ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 2, 1984 Механика

НЕКОТОРЫЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩИХ СРЕД

АЛЕКСАНДРОВ В. М., КОВАЛЕНКО Е. В., МАНЖИРОВ А. В.

В настоящей работе даются решения некоторых плоских (случай плоской деформации) смешанных задач теории ползучести неоднородно-стареющих сред. Процессы неоднородного старения связаны с технологией возведения и изготовления реальных конструкций. Такие процессы происходят при последовательном возведении объектов из стареющих материалов (бетон, древесина, полимеры, композиты) — случай естественного старения, а также при действии на эти объекты облучения, температуры и т. д. — искусственное старение.

Рассмотрены контактные задачи для многослойных неоднородно-стареющих вязкоупругих оснований в предположении, что верхний слой — тонкий[1] неоднородно-стареющий, а нижний, толщины H, — однородно-стареющий, жестко или шарнирно защемленный по основанию.

Смешанные задачи приведены к интегральному уравнению второго рода относительно контактных напряжений, содержащему операторы Фредгольма и Вольтерра. Получены разложения для основных характеристик явления. Изучены случаи искусственного и естественного старения многослойного пакета. Приведены числовые расчеты характерных величин

1. Рассмотрим контактные задачи о вдавливании без трения силой P, эксцентриситет приложения которой относительно центра линии контакта равен e, жесткого штампа в поверхность неоднородно-стареющего вязкоупругого тонкого слоя: 1) лежащего без трения на поверхности однородно-стареющего слоя толщины H; 2) сцепленного с поверхностью неоднородно-стареющего вязкоупругого стержневого основания $(-l \leqslant x_2 \leqslant 0)$, которое в свою очередь подстилается однородно-стареющим слоем толщины H (фиг. 1). При этом нижний слой (2) покоится на недеформируемом основании, а вне штампа поверхность верхнего слоя (1) не нагружена. Кроме того, в силу условия контакта при $x_2 = h$ под штампом

$$u_2^1 = -[\delta(t) + \alpha(t)x_1 - g(x_1)] \quad (|x_1| < a) \tag{1.1}$$

где $\delta(t) + \alpha(t)x_1$ — жесткое перемещение штампа под действием силы P и момента $M = Pe$, $g(x_1)$ — форма основания штампа.

Исследуем вспомогательные задачи о равновесии тонкого неоднородно-стареющего слоя $(|x_1| < \infty,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant h)$ при краевых условиях

[1] Слой будем считать тонким, если длина участка его активного загружения велика по сравнению с толщиной слоя.

$$1')\quad x_2 = h:\qquad \sigma_{12}^1 = 0,\ \sigma_{22}^1 = -q^*(x_1,\ t) \tag{1.2}$$

$$x_2 = 0:\qquad \sigma_{12}^1 = 0,\ u_2^1 = B\sigma_{22}^2$$

$$2')\quad x_2 = h:\qquad \sigma_{12}^1 = 0,\ \sigma_{22}^1 = -q^*(x_1,\ t) \tag{1.3}$$

$$x_2 = 0:\qquad u_1^1 = 0,\ u_2^1 = B\sigma_{22}^2$$

где B — некоторый линейный оператор, вид которого будет указан ниже.

Приближенные решения краевых задач (1.2), (1.3) запишутся в виде (их можно получить на основе [1, 2])

$$1')\quad \sigma_{11}^1 = 0,\ \sigma_{12}^1 = 0,\ \sigma_{22}^1 = -q^*(x_1,\ t) \tag{1.4}$$

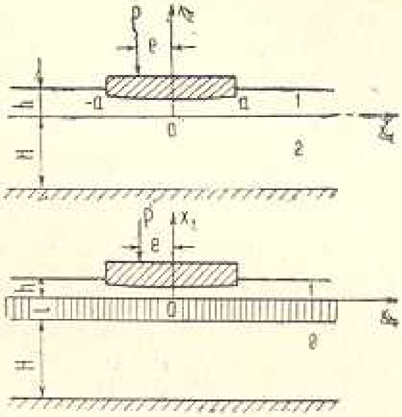
$$\varepsilon_{22}^1 = -\frac{1-\nu_1^2}{E_1}(I - L_1)\, q^*(x_1,\ t)$$

$$2')\quad \sigma_{11}^1 = -\nu_1(1-\nu_1)^{-1} q^*(x_1,\ t)$$

$$\sigma_{22}^1 = -q^*(x_1,\ t) \tag{1.5}$$

$$\sigma_{12}^1 = -\nu_1(1-\nu_1)^{-1}(h - x_2)\,[q^*(x_1,\ t)]_{x_1}$$

$$\varepsilon_{22}^1 = -\frac{1-\nu_1-2\nu_1^2}{(1-\nu_1)E_1}(I - L_1)\, q^*(x_1,\ t)$$



Фиг. 1.

$$L_1\varphi(x,\ t) = \int_{\tau_0}^{t} \varphi(x,\ \tau)\, K_1(t + \varkappa(x_2),\ \tau + \varkappa(x_2))\, d\tau$$

$$K_1(t,\ \tau) = E_1 \frac{\partial}{\partial \tau} C_1(t,\ \tau)$$

где I — тождественный оператор, E_1 — модуль упруго-мгновенной деформации, $K_1(t,\ \tau)$ — ядро ползучести, $C_1(t,\ \tau)$ — мера ползучести при простом растяжении, $\varkappa(x_2)$ — функция неоднородного старения, $\nu_1 = \mathrm{const}$ — коэффициент Пуассона.

Удовлетворяя с помощью (1.4), (1.5) четвертым краевым условиям (1.2) и (1.3), будем иметь при $x_2 = h$

$$1')\qquad u_2^1 = -\frac{1-\nu_1^2}{E_1} h \left\{ q^*(x_1,\ t) - \int_{\tau_0}^{t} q^*(x_1,\ \tau) \frac{1}{h} \int_0^h K_1[t + \varkappa(x_2),\ \tau + \varkappa(x_2)]\, dx_2 d\tau \right\} - Bq^*(x_1,\ t) \tag{1.6}$$

$$2')\quad u_2^1 = -\frac{1-\nu_1-2\nu_1^2}{(1-\nu_1)E_1} h \left\{ q^*(x_1,\ t) - \int_{\tau_0}^{t} q^*(x_1,\ \tau) \frac{1}{h} \int_0^h K_1[t + \varkappa(x_2),\ \tau + \varkappa(x_2)]\, dx_2 d\tau \right\} - Bq^*(x_1,\ t) \tag{1.7}$$

Для однородно-стареющего слоя (2) в случае плоской деформации с помощью принципа соответствия в линейной теории ползучести стареющих сред [3] и результатов монографии [4] при 1′) $x_2 = 0$ и 2′) $x_2 = -l$ имеем

$$u_2^2 = \frac{1}{\pi\theta_2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{22}^2\Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=-l}} k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right)\left[1 - \int_{\tau_0}^{t} K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1)\right] d\tau d\xi\right\} \quad (1.8)$$

$$k(z) = \int_0^{\infty} N(\xi)\cos\xi z d\xi$$

1′) $\theta_2 = E_2[2(1-\nu_2^2)]^{-1}$, 2′) $\theta_2 = 2E_2(1-\nu_2)[(1+\nu_2)(3-4\nu_2)]^{-1}$

где τ_1 — момент изготовления элементов нижнего слоя.

Известно [4], что:

1. Функция $N(\xi)$ — непрерывна, вещественна и четна на действительной оси;

2. $$N(\xi) > 0 \quad (|\xi| < \infty) \quad (1.9)$$

3. $N(\xi)\xi = A_1\xi + O(\xi^3)\ (\xi \to 0)$, $N(\xi)\xi = 1 + O(\exp(-A_2\xi))\ (\xi \to \infty)$

$$A_1,\ A_2 = \text{const}$$

Учитывая в задаче 2), что по толщине стержневого слоя ($u_1^c \equiv 0$) σ_{22}^2 не изменяется по x_2, найдем при $x_2 = 0$

$$u_2^c = \frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma}(I - L^c)\, l\, \frac{\sigma_{22}^1}{E^c} +$$

$$+ \frac{1}{\pi\theta_2}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{22}^1 k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right)\left[1 - \int_{\tau_0}^{t} K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1)\right] d\tau d\xi \quad (1.10)$$

где величины и операторы имеют вид (1.5) с индексом, соответствующим стержневому основанию, а σ — коэффициент Пуассона этого основания.

Подставляя в соотношения (1.6), (1.7) при $|x_1| \leqslant a$ функции $q^*(x_1, t) = q(x_1, t)$, u_2^1 в форме (1.1) и полагая в них согласно (1.8), (1.10)

1′) $$B(\ldots) = \frac{1}{\pi\theta_2}\int_{-\infty}^{\infty} (\ldots)\, k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right)\left[1 - \int_{\tau_0}^{t} K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1)\right] d\tau d\xi$$

2′) $$B(\ldots) = \frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma}(I - L^c)(\ldots)\, l\, \frac{1}{E^c} +$$

$$+ \frac{1}{\pi\theta_2}\int_{-\infty}^{\infty} (\ldots)\, k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right)\left[1 - \int_{\tau_0}^{t} K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1)\right] d\tau d\xi$$

получим интегральные уравнения для определения неизвестных под штампом контактных давлений

$$1^\circ)\quad \frac{h}{2\theta_1}\left\{q(x_1, t) - \frac{1}{h}\int_{\tau_0}^{t} q(x_1, \tau)\int_0^h K_1[t+\varkappa(x_2), \tau+\varkappa(x_2)]\,dx_2 d\tau\right\} +$$

$$+\frac{1}{\pi\theta_2}\int_{-a}^{a} q(\xi, \tau)\, k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right)\left[1 - \int_{\tau_0}^{t} K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1)\right] d\tau d\xi = \tag{1.11}$$

$$= \delta(t) + \alpha(t)\, x_1 - g(x_1)\left(|x_1| \leqslant a,\ \tau_0 \leqslant t \leqslant T < \infty,\ \theta_1 = \frac{E_1}{2(1-\nu_1^2)}\right)$$

$$2^\circ)\ \frac{h}{2\theta_1}\left\{q(x_1, t) - \frac{1}{h}\int_{\tau_0}^{t} q(x_1, \tau)\int_0^h K_1[t+\varkappa(x_2), \tau+\varkappa(x_2)]\,dx_2 d\tau\right\} +$$

$$+\frac{l}{2\theta^c}\left\{q(x_1, t) - \frac{1}{l}\int_{\tau_0}^{t} q(x_1, \tau)\int_{-l}^{0} K^c[t+\varkappa^c(x_2), \tau+\varkappa^c(x_2)]\,dx_2 d\tau\right\} +$$

$$+\frac{1}{\pi\theta_2}\int_{-a}^{a} q(\xi, \tau)\, k\left(\frac{\xi - x_1}{H}\right)\left[1 - \int_{\tau_0}^{t} K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1)\right] d\tau d\xi = \tag{1.12}$$

$$= \delta(t) + \alpha(t)\, x_1 - g(x_1) \qquad \Big(|x_1| \leqslant a,\ \tau_0 \leqslant t \leqslant T < \infty,$$

$$\theta_1 = \frac{E_1(1-\nu_1)}{2(1-\nu_1-2\nu_1^2)},\quad \theta^c = \frac{E^c(1-\sigma)}{2(1-\sigma-2\sigma^2)}\Big)$$

К уравнениям (1.11), (1.12) необходимо еще добавить условия статики

$$P = \int_{-a}^{a} q(x_1, t)\,dx_1,\qquad M = Pe = \int_{-a}^{a} x_1 q(x_1, t)\,dx_1 \tag{1.13}$$

выражающие условия равновесия штампа на основании.

Поскольку решения уравнений (1.11), (1.12) математически эквивалентны, то в дальнейшем приведем исследование только интегрального уравнения (1.11). Кроме того, будем рассматривать только четный вариант ($\alpha(t) \equiv 0$, $g(x_1)$ — четная функция поставленной задачи), имея в виду, что для нечетного случая все может быть проделано аналогично.

С учетом обозначений

$$\xi^* = \xi a^{-1},\ x^* = x_1 a^{-1},\ t^* = t\tau_0^{-1},\ T^* = T\tau_0^{-1},\ c = 0{,}5\pi h a^{-1}\theta_2\theta_1^{-1}$$

$$\varkappa^*(x_2) = \varkappa(x_2)\tau_0^{-1},\quad q^*(x^*, t^*) = \theta_2^{-1} q(x_1, t),\ g^*(x^*) = a^{-1} g(x_1)$$

$$E_j C_j(t, \tau) = C_j^*(t^*, \tau^*),\ K_j^*(t^*, \tau^*) = \frac{\partial}{\partial \tau^*} C_j^*(t^*, \tau^*)\quad (j = 1, 2)$$

$$\lambda = Ha^{-1},\ \delta^*(t^*) = a^{-1}\delta(t),\ P^* = (a\theta_2)^{-1}P,\ \tau_1^* = \tau_1\tau_0^{-1}$$

(звездочку далее опустим), получим

$$c\left[q(x, t)-\int_{1}^{t} q(x, \tau)\,\overline{K}_1(t, \tau)\,d\tau\right]+\int_{-1}^{1} q(\xi, t)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi-$$

$$-\int_{1}^{t} K_2(t-\tau_1, \tau-\tau_1)\int_{-1}^{1} q(\xi, \tau)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi\,d\tau=\pi\left[\delta(t)-g(x)\right] \tag{1.14}$$

$$(|x|\leqslant 1,\ 1\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

$$\overline{K}_1(t, \tau)=\frac{1}{h}\int_{0}^{h} K_1[t+\varkappa(x_2),\ \tau+\varkappa(x_2)]\,dx_2$$

$$P=\int_{-1}^{1} q(x, t)\,dx \tag{1.15}$$

Заметим, что при $t=1$ уравнение (1.14) и условие (1.15) принимают известный [5] вид

$$cq(x, 1)+\int_{-1}^{1} q(\xi, 1)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi\left[\delta(1)-g(x)\right]\quad(|x|\leqslant 1) \tag{1.16}$$

$$P=\int_{-1}^{1} q(x, t)\,dx$$

В силу соотношений (1.9) и результатов работы [5] можно утверждать:

1. Оператор

$$Rq=\int_{-1}^{1} q(\xi)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi \tag{1.17}$$

является самосопряженным, вполне непрерывным и положительно определенным оператором, действующим из $L_2(-1, 1)$ в $L_2(-1, 1)$;

2. Характеристические числа β_i оператора (1.17) вещественны, положительны и $\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\ldots\leqslant\beta_i\leqslant\ldots,\ \beta_i\sim i(\ln i)^{-1}$;

3. Если функция $g(x)\in L_2(-1, 1)$, то решение интегрального уравнения (1.16) в пространстве $L_2(-1, 1)$ существует и единственно при любых значениях параметров $c, \lambda\in(0, \infty)$.

4. Перейдем теперь к построению решения уравнения (1.14) при условии (1.15). В соответствии с алгоритмом, изложенным в [6, 7], наряду с (1.14) рассмотрим эквивалентное ему интегральное уравнение

$$c\left[q(x,t)-q(x,1)-\int_1^t q(x,\tau)\overline{K}_1(t,\tau)\,d\tau\right]+$$

$$+\left\{\int_{-1}^{1}[q(\xi,t)-q(\xi,1)]k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)-\int_1^t K_2(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\times\right. \tag{2.1}$$

$$\left.\times\int_{-1}^{1} q(\xi,\tau)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi d\tau\right\}=\pi[\delta(t)-\delta(1)]\,(|x|\leqslant 1,\ 1\leqslant t\leqslant T<\infty)$$

и будем искать его решение в форме

$$q(x,t)=q_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty}z_i(t)\,q_i(x) \tag{2.2}$$

$$\delta(t)=\delta y(t)+\delta_0+\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i\,y_i(t) \tag{2.3}$$

где δ, δ_i $(i=0,\ 1,\ 2\ldots)$ — постоянные.

Подставляя (2.2), (2.3) в уравнение (2.1), получим

$$cq_0(x)\int_1^t\overline{K}_1(t,\tau)\,d\tau+\int_1^t K_2(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}q_0(\xi)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi d\tau=\pi\delta[y(1)-y(t)] \tag{2.4}$$

$$\int_1^t z_i(\tau)\,[K_2(t-\tau_1,\tau-\tau_1)+\alpha_i c\overline{K}_1(t,\tau)]\,d\tau=$$

$$=(1+\alpha_i c)\,[z_i(t)-z_i(1)] \tag{2.5}$$

$$y_i(t)-y_i(1)=z_i(t)-z_i(1)-\int_1^t z_i(\tau)\,K_2(t-\tau_1,\tau-\tau_1)\,d\tau \tag{2.6}$$

$$\alpha_i Rq_i=q_i+\pi\alpha_i\delta_i \tag{2.7}$$

$$|x|\leqslant 1,\ 1\leqslant t\leqslant T<\infty,\ i\geqslant 1$$

Напомним, что с учетом [3]

$$C_2(t,\tau)=\varphi_2(\tau)f(t-\tau)$$

$$\overline{C}_1(t,\tau)=\frac{1}{h}f(t-\tau)\int_0^h\varphi_1(\tau+\varkappa(x_2))\,dx_2=\overline{\varphi}_1(\tau)f(t-\tau)$$

откуда перепишем (2.4) в форме

$$cq_0(x)\,\overline{C}_1(t,\,1)+C_2(t-\tau_1,\,1-\tau_1)\int_{-1}^{1}q_0(\xi)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=$$

$$=\pi\delta[y(t)-y(1)] \tag{2.8}$$

Полагая в (2.8)

$$y(t)=\overline{C}_1(t,\,1),\ y(1)=0,\ F=\varphi_2(1-\tau_1)\overline{\varphi}_1^{-1}(1) \tag{2.9}$$

найдем $q_0(x)$ из следующего интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$cq_0(x)+F\int_{-1}^{1}q_0(\xi)\,k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi\delta\,(|\,x\,|\leqslant 1) \tag{2.10}$$

метод решения которого детально изложен в [5].

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма (2.7) и будем искать его решение в виде ряда Фурье по ортонормированной на отрезке $[-1,\,1]$ системе полиномов Лежандра, составляющей базис [8] в $L_2\,(-1,\,1)$

$$q_i(x)=\pi\sqrt{2}\,\alpha_i\,\delta_i\sum_{j=0}^{\infty}a_j^iP_{2j}^{*}(x),\qquad P_j^{*}(x)=\sqrt{\frac{1+2j}{2}}\,P_j(x) \tag{2.11}$$

Разлагая ядро (2.10) в двойной ряд по указанной системе многочленов

$$k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}r_{mn}(\lambda)\,P_{2m}^{*}(\xi)\,P_{2n}^{*}(x) \tag{2.12}$$

и подставляя (2.11), (2.12) в (2.7) с учетом ортогональности полиномов Лежандра, получим (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$\alpha_i\sum_{j=0}^{\infty}r_{nj}(\lambda)\,a_j^i=a_n^i+\delta_{0n}\quad (i\geqslant 1,\ n=0,\,1,\,2\ldots) \tag{2.13}$$

Согласно неравенству

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}r_{mn}^2(\lambda)=A<\infty,\ A=\mathrm{const}$$

вытекающему из (1.9), (1.17), можно утверждать, что оператор, стоящий в левой части (2.13), действует из полного пространства квадратично суммируемых последовательностей l_2 в l_2 при любых значениях $\lambda\in(0,\,\infty)$ и является там вполне непрерывным; а тогда, если основной определитель системы (2.13) Δ отличен от нуля, то к ней применима теорема Гильберта [8] о ее разрешимости.

Легко показать, что в силу $P=\mathrm{const}$

$$a_0^i=0\ (i\geqslant 1),\ \ P=\int_{-1}^{1}q_0(x)\,dx \tag{2.14}$$

Это условие служит для определения неизвестных величин α_i. Действительно, из системы (2.13) имеем $a_0^i = \Delta_1 \Delta^{-1}$, где Δ_1 — вспомогательный определитель, получающийся из основного заменой в нем первого столбца элементами $\{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$. Определитель Δ_1 — симметричный, поэтому корни его $\alpha = \alpha_i$ $(i \geqslant 1)$ вещественны. Подставляя α_i в систему (2.13), найдем a_j^i $(j = 1, 2\ldots)$ и, таким образом, построим последовательность функций $\{q_i(x)(\pi\sqrt{2}\,\alpha_i \delta_i)^{-1}\}$.

Удовлетворим теперь выбором счетного множества постоянных δ_i и $z_i(1)$ $(i \geqslant 1)$ интегральному уравнению (2.18). Предполагая, что $g(x) \in L_2(-1, 1)$, представим ее в виде

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_{2n}^*(x), \quad \{g_n\} \in l_2 \tag{2.15}$$

Подставляя (2.12), (2.15) в (1.16), получим

$$cX_j + \sum_{n=0}^{\infty} r_{jn} X_n = \pi[\sqrt{2}\,\delta(1)\delta_{0j} - g_j] \quad (j = 0, 1\ldots) \tag{2.16}$$

$$X_j = \int_{-1}^{1} q(x, 1)\, P_{2j}^*(x)\, dx \tag{2.17}$$

Решив бесконечную алгебраическую систему (2.16), из соотношения (2.17) с учетом формулы

$$q(x, 1) = q_0(x) + \pi\sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_i z_i(1) \sum_{j=0}^{\infty} a_j^i P_{2j}^*(x)$$

будем иметь

$$Dz(1) = b, \quad b \in l_2, \tag{2.18}$$

$$D = \pi\sqrt{2}\,\|\alpha_i \delta_i a_j^i\|, \qquad b = \left\{X_j - \int_{-1}^{1} q_0(x)\, P_{2j}^*(x)\, dx\right\}, \quad z(1) = \{z_i(1)\}$$

$$(i = 1, 2, \ldots;\ j = 0, 1, 2, \ldots)$$

Остановимся подробнее на решении системы (2.18). Во-первых, принимая во внимание результаты работы [9], можно утверждать, что $\beta_{2i} < \alpha_i < \beta_{2i+2}$ $(i \geqslant 1)$. Во-вторых, полагая $\delta_i = \alpha_i^{-3/2}$ (будет обосновано ниже), в силу (2.13)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_i \delta_i a_j^i]^2 < \infty$$

то есть оператор D является вполне непрерывным из l_2 в l_2.

Элемент $z(1) \in M$ (множество равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных в l_2 последовательностей) назовем квазирешением [10—12] уравнения (2.18) на M, если

$$\inf \{ \| Dz(1) - b \|_{l_2} : z(1) \in M \}$$

Наряду с (2.18) введем урезанную систему

$$D^* z^*(1) = b^* \tag{2.19}$$

$$D^* = \pi \sqrt{2} \| \alpha_i \delta_i a_j^i \|, \quad b^* = \left\{ X_j - \int_{-1}^{1} q_0(x) P_{2j}^*(x)\, dx \right\}, \quad z^*(1) = \{ z_i(1) \}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Доказано [11, 12], что если оператор D^{-1} (не обязательно ограниченный) существует, то квазирешение уравнения (2.18) на компакте M также существует, единственно и непрерывно зависит от правой части b. Кроме того,

$$\lim_{n \to \infty} \| z(1) - z^*(1) \|_{l_2} = 0$$

а $z^*(1)$ в (2.19) может быть найдено, например, методом работы [10].

Заметим, что в системе (2.16) $\delta(1)$ можно считать независимым от δ_i $(i \geq 1)$, ибо

$$\delta(1) = \delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i y_i(1),$$

и определяется в ходе решения задачи через значение вдавливающей силы P. Связь между величинами P и δ находится из соотношений (2.10), (2.14).

Зная $z_i(1)$, можем найти $z_i(t)$ из интегрального уравнения Вольтерра второго рода (2.5). В случае, когда $f(t-\tau) = 1 - \exp(-\gamma(t-\tau))$, $z_i(t)$ запишем в форме

$$z_i(t) = z_i(1) \left[1 + \int_1^t R_i(t, \tau)\, d\tau \right] \tag{2.20}$$

где $R_i(t, \tau)$ — резольвента ядра Н. Х. Арутюняна

$$H_i(t, \tau) = \frac{1}{1 + c\alpha_j} \frac{\partial}{\partial \tau} \{ [\varphi_2(\tau - \tau_1) + c\alpha_j \overline{\varphi}_1(\tau)] (1 - \exp(-\gamma(t - \tau))) \}$$

вид которой приведен в [3].

Наконец, используя соотношение (2.6), построим последовательность функций $\{y_i(t)\}$

$$y_i(t) = z_i(t) + z_i(1) C_2(t - \tau_1, 1 - \tau_1) +$$

$$+ \int_1^t z_i(\tau) C_2(t - \tau_1, \tau - \tau_1)\, d\tau, \quad y_i(1) = z_i(1) \tag{2.21}$$

а вместе с тем и решение поставленной задачи $q(x, t)$ и $\delta(t)$.

Для окончательного обоснования построенного решения следует доказать сходимость рядов (2.2), (2.3), а также линейную независимость системы функций $\{y_i(t)\}$. Последнее условие должно проверяться непосредственно, используя формулы (2.20), (2.21). Отметим только, что в рассматриваемом нами случае оно выполняется.

Теорема. Ряд (3.2) сходится в $L_2(-1, 1)$ равномерно по t на сегменте $[1, T]$ и определяет обобщенное решение уравнения (2.1).

Действительно, оценим остаток ряда

$$S = \left\| \sum_{n=j}^{\infty} z_n(t) \, q_n(x) \right\|^2_{L_2(-1, 1)} \leqslant \sum_{m, n=j}^{\infty} z_n(t) \, z_m(t) \, (q_m, q_n)_{L_2(-1, 1)}$$

Поскольку

$$(q_i, q_j)_{L_2(-1, 1)} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^i a_n^j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi^2}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (a_n^i)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^j)^2 \right]^{1/2} \leqslant \frac{2\pi^2}{\sqrt{\alpha_i \alpha_j}} A_3$$

$$A_3 = \text{const}; \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

то

$$S \leqslant 2\pi^2 A_3 \sum_{n=j}^{\infty} |\alpha_n^{-1/2} z_n(t)| \sum_{m=j}^{\infty} |\alpha_m^{-1/2} z_m(t)| < \varepsilon \quad (j \to \infty) \tag{2.22}$$

где ε — сколь угодно малое число. Здесь использовано замечание о поведении α_i при $i \to \infty$ и факт ограниченности $z_i(t) \, [z_i(1)]^{-1}$.

Если выполнено неравенство (2.22), то ряд (2.2) сходится в $L_2(-1, 1)$ равномерно по $t \in [1, T]$ и согласно [13] определяет обобщенное решение уравнения (2.1).

Равномерная сходимость ряда (2.3) следует из поведения δ_i при $i \to \infty$ и формул (2.6) и (2.20).

3. Пусть теперь

$$\varphi_1[\tau + \varkappa(x_2)] = C_0 + C_1 \exp(-\beta[\tau + \varkappa(x_2)])$$

тогда

$$\overline{\varphi}_1(\tau) = C_0 + C_1 \mu \exp(-\beta\tau), \qquad \mu = \frac{1}{h} \int_0^h \exp(-\beta\varkappa(x_2)) \, dx_2$$

Допустим $\varkappa(x_2) \geqslant 0$, то есть возраст верхнего слоя растет по высоте, что происходит, если слой подвержен влиянию внешних воздействий: облучение, температура и т. д. В этом случае $0 < \mu \leqslant 1$. Если $\varkappa(x_2) \leqslant 0$, то есть возраст слоя уменьшается по высоте, что соответствует процессу возведения верхнего слоя на нижнем, то $1 \leqslant \mu < \exp(\beta)$. Таким образом, изменяя параметр μ в указанных пределах, можно построить решение поставленной задачи для любых функций $\varkappa(x_2)$.

В качестве иллюстрации предложенного алгоритма приведем решение поставленной задачи в случае: $g(x) \equiv 0$ — штамп имеет плоское основание; $e = \alpha(t) = 0$; $P = 1$; $\lambda = 6$; $c = 0{,}5$; $C_0 = 0{,}5522$; $C_1 = 4$; $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau)$; $\tau_1 = 0$;

$$N(\xi) = \frac{\operatorname{ch} 2\xi - 1}{\xi(\operatorname{sh} 2\xi + 2\xi)} \tag{3.1}$$

Задание $N(\xi)$ в виде (3.1) соответствует случаю, когда нижний слой лежит без трения на жестком основании.

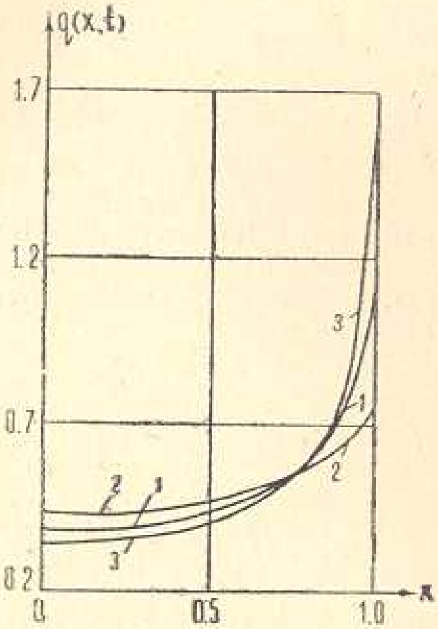
1) Случай естественного старения: $1 \leqslant \mu < \exp(\beta)$;

$$\beta = 2{,}325;\ \gamma = 4{,}5;\ \tau_0 = 75 \text{ сут}$$

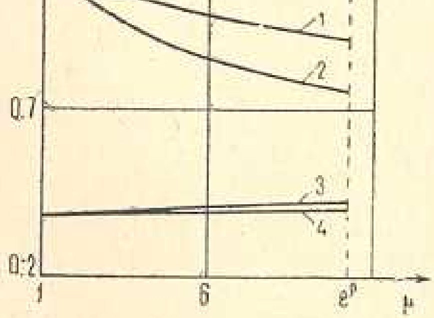
2) Случай искусственного старения: $0 < \mu \leqslant 1$;

$$\beta = 0{,}31;\ \gamma = 0{,}6;\ \tau_0 = 10 \text{ сут}$$

На фиг. 2 приведены графики распределения контактных давлений в зависимости от x, t и параметра неоднородного старения μ: $t = 1$ (кривая 1) — для любых значений μ (упругое решение); $t = 2$, $\mu = 10$ (кривая 2) — естественное старение; $t = 11$, $\mu = 0,1$ (кривая 3) — искусственное старение.



Фиг. 2.



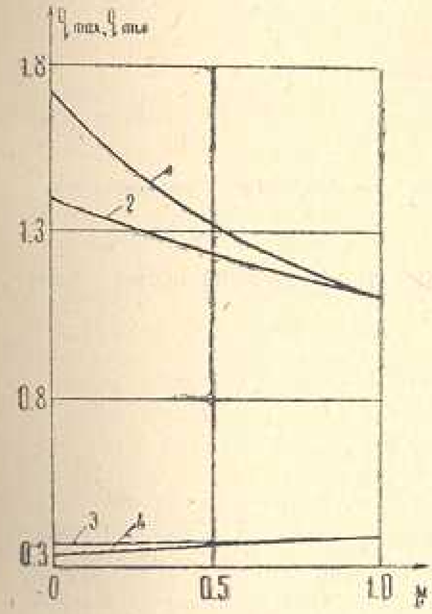
Фиг. 3.

На фиг. 3 изображены зависимости между $q_{\max}(t, \mu) = q(1, t, \mu)$, $q_{\min}(t, \mu) = q(0, t, \mu)$ и μ при различных фиксированных значениях t для случая 1) ($q_{\max}(1{,}05, \mu)$ — (1), $q_{\max}(2, \mu)$ — (2), $q_{\min}(2, \mu)$ — (3),

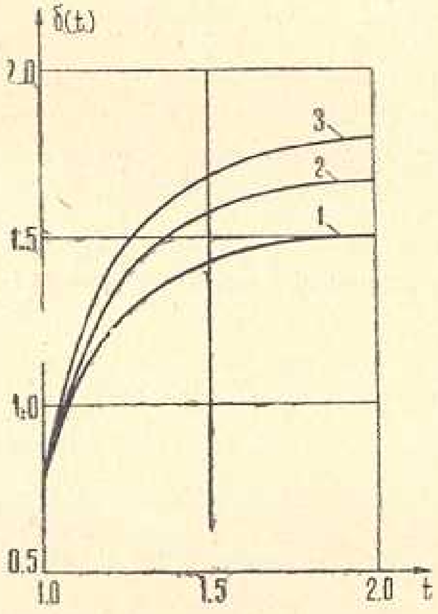
$q_{min}(1{,}05, \mu) - (4)$). Можно заметить, что с ростом параметра μ максимальные контактные давления уменьшаются, а минимальные увеличиваются.

Для варианта искусственного старения — фиг. 4 ($q_{max}(11, \mu) - (1)$, $q_{max}(1{,}5, \mu) - (2)$, $q_{min}(1{,}5, \mu) - (3)$, $q_{min}(11, \mu) - (4)$) с уменьшением параметра неоднородного старения μ от 1 до 0 максимальные нормальные контактные напряжения будут расти, а минимальные уменьшаться.

Зависимости $\delta(t)$ при фиксированных значениях μ для двух исследуемых случаев приведены на: 1) фиг. 5 ($\mu = 1 - (1)$, $\mu = 6 - (2)$, $\mu = 10 - (3)$); 2) фиг. 6 ($\mu = 1 - (1)$, $\mu = 0{,}5 - (2)$, $\mu = 0{,}05 - (3)$). Видно, что с ростом времени t функция $\delta(t)$ возрастает и стремится к предельному значению, которое тем больше, чем больше параметр μ.



Фиг. 4.

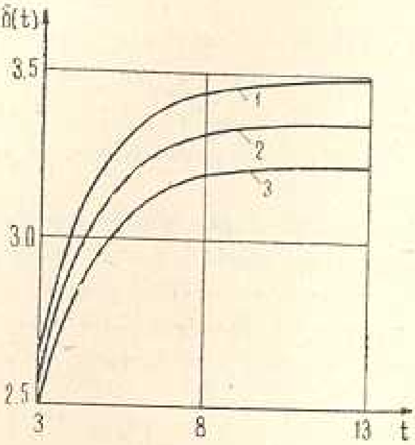


Фиг. 5.

Замечание. Исследуем предельные случаи изменения параметра неоднородного старения μ. Пусть $\mu = 1$. Тогда, если слои изготовлены из одного материала и $\tau_i \equiv 0$, а сила, действующая на штамп с плоским основанием от времени не зависит, получим, что распределение давлений под штампом будет таким же, как в аналогичной упругой задаче, то есть ползучесть в этом случае не оказывает влияния на распределение контактных напряжений.

Пусть $\mu = 0$. Тогда верхний слой будет работать по типу основания, модель которого подчиняется закону линейной наследственности Вольтерра [14].

Кроме того, как нетрудно заметить, изменяя другие физико-механические параметры основания, из решения (2.2), (2.3) поставленной задачи можно получить решения аналогичных задач теории упругости и линейной наследственной ползучести.



Фиг. 6.

Вариант $\mu = \exp(\beta)$ соответствует случаю кусочно-однородного старения рассматриваемого основания.

Авторы благодарны Н. Х. Арутюняну за внимание к работе.

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԾԵՐԱՑՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ, Ա. Վ. ՄԱՆԺԻՐՈՎ

Ամփոփում

Տրված են անհամասեռ ծերացող սողքի տեսության որոշ հարթ խնդիրների լուծումներ։ Դիտարկված են անհամասեռ ծերացող առաձգամածուցիկ բազմաշերտ հիմքի համար կոնտակտային խնդիրներ այն ենթադրությամբ, որ վերին շերտի հաստությունը բավականաչափ փոքր է կոնտակտի մասի երկարությունից։ Խառը խնդիրները բերված են կոնտակտային լարումների նկատմամբ Ֆրեդհոլմի և Վոլտերայի օպերատորներ պարունակող երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման։ Ստացված են երևույթի հիմնական բաղադրիչների համար վերլուծություններ, որոնք ճիշտ են ժամանակի փոփոխության ամբողջ միջակայքում։ Ուսումնասիրված են բազմաշերտ փաթեթի արհեստական և բնական ծերացման դեպքեր։ Բերված են բնութագրիչ մեծությունների թվային հաշվարկներ։

SOME MIXED PROBLEMS OF THE INHOMOGENEOUSLY-AGING MEDIA CREEP THEORY

V. M. ALEXANDROV, E. V. KOVALENKO, A. V. MANZHIROV

S u m m a r y

Some plane problems of the inhomogeneously-aging media creep theory are solved. Contact problems for multilayer inhomogeneously-aging viscoelastic bases are considered. An integral equation of special type containing Fredholm's and Volterra's operators is investigated. Various cases of aging of bases are studied. Numerical results on a concrete basis are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
2. *Сумбатян М. А.* Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся нелинейной ползучести.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1980, т. 33, № 1.
3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
5. *Коваленко Е. В.* Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1979, т. 32, № 2.
6. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред.— Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 2.
7. *Коваленко Е. В.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т. 34, № 5.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
9. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
10. *Домбровская И. Н., Иванов В. К.* К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных пространствах.— Сиб. матем. журн., 1965, т. 6, № 3.
11. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
12. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
13. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
14. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
15. II. 1982