

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

БУГАКОВ И. И., ЧЕПОВЕЦКИЙ М. А.

Дается сравнительное исследование и сопоставление с экспериментальными данными одномерных уравнений вязкоупругости: уравнения типа Больцмана и менее изученных уравнений — типа Работнова и типа Шепери. Вводится понятие опорной программы нагружения, которая дает наиболее ценную информацию о точности того или иного уравнения вязкоупругости. Опорная программа выявляется с помощью численного эксперимента при ступенчатых циклических нагружениях. Предлагается методика, позволяющая более быстро и надежно выбрать уравнение вязкоупругости для конкретного материала. Показывается перспективность уравнения типа Работнова для аморфного стеклообразного полимера (полиметилметакрилат) и уравнения типа Шепери для частичнокристаллического полимера (политетрафторэтилен) и металла (мягкая углеродистая сталь).

1. Для описания ползучести материалов при изменяющихся во времени напряжениях необходимы уравнения, которые достаточно хорошо согласуются с результатами опытов при различных программных нагружениях. Важной проблемой является разработка методик сопоставления расчетных и экспериментальных данных и выбора уравнения вязкоупругости для конкретного материала.

В механике вязкоупругих материалов сосуществуют два подхода к описанию экспериментальных данных. В одном из них выбранное априори уравнение применяется к различным материалам и в случае необходимости модифицируется. В другом доминантой служит материал и для него подбирается то или иное уравнение из выбранной априори совокупности уравнений. Настоящая работа относится ко второму направлению.

При использовании второго подхода, прежде всего, представляет интерес сопоставление результатов расчетов по различным теориям вязкоупругости для различных программ нагружения. Кривые ползучести, построенные по нескольким теориям, рассогласуются друг относительно друга уже при простом монотонном нагружении образца, и при этом различные программы нагружения оказываются неравноценными с точки зрения контрастности результатов. Представляется необходимым выделять среди других программу, дающую особенно контрастную картину. Такая программа несет наиболее ценную информацию и может доставить решающий аргумент в пользу той или иной теории [1]; ее можно назвать опорной. Сравнительные исследования уравнений вязкоупругости проводились и

раньше, однако не ставилась задача выбора опорной программы нагружения.

Ограничимся одномерными квазистатическими изотермическими процессами. Известно, что контрастную картину обычно дают ступенчатые нагружения, среди них и находится опорная программа. К тому же, теоретические кривые для таких нагружений строятся наиболее просто, а эксперименты реализуются с помощью обычных машин для испытаний на ползучесть или универсальных машин. Поэтому рассматриваются только ступенчатые нагружения.

2. Сравняются нелинейные наследственные уравнения:
типа Работнова —

$$\varphi[\varepsilon_1(t)] = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t f_1(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

типа Больцмана —

$$\varepsilon_2(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t f_2[t-\tau, \sigma(\tau)] d\tau \quad (2.2)$$

типа Шепери —

$$\varepsilon_3(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t f_3 \left[\int_0^t g[\sigma(\rho)] d\rho, \sigma(\tau) \right] g[\sigma(\tau)] d\tau \quad (2.3)$$

где φ и g — возрастающие неотрицательные функции, $\varphi(0) = 0$; f_1 — убывающая функция; f_2 и f_3 — убывающие функции первого аргумента и возрастающие функции второго аргумента, равные нулю при $\sigma = 0$, E — модуль упругости.

Уравнение (2.1), как и (2.2), (2.3), полагается справедливым при монотонных и немонотонных изменениях деформации ползучести, в частности, при возврате.

Уравнения типа (2.2) были независимо предложены Лидерманом [2], М. И. Розовским [3], Н. Х. Арутюняном [4], П. И. Васильевым [5] и другими авторами. В работах [2, 6] доказано, что уравнение (2.2) основано на принципе суперпозиции Больцмана, поэтому его можно назвать уравнением типа Больцмана; оно исследовалось в работе [7].

Уравнение (2.3) [8—10] — более общее, чем (2.2), и при $g = \text{const} = g_0$ переходит в (2.2). Оно изучено значительно меньше, чем (2.1), (2.2).

Следует отметить, что все три уравнения позволяют учесть как механически обратимую, так и истинную необратимую деформацию ползучести — это зависит от асимптотических свойств функций f_1 , f_2 , f_3 . Действительно, возможны два варианта:

$$f_1(\infty) = \begin{cases} 0 \\ c_1 \end{cases}; \quad f_2(\infty, \sigma) = \begin{cases} 0 \\ c_2(\sigma) \end{cases}; \quad f_3(\infty, \sigma) = \begin{cases} 0 \\ c_3(\sigma) \end{cases}$$

Согласно (2.1)—(2.3), после разгрузки в первом случае деформация постепенно убывает до нуля (для уравнения (2.3) следует добавить условие $g(0) \neq 0$); во втором случае деформация с течением времени стремится к пределу, отличному от нуля. В связи с этим для учета остаточной деформации нет необходимости добавлять в правые части (2.1)—(2.3) новые члены.

3. В численном эксперименте функции задавали в виде степенных зависимостей; для получения сравнимых результатов они приняты такими, чтобы при постоянных нагрузках деформации были одинаковыми:

$$\varphi = \left(\varepsilon_1 - \frac{\sigma}{E} \right)^{1/m} + \frac{\sigma}{E}; \quad g = |\sigma|^k; \quad f_1 = a^{1/m} \frac{n}{m} (t - \tau)^{n/m - 1}$$

$$f_2 = an (t - \tau)^{n-1} \sigma^m (\tau)$$

$$f_3 = an \left[\int_{\tau}^t g[\sigma(\rho)] d\rho \right]^{n-1} \text{sign}[\sigma(\tau)] |\sigma(\tau)|^{m-kn+k}$$

Легко проверить, что при постоянном напряжении $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \sigma/E + a t^n \sigma^m$. Из физических соображений следует, что $a > 0$, $0 < n \leq 1$, $m \geq 1$. Принято также $k > 0$. Модификация функции φ соответствует предложенной А. Р. Ржаницыным [11].

Вычисления провели для ступенчатых циклических нагружений, представленных на фиг. 1. Напряжения изменялись в моменты $t = 1, 2, 3, \dots$, принимая значения $\sigma_0, 0$ (программа А); σ_0, σ_1 (В); σ_1, σ_0 (В); $\sigma_0, -\sigma_0$ (Г), где σ_0, σ_1 — константы, $\sigma_1 > \sigma_0$.

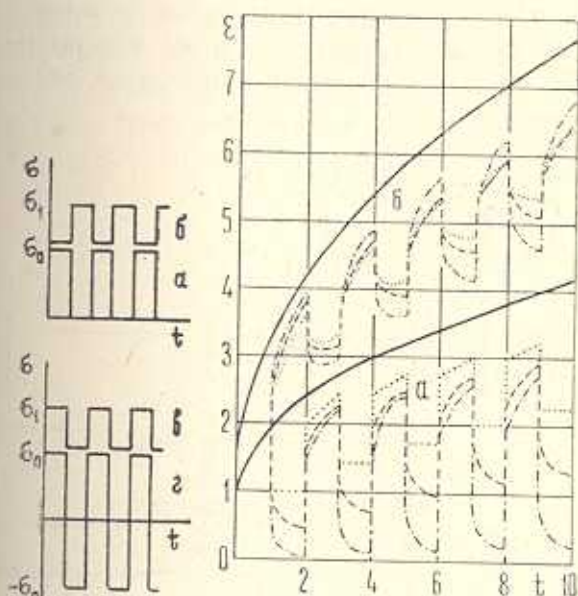
Результаты расчетов для $\sigma_0 = 1$; $\sigma_1 = \sqrt{2}$; $a = 1$; $n = 0,5$; $m = k = 2$ представлены на фиг. 2 в координатах $\varepsilon - t$. Поскольку модуль упругости входит только в упругую деформацию, было принято $E = 1$. На фиг. 2 штрих-пунктирные линии — $\varepsilon_1(t)$, штриховые — $\varepsilon_2(t)$, пунктирные — $\varepsilon_3(t)$. Сплошные линии — кривые ползучести при $\sigma = \text{const} = \sigma_0, \sigma_1$ и $-\sigma_0$.

Наименее контрастной оказалась программа Г: $\varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) \approx \varepsilon_1(t)$ (уравнение (2.3) при четной функции g в случае программы Г принимает вид (2.2), так как в течение всего процесса $g(\sigma) = \text{const}$). Для программ Б и В при более низком уровне напряжения имеют место неравенства $\varepsilon_3(t) > \varepsilon_2(t) > \varepsilon_1(t)$, а при более высоком $\varepsilon_3(t) \approx \varepsilon_2(t) < \varepsilon_1(t)$.

Результаты расчета для программы А показывают, что уравнение (2.3) не учитывает возврат (при $g(0) = 0$), а уравнение (2.1) по сравнению с (2.2) утрирует возврат. Если конкретизировать $g(\sigma)$ так, что $g_0(0) \neq 0$, то уравнение (2.3) будет учитывать возврат, однако слабее, чем (2.2).

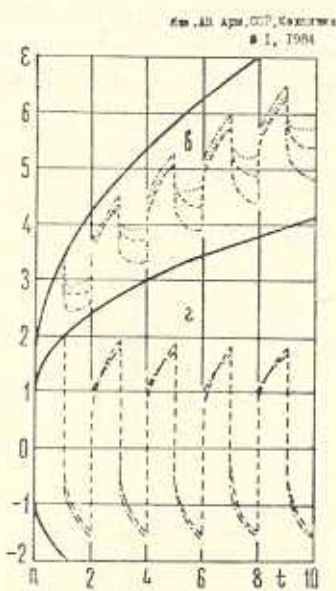
Следует подчеркнуть, что взаимное расположение кривых ползучести не зависит от принятого аналитического задания функций и выбранных значений констант, отражая особенности рассматриваемых уравнений.

Очевидно, что в качестве опорной следует выбрать программу А как наиболее контрастную для нашей системы уравнений. Нагружение по программе А широко применял в своих опытах на полимерных волокнах еще Лидерман [2]. Такие опыты были названы им опытами на суперпозицию, поскольку кривые ползучести и возврата, соответствующие уравнению (2.2), для программы А легко строятся с помощью модифицированного принципа суперпозиции Больцмана [2, 4—7].



Фиг. 1.

Фиг. 2а.



Фиг. 2б.

Следует заметить, что выбор опорной программы зависит от совокупности уравнений вязкоупругости и что опорных программ для данной совокупности уравнений может быть несколько.

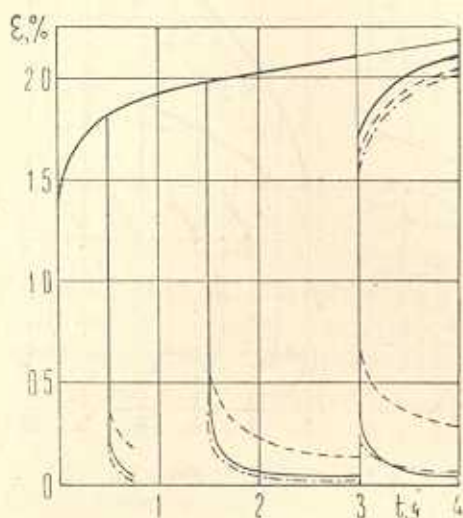
4. Ниже предлагается методика выбора уравнений вязкоупругости и даются примеры для двух полимеров — аморфного и частичнокристаллического, — деформируемых в области нелинейной ползучести, а также для металла¹. Используются эксперименты [12—14], проведенные по опорной программе А при 1—4 циклах нагружения — разгрузки. Учитывается, что в численном эксперименте по программе А при возврате кривые, рассчитанные по (2.2), располагаются выше кривых по (2.1) и ниже кривых по (2.3).

Методика выбора уравнений вязкоупругости заключается в следующем. С помощью экспериментальных кривых ползучести при постоянных напряжениях строятся графическим методом [7] теоретические кривые по

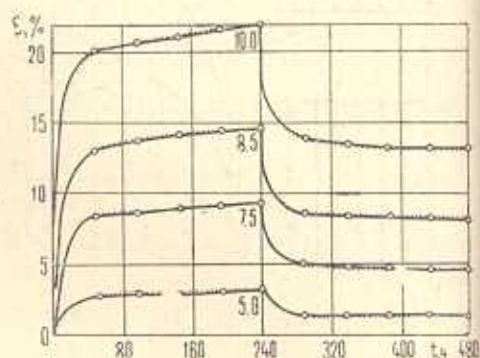
¹ В рамках механики материалов можно отвлечься от обстоятельств, которые неизбежно влияют на окончательный выбор уравнений в механике конструкций, например, режим действующих на конкретную конструкцию нагрузок, трудности математического решения краевых задач и т. д.

уравнению (2.2) для конкретных материалов и уровней напряжений. Если экспериментальные кривые возврата располагаются ниже кривых по (2.2), отбрасывается уравнение (2.3), строятся теоретические кривые по (2.1) и затем из двух уравнений (2.2), (2.1) выбирается более точное. В противном случае отбрасывается уравнение (2.1), строятся кривые по (2.3) и выбирается более точное из уравнений (2.2), (2.3).

Результаты экспериментов [12—14] по программе А и расчетные графики приведены на фиг. 3—5. Всюду экспериментальные кривые обозначены жирными линиями, тонкие линии — кривые ползучести при постоянных напряжениях, остальные — теоретические кривые, которые обозначены так же, как и на фиг. 2; при их построении полагали, что упругая деформация линейно зависит от напряжения.



Фиг. 3.



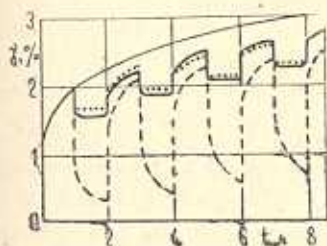
Фиг. 4.

Данные на фиг. 3 относятся к аморфному стеклообразному материалу — полиметилметакрилату (ПММА). Опыты были проведены при одноосном растяжении, температура — комнатная [12]. В течение времени t_1 ($t_1 = 0,5; 1,5; 3$ часа) на все образцы действовало номинальное напряжение 350 кг/см^2 . Затем, после быстрой разгрузки, образцы отдыхали до момента $t_2 = 3$ час., когда снова прикладывалась та же нагрузка (при $t_1 = 3$ час. образец повторно не нагружался). На фиг. 3 даны кривые повторного нагружения только для случая $t_1 = 1,5$ час.

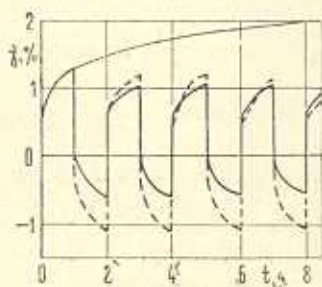
Каждый опыт продолжался 4 часа. Кроме экспериментальных, на фиг. 3 даны кривые по уравнениям (2.1), (2.2); функции φ и f_1 в уравнении (2.1) были найдены по приведенным в [12] экспериментальным кривым ползучести при постоянных напряжениях ($200; 250; 350; 450 \text{ кг/см}^2$). Видно, что экспериментальные кривые возврата располагаются заметно ближе к штрих-пунктирным линиям, чем к штриховым. Следовательно, предпочтительнее следует отдать уравнению (2.1). Теоретические кривые ползучести при повторном нагружении располагаются близко друг к другу, и потому

результаты для повторного нагружения не изменяют сделанного выше вывода.

Данные на фиг. 4 относятся к частичнокристаллическому материалу — политетрафторэтилену (ПТФЭ), кружками обозначены экспериментальные точки. Опыты были проведены при одноосном нагружении и длились по 480 час., температура 25°C [13]. В течение 240 час. образцы деформировались при постоянных истинных напряжениях (5; 7,5; 8,5; 10 МПа), затем разгружались и изучался возврат. Экспериментальные кривые возврата располагаются существенно выше кривых по (2.2). При построении кривых по (2.3) экспериментальные кривые ползучести при постоянных истинных напряжениях аппроксимировали степенной зависимостью, а функцию g нашли графически как коэффициент подобия между кривыми ползучести и возврата. Как видно, кривые по (2.3) хорошо согласуются с экспериментальными.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Данные на фиг. 5, 6 относятся к мягкой углеродистой стали (температура 500°C). Тонкостенные трубчатые образцы испытывались на кручение [14], нагрузка изменялась по ступенчатому циклическому закону типа В, А, Г с периодом 2 час., исследования проводились в течение четырех полных циклов. Во всех опытах напряжение в первой половине цикла было одним и тем же; $\tau_1 = 12,8 \text{ кг/мм}^2$, а напряжение τ_2 во второй половине цикла варьировалось ($\tau_2 = 10; 0; -6,4; -10; -12,8 \text{ кг/мм}^2$). На фиг. 5 даны результаты для программы А. Пунктирные линии, соответствующие (2.3), построены с помощью экспериментальной кривой ползучести при постоянном напряжении τ_1 ; полагали $g(0) = 0$. Из данных на фиг. 5 следует, что опыты [14] наилучшим образом можно описать с помощью уравнения (2.3). Сделанному выводу не противоречат результаты, относящиеся к программе Г, а именно к случаю, когда $\tau_2 = -\tau_1$ (фиг. 6). Напомним, что штриховая линия, соответствующая уравнению (2.2), совпадает с кривой по (2.3). Несовпадение начальных участков кривых на фиг. 5, 6 объясняется в [14] индивидуальными условиями испытаний.

Следует подчеркнуть, что уравнения (2.1)—(2.3) не являются единственно возможными для рассмотренных материалов. Так, в работе [13] применяли отличные от (2.3) уравнения и также получили хорошее согласие с экспериментом.

Выше для выбора уравнения вязкоупругости по данным опорных экспериментов строили теоретические кривые для конкретных материалов. При некотором навыке выбор можно произвести, не прибегая к таким построениям, а сравнивая результаты опытов по программе А с теоретическими кривыми на фиг. 2.

Приведенные примеры показывают, что выделение опорных экспериментов позволяет более быстро и надежно выбрать из некоторой совокупности уравнений вязкоупругости наиболее точное для конкретного материала при одномерных нагружениях. Показана перспективность применения уравнения типа Работнова к аморфному стеклообразному полимеру и уравнение типа Шепери к частичнокристаллическому полимеру и металлу.

ԱՌԱՋՂՅԱՄԱՍՈՒՑԻՎՈՒԹՅԱՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ի. Ի. ԲՈՒԳԱԿՈՎ, Մ. Ա. ՉԵՊՈՎԵՏԿԻ

Ա մ փ ո փ ու մ

Տրվում է առաձգամածուցիկության միաչափ հավասարումների՝ Բոլցմանի տեսքի և քիչ ուսումնասիրված Ռաբոտնովի տեսքի ու Շեպերի տեսքի հավասարումների համեմատական հետազոտումը: Մտցվում է հենակետային բևեռավորման ծրագրի գաղափարը, որը կատարվում է թվային փորձի օգնությամբ, աստիճանաձև ցրկչային բեռնավորումների դեպքում: Առաջարկվում է այնպիսի մեթոդիկա, որը թույլ է տալիս կոնկրետ նյութի համար ավելի արագ և հուսալի բնորոշ առաձգամածուցիկության հավասարումները: Ցույց է տրվում, որ Ռաբոտնովի տեսքի հավասարումները հեռանկարային են ամորֆ ապակենման պոլիմերի (պոլիմետրիմետակրիլատ) համար, իսկ Շեպերի տեսքի հավասարումները մասնակի բյուրեղային պոլիմերի (պոլիետարաֆտորէտիլեն) և մետաղի (փափուկ ածխածնային պողպատ) համար:

A COMPARATIVE ANALYSIS OF NONLINEAR EQUATIONS OF VISCOELASTICITY

I. I. BUGAKOV, M. A. CHEPOVETSKY

S u m m a r y

A comparative analysis of one-dimensional equations of viscoelasticity (the equations of Boltzman, Rabotnov, Shapery) is given. The concept of basic program of loading, revealed with the help of a numerical experiment with stepwise cyclic loading is introduced. A quicker and more reliably method allowing to choose an equation of viscoelasticity for concrete material is proposed. The perspective of the equations

of Rabotnov type for an amorphous polymer (polymethylmethacrylate) and of the equation of Shapery type for a semi-crystalline polymer (polytetrafluoroethylene) and metal (soft steel) is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
2. Leaderman H. Elastic and creep properties of filamentous materials and other high polymers. Washington: Textile Foundation, 1943, 278 p.
3. Роловский М. И. Ползучесть и длительное разрушение материалов.— Журн. техн. физ., 1951, т. 21, № 11, с. 1311—1318.
4. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: Гостехиздат, 1952. 323 с.
5. Васильев П. И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона.— Изв. ВНИИ гидротехники им. Б. Е. Веденеева, 1953, т. 49, с. 83—113.
6. Persoz B. Le principe de superposition de Boltzman.— Cahier groupe Frans, Etudes Rheol., 1957, t. 2, No. 1, p. 18—39.
7. Булаков И. И. Ползучесть полимерных материалов. Теория и приложения. М.: Наука, 1973. 288 с.
8. Shapery R. A. On the characterization of nonlinear viscoelastic materials.— Polymer Engineering and Sciences, 1969, vol. 9, No. 4, p. 295—310.
9. Shapery R. A. On a thermodynamic constitutive theory and its application to various nonlinear materials. In: Thermoelasticity (Proc. IUTAM Symp., East Kilbride, 1968, ed. B. A. Boley). Wien—N.-Y., Springer Verlag, 1970, p. 259—285.
10. Булакова И. И. Связь уравнения Гуревича с уравнениями ползучести наследственного типа.— Вестн. Ленингр. ун-та, Матем., мех., астрон., 1976, № 1, с. 78—80.
11. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
12. Drescher A., Michalski B. Reologiczne, mechaniczne i optyczne własności polime-takrylanu metylu w warunkach złożonej historii obciążenia. — Mech. teor. i stosow., 1971, v. 9, No. 2, S. 246—261.
13. Павлов П. А., Кондакова О. Н., Белан-Гайко В. Н. Ползучесть полиэтилена при плоском напряженном состоянии в условиях нестационарного нагружения.— Мех. композит. материалов, 1980, № 5, с. 793—801.
14. Endo K., Omori S. Creep behavior of a mild steel under varying stresses.— Mem. Fac. Eng. Hiroshima Univ., 1961, v. 1, No. 4, p. 287—308.

НИИ математики и механики
Ленинградского государственного
университета

Поступила в редакцию
13. VI. 1983