ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 2, 1984 Механика

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОКОНЕСУЩЕЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

КАЗАРЯН К. Б.

В статической постановке рассмотрена задача устойчивости токонесущей пластинки-полосы во внешнем магнитном поле. Торцы пластинки неподвижны относительно вертикальных и горизонтальных перемещений. Аналогичные задачи в случае, когда один из торцов пластинки свободен в тангенциальном направлении, рассмотрены в работах [1, 2]. В настоящей работе задача устойчивости пластинки-полосы приведена к рассмотрению самосопряженной краевой задачи на собственные значения. С помощью вспомогательной краевой задачи, разрешаемой в элементарных функциях, найдена нижняя граница критической комбинации магнитного поля и электрического тока, при которой пластинка теряет устойчивость.

§ 1. Пусть пластинка-полоса толщины $2h$, ширины l отнесена к декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3). Срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью (x_1, x_2). Пластинка занимает область: $-l/2 \leqslant x_1 \leqslant l/2$, $-\infty < x_2 < \infty$, $-h < x_3 < h$. По пластинке по направлению оси x_2 течет равномерно распределенный по толщине электрический ток плотностью j_0. Пластинка находится во внешнем магнитном поле, вектор напряженности которого $\overline{H}_0$ перпендикулярен к срединной поверхности пластинки. Торцы пластинки $x = \pm l/2$ не получают горизонтальных и вертикальных перемещений.

Принимается, что электрический ток является несильным, что позволяет пренебречь собственным магнитным полем тока пластинки, а также не учитывать джоулево тепло.

При решении ограничимся статической постановкой в случае, когда деформации не зависят от координаты x_2.

Взаимодействие внешнего магнитного поля с электрическим током приводит к возникновению объемной силы Ампера, действующей в срединной поверхности пластинки по направлению оси x_1 (магнитное поле $\overline{H}_0$ антипараллельно оси x_3).

$$\overline{F} = F_0 \cdot \bar{i}_{x_1}, \qquad F_0 = \frac{1}{c} j_0 H_0 \tag{1.1}$$

($\bar{i}_{x_1}$ — единичный орт по направлению оси x_1).

В пластинке, торцы $x = \pm l/2$ которой неподвижны, возникнут следующие начальные напряжения:

$$\sigma_{x_1} = -\frac{1}{c}(j_0 H_0) x_1 \tag{1.2}$$

Как видно из формулы для σ_{x_1}, в пластинке при $x_1 > 0$ действуют сжимающие напряжения, а при $x_1 < 0$ — растягивающие напряжения. Отметим, что в случае пластинки, один из торцов которой свободен в тангенциальном направлении, возникают сжимающие или растягивающие напряжения в зависимости от направления магнитного поля [1, 5]. В рассматриваемой здесь пластинке изменение направления магнитного поля (тока) на противоположное приводит к изменению знака в формуле (1.2), то есть к изменению зон растягивающих и сжимающих напряжений.

Введем безразмерные параметры

$$x = \frac{2x_1}{l}; \qquad u = \frac{2w}{l}$$

(w — нормальное перемещение точек срединной плоскости пластинки).

Тогда уравнение устойчивости пластинки-полосы примет вид

$$u^{\mathrm{IV}} + \lambda (xu')' = 0 \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \tag{1.3}$$

В (1.3) $\lambda = j_0 H_0 h l^3 / 4cD$; $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$, а штрих означает дифференцирование по x.

Примем также, что пластинка шарнирно-оперта по краям $x = \pm 1$

$$u(\pm 1) = u''(\pm 1) = 0 \tag{1.4}$$

Отметим, что к краевой задаче (1.3), (1.4) приводится также задача устойчивости вертикально расположенного весомого стержня, торцы которого шарнирно-оперты и неподвижны относительно вертикальных и горизонтальных перемещений.

Краевая задача (1.3), (1.4) является самосопряженной.

Для определения верхней границы наименьшего положительного собственного числа, соответствующего критической комбинации электрического тока пластинки и внешнего магнитного поля, используем принцип Релея [7].

Согласно этому принципу

$$\lambda_1 \leqslant \int_{-1}^{1} (u'')^2 dx \bigg/ \int_{-1}^{1} x (u')^2 dx \tag{1.5}$$

где функции u такие, что удовлетворяют граничным условиям (1.4) и для которых знаменатель соотношения (1.5) положителен.

Функция $u = \sin \pi x + 4 \cos (\pi x/2)$ удовлетворяет этим условиям. Подставляя ее в (1.5), получим

$$\lambda_1 \leqslant 9\pi^4/80 \tag{1.6}$$

Для определения нижней границы λ_1 рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу:

$$\begin{cases} v_1^{IV} + \mu v_1'' = 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ v_2^{IV} - \mu v_2'' = 0 & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$v_1(0) = v_2(0); \quad v_1'(0) = v_2'(0); \quad v_1''(0) = v_2''(0)$$

$$v_1'''(0) + \mu v_1'(0) = v_2'''(0) - \mu v_2'(0) \tag{1.7}$$

$$v_1(1) = v_1''(1) = 0; \quad v_2(-1) = v_2''(-1) = 0$$

Положительные собственные числа и соответствующие им собственные функции этой задачи имеют вид

$$\mu_n = (\pi n)^2$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 2\sin \pi n x - \pi n(x-1) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi n(x+1) & -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

$n = 1;\ 2;\ 3;\ldots$

Задача (1.7) эквивалентна задаче устойчивости стержня, концы которого неподвижны и шарнирно-оперты, нагруженного в середине сосредоточенной неследящей силой [3].

Укажем несколько свойств функций φ_n

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, \varphi_n'(x)\, \varphi_k'(x)\, dx = 0; \quad n \neq k$$

$$\mu_n = \int_{-1}^{1} (\varphi_n'')^2\, dx \Bigg/ \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, (\varphi_n')^2\, dx \tag{1.9}$$

$$0 < \int_{-1}^{1} x\, (\varphi_n')^2\, dx < \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, (\varphi_n')^2\, dx$$

Используя соотношения (1.9), на основе теоремы сдвига, доказанной в работе [4], можно показать, что

$$\lambda_n \geqslant \mu_n \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует, что

$$\lambda_1 \geqslant \pi^2 \tag{1.11}$$

Таким образом, из (1.6) и (1.11) имеем

$$\pi^2 \leqslant \lambda_1 \leqslant \frac{9\pi^4}{80}$$

Среднее значение $\lambda_1 \approx 10{,}41$ и, следовательно, ошибка не более 5,2%.

§ 2. Окончательно, для критической комбинации $f_{кр} = j_0 H_0/c$ имеем следующую формулу:

$$f_{кр} \approx 41{,}64 \frac{D}{hl^3} \tag{2.1}$$

Отметим, что для консольной токонесущей пластинки $f_{кр} = 3{,}91\, Dhl^3$ [1—2], а для пластинки, жестко защемленной по двум краям относительно прогиба w и свободной по одному краю в тангенциальном направлении, $f_{кр} = 37{,}31\ D/hl^3$ [2].

Рассмотрим численный пример.

По алюминиевой пластинке толщины $2h = 0{,}02$ см течет электрический ток плотностью $j_0 = 2{,}1$ кА/см^2. Температура нагрева этой пластинки, обусловленная джоулевым теплом, не превышает 200° С [5—6]. Тогда, если ширина пластинки $l = 7$ см; $l = 10$ см, то критическая напряженность внешнего магнитного поля, при которой пластинка теряет устойчивость, равна, соответственно, $H_0 = 2{,}8 \cdot 10^4$ э; $H_0 = 0{,}96 \cdot 10^4$ э.

ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՍԱԼԻ-ՇԵՐՏԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Ստատիկ դրվածքով դիտարկված է արտաքին մագնիսական դաշտում գտնվող հոսանքատար սալի կայունության խնդիրը: Սալը ամրացված է անշարժ հոդակապերով:

Կայունության խնդրի լուծումը բերված է սեփական արժեքների ինքնահամալուծ եզրային խնդրի ուսումնասիրության: Բավարար ճշտությամբ գտնված են մագնիսական դաշտի և էլեկտրական հոսանքի կրիտիկական կոմբինացիայի վերին և ստորին սահմանները: Ներկայացված են թվային օրինակներ:

ON SOME STABILITY PROBLEM FOR CURRENT-CARRYING PLATE-STRIP IN AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

K. B. KAZARIAN

Summary

By means of a statical approach the strability problem is considered for the current-carrying plate in an external magnetic field. The plate edges are simply supported and are fixed in normal and tangential directions. The stability problem is reduced to the investigation of selfadjoint eigenvalue boundary problem. With sufficient accuracy the lower and upper bounds for the critical combination of magnetic field and electrical current are obtained. Numerical examples are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Лизарев А. Д.* О решениях задач теории колебаний и устойчивости токонесущей пластины.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 34, № 4.
3. *Феодосьев В. И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400 с.
4. *Пнюэли.* Определение нижней границы собственных значений в одномерных задачах путем сдвига в весовой функции.— ПМ, Тр. американского общества инженеров-механиков, русский перевод, 1970, т. 37, серия Е, № 2.
5. *Овакимян Р. Н., Косакян Ю. И., Мартиросян Р. М.* Экспериментальное исследование устойчивости токонесущей пластинки в магнитном поле.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. 27, № 6.
6. *Белубекян М. В., Казарян К. Б.* К задаче термоупругой устойчивости токонесущих пластин.— ПМ, 1975, т. 11, № 12.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 238 с.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
13. VII. 1982