удерживая в сумме (1.13) только нечетные слагаемые, найдем решение, соответствующее симметричному деформированию панели, на основании которого можно судить об устойчивости невозмущенного движения по отношению к симметричным возмущениям. Рассматривая в выражении (1.13) четные и нечетные слагаемые, можно оценить влияние аналогичных несимметричных возмущений на устойчивость движения оболочки.

На фиг. 1, 2 представлены результаты решения системы уравнений (1.14) при удержании в разложении (1.13) одного члена (кривые 2) для панели со следующими характеристиками: $K = 1$; $k = 12$; $\gamma^2 \frac{m l^4}{\pi^4 D} = 0,001$.

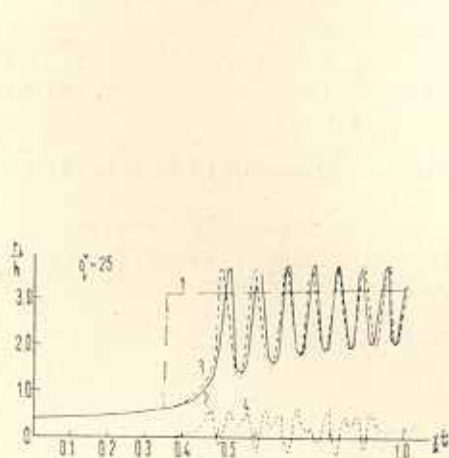
В качестве начальных условий здесь и в дальнейшем приняты условия, соответствующие квазистатической постановке задачи.

Для сравнения на тех же рисунках показаны графики изменения f_1 при квазистатической постановке (кривая 1), полученные из уравнения (1.1) при $m = 0$.

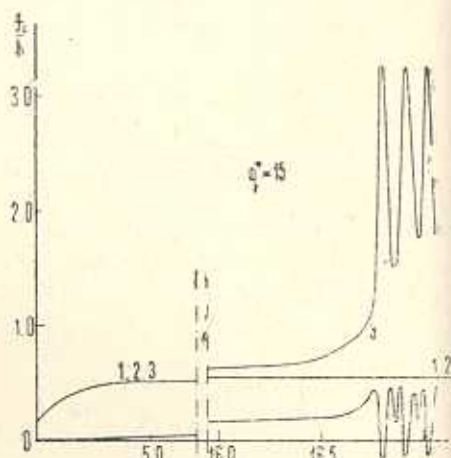
Как видно, неучет сил инерции приводит к существенному искажению действительной траектории движения оболочки. Указанная траектория является непрерывной при любой нагрузке и времени t , а при квазистатической постановке (если $q > q_3$) она терпит разрыв в момент «хлопка».

Из приведенных графиков следует, что на начальном этапе движения панели отличий в значениях функции $f_1(t)$, найденных при квазистатической и динамической постановках, практически нет. Однако, по мере приближения к моменту t_* (момент «хлопка») эти функции удаляются одна от другой. При $t > t_*$ движение оболочки носит затухающий характер. Ординаты кривой 2 (фиг. 1) с увеличением времени приближаются к ординатам кривой 1. Если учесть внутреннее трение материала, то затухание колебаний будет происходить значительно интенсивнее.

Заметим, что после «хлопка» оболочка совершает колебания относительно кривой, не совпадающей с кривой 1. С увеличением времени указанные кривые сближаются друг с другом и, исходя из уравнения (1.1), нетрудно показать, что при $t \rightarrow \infty$ эти кривые совпадают.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Кривые 3, 4 на фиг. 1, 2 соответствуют решению системы уравнений (1.14) при сохранении в разложении (1.13) двух первых членов (кривая 3 соответствует функции $f_1(t)$, а кривая 4 — функции $f_2(t)$). Несимметричная составляющая прогиба вызвана несимметричным возмущением нагрузки

$$\delta q_2^* \sin \frac{\pi}{l} x$$

($\delta q_2^* = 0,025$ при $q^* = 25$ и $\delta q_2^* = 0,133334$ при $q^* = 15$).

Помимо представленных было получено большое число решений системы уравнений (1.14) при различных возмущениях начальных условий, а также постоянно действующих возмущениях (начальное искривление срединной поверхности, возмущение нагрузки и т. п.), которые свидетельствуют о том, что невозмущенное движение оболочки устойчиво по отношению к малым симметричным и несимметричным возмущениям не только при $q < q_2$ или $q < q_1$, но и при нагрузках, больших q_3 . Этот вывод можно объяснить следующим образом.

С помощью процедуры Бубнова—Галеркина уравнение (1.1) сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений. При некоторых ограничениях, накладываемых на ядро интегрального оператора, можно показать, что решение системы непрерывно зависит от начальных условий и правой части. Итак, на любом сколь угодно большом конечном промежутке времени разница между траекториями невозмущенного и возмущенного движения оболочки за счет соответствующего выбора, например, начальных условий, может быть сделана как угодно малой. С увеличением времени колебания оболочки затухают и $\dot{f}_1(t) \rightarrow \text{const}$. Переносив начало отсчета времени в $-\infty$ и считая $\dot{f}_1(t) = \text{const}$, легко показать, используя критерий Раусса-Гурвица, что невозмущенное движение оболочки асимптотически устойчиво по Ляпунову по отношению к симметричным возмущениям начальных условий, если $q < q_{\max}$, причем q_{\max} равна верхней предельной нагрузке для упругой оболочки с модулем упругости, равным E , и несимметричным возмущениям начальных условий, если $q_{\max} > q > q_*$ и $q_* > q$.

Таким образом, из динамической постановки задачи следует, что невозмущенное движение оболочки неустойчиво только по отношению к несимметричным возмущениям начальных условий и только при $q_* > q > q_*$. Полученные результаты существенно отличаются от тех, которые следуют из квазистатической постановки задачи. Вместе с тем они не умаляют их важности. Дело в том, что при значениях времени t , близких к t_* , наблюдается резкое изменение в движении оболочки, которое заключается в изменении ее конфигурации — оболочка из выпуклой превращается в вогнутую. Такое изменение в реальных оболочках происходит в течение долей секунды и не случайно поэтому получило название «хлопка». Для правильной оценки работы сжатых вязкоупругих оболочек необходима фиксация времени «хлопка». Принимая во внимание тот факт, что масса реальных оболочек мала, а также то, что траектория движения таких оболочек с момента нагружения до момента «хлопка» мало отличается от траектории движения оболочки без массы (при отсутствии инерционных сил), естественно принять в качестве критического времени время t_* , которое определяется при квазистатической постановке задачи, как время «хлопка».

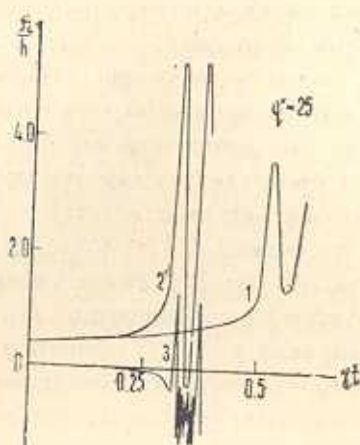
Обсуждаемые выводы относятся к случаю, когда симметричная и несимметричная составляющие прогиба оболочки описывались соответственно одним слагаемым. Использование большего числа членов в разложении прогиба (1.13) приведет к изменению количественных характеристик движения, но окончательные выводы относительно устойчивости оболочки остаются справедливыми и в этом случае.

Для сравнения на фиг. 3 показаны графики изменения $\dot{f}_1^*(t)$ (кривая 1) и $\dot{f}_1(t)$, $\dot{f}_2(t)$ (кривые 2, 3), соответствующие выражениям

$$w(t, x) = f_1^*(t) \sin \frac{\pi}{l} x$$

$$w(t, x) = f_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + f_2(t) \sin \frac{3\pi}{l} x$$

Геометрические параметры оболочки и ее материала приняты теми же, что и ранее.



Фиг. 3.

Из фиг. 3 видно, что учет большего числа членов в разложении функции $w(t, x)$ приводит иногда к значительному различию в траекториях движения панели, на что обращалось внимание в работе [5] при решении задачи в квазистатической постановке.

ԱՌԱՋԳԱՄԱՍՈՒՑԻԿ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՅԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Վ. Դ. ՊՈՏԱՊՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հավասարաչափ բաշխված բնդայնական բեռների ազդեցության տակ գտնվող երկարացված զլանային թեքվուն պահերի օրինակով հետազոտվում է թաղանթների կայունությունը, որոնց նյութը օժտված է սահմանափակ սողքի հասկությամբ: Դիտարկվում է սկզբնական պայմանների սիմետրիկ և անսիմետրիկ զրգոումների և մշտական զործող զրգոումների նկատմամբ պանելի շարժված շարժման կայունությունը: Բերվում է կվադրատատիկ և գինամիկ դրվածքների դեպքում խնդրի լուծման արդյունքների համեմատում:

ON STABILITY OF VISCOELASTIC SHELLS

V. D. POTAPOV

S u m m a r y

The paper deals with the stability of shells from material with property of bounded creep in the particular case of sloping lengthened cylindrical panel effected by uniformly distributed lateral loading. The

stability of undisturbed motion of the panel with respect to symmetric and antisymmetric perturbations of initial conditions and to constantly acting perturbations is studied. The comparison of the results for quasi-static and dynamic formulation of the problem is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Браунс Я. А., Тегерс Г. А. Деформирование вязкоупругих тонкостенных оболочек в закритической стадии.— Механика полимеров, 1976, № 1.
2. Huang N. C., Nachbar W. Dynamic snap-through of imperfect viscoelastic shallow arches. — Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, No. 2.
3. Колтунов М. А., Каримов А. И., Мавлянов Т. Об одном методе решения задачи динамической устойчивости тонкостенных вязкоупругих конструкций.— Механика композитных материалов, 1980, № 5.
4. Воронин И. И., Минакова Н. И., Шепелева В. Г. Некоторые вопросы устойчивости вязкоупругих и вязкопластических систем на примере фермы Мизеса.— Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 4.
5. Поганов В. Д. Об устойчивости вязкоупругих оболочек при длительном нагружении.— ПМ, 1980, т. 16, № 5.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию
8. II. 1982