

ЛАМИНАРНОЕ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ УНИПОЛЯРНО ЗАРЯЖЕННОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ

ПЕТРОСЯН А. Г.

При движении жидкости со слабой униполярной электропроводимостью в условиях внешнего электрического поля на частицы жидкости действуют кулоновские силы, которые определенным образом меняют параметры и характер течения [1].

Большое количество поляризованных молекул или атомов при их упорядоченном расположении под действием внешнего электрического поля приводит к макроскопическому эффекту электрической поляризации макроскопических частей среды [2].

При учете влияния поляризации вещества, наблюдаемого обычно в диэлектриках, тензор напряжений становится несимметричным [3]. В этом случае необходимо рассматривать моментные напряжения, то есть учесть вектор поляризации: механические моменты, действующие на частицы [3, 4].

Обсуждение конструирования новых моделей в механике сплошных сред, в частности, жидких сред с учетом поляризации является весьма полезным и актуальным [5].

Рассмотрению модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений посвящена работа [6].

Несимметричная электрогидродинамика представляет собой обобщение обычной классической электрогидродинамики на случай, когда тензор напряжений является несимметричным. Она отличается от классической ЭГД системы уточнением напряженного состояния, которое характеризуется несимметричным тензором силовых и моментных напряжений.

В настоящей работе приводится решение задачи об электрогидродинамическом симметричном ламинарном течении вязкой несжимаемой структурной жидкости с моментными напряжениями, несимметричным тензором напряжения и внутренней инерцией частиц в плоской трубе. В частности, рассматривается вектор поляризации диэлектрика.

1. Уравнения движения заряженной поляризованной жидкости

Рассмотрим течение несжимаемой поляризованной жидкости со слабой униполярной проводимостью.

Общая система уравнений несимметричной электрогидродинамики, в случае вязкой, со слабой униполярной проводимостью, несжимаемой жидкости имеет вид [6]:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \nabla \cdot (\nabla \vec{v})^d + \nu_r \nabla \times [2\vec{\omega} - \nabla \times \vec{v}] + \frac{1}{\rho} \rho_e \vec{E}$$

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nu_r (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0 \nabla (\nabla \cdot \vec{\omega}) + 2c_d \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^d + 2c_a \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega})^a + \vec{c}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0 \epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.1)$$

К этим уравнениям необходимо добавить обобщенный закон Ома [1, 8]

$$\vec{j} = \rho_e (\vec{v} + k\vec{E}) - D \nabla \rho_e \quad (1.2)$$

Здесь ρ — массовая плотность, p — давление, I — среднее значение момента инерции на единицу массы частиц, составляющих систему, \vec{v} — вектор скорости точки, $\vec{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν — кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r — кинематическая вращательная вязкость, c_0 , c_d , c_a — коэффициенты моментной вязкости, $d(\dots)/dt$ — полная производная по времени, ∇ — пространственный градиент, $(\nabla \vec{v})^d$ и $(\nabla \vec{\omega})^d$ — симметричные части соответствующих дивергенсов, $(\nabla \vec{v})^a$ и $(\nabla \vec{\omega})^a$ — антисимметричные дивергенсы, ρ_e — плотность объемного заряда в жидкости, \vec{E} — напряженность электрического поля, \vec{c} — вектор массового момента, \vec{j} — плотность тока, ϵ_0 — электрическая постоянная, ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость, k — коэффициент подвижности ионов, D — коэффициент диффузии ионов.

Явное значение массового момента \vec{c} , учитывающего поляризацию жидкости под действием внешнего электрического поля, можно определить по формуле [9]

$$\vec{c} = -\rho p \times \vec{E} \quad (1.3)$$

где \vec{p} — вектор поляризации на единицу массы.

В случае постоянного электрического поля для плотности поляризации имеем [9]

$$\vec{\rho} = [\varepsilon'(\omega) + \varepsilon''(\omega) \vec{\omega} \times] \vec{E} \quad (1.4)$$

где

$$\varepsilon''(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon''(\omega_0)/\omega_0 \quad (1.5)$$

Здесь ω_0 — угловая скорость вращения электрического поля, $\varepsilon'(\omega_0)$ и $\varepsilon''(\omega_0)$ — комплекс диэлектрической восприимчивости.

Согласно модели Дебая [9, 10]

$$\varepsilon''(\omega) = \varepsilon'(\infty) - \varepsilon'(0) \quad (1.6)$$

Рассмотрим подобия электрогидродинамического течения.

Приведем систему уравнений (1.1)–(1.2) к безразмерному виду. В качестве характерной длины возьмем L , характерной скорости — V_0 , характерной угловой скорости — V_0/L , в качестве характерного электрического поля — E_0 , объемного заряда — ρ_{e0} , а механического момента, действующего на поляризованную диэлектрическую жидкость в электрическом поле, — C_0 . Тогда для плотности электрического тока из выражения для \vec{j} (1.2) получаем характерную величину $j_0 = k\rho_{e0}E_0$.

В качестве масштабов времени и давления примем соответственно $T = L/V_0$ и $P = \rho V_0^2$.

Уравнения (1.1) и (1.2) в безразмерном виде запишутся так:

$$\nabla \cdot \vec{v}^* = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{d\vec{v}^*}{dt^*} = -\nabla p^* + \frac{2}{R} \nabla \cdot (\nabla \vec{v}^*)^d + \frac{1}{R_r} \nabla \times [2\vec{\omega}^* - \nabla \times \vec{v}^*] + S\rho_e^* \vec{E}^* \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}^*}{dt^*} = & \frac{2E_E}{R_r} (\nabla \times \vec{v}^* - 2\vec{\omega}^*) + \frac{E_E}{R_0} \nabla (\nabla \cdot \vec{\omega}^*) + \frac{2E_E}{R_d} \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega}^*)^d + \\ & + \frac{2E_E}{R_a} \nabla \cdot (\nabla \vec{\omega}^*)^a + \frac{E_E}{M} \vec{c}^* \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}^* = Q\rho_e^* \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \vec{E}^* = 0 \quad (1.11)$$

$$R_{\rho_e} \frac{\partial \rho_e^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot \vec{j}^* = 0 \quad (1.12)$$

$$\vec{j}^* = \rho_e^* (R_{\rho_e} \vec{v}^* + \vec{E}^*) - D^* \nabla \rho_e^* \quad (1.13)$$

Здесь

$$R = \frac{V_0 L}{\nu}, \quad R_r = \frac{V_0 L}{\nu_r}, \quad S = \frac{\rho_{e0} E_0 L}{\rho V_0^2}, \quad E_E = \frac{L^2}{I}, \quad R_0 = \frac{V_0 L^3}{c_0}$$

$$R_d = \frac{V_0 L^2}{c_d}, \quad R_a = \frac{V_0 L^2}{c_a}, \quad M = \frac{V_0^2}{C_0}, \quad Q = \frac{L j_0}{k \epsilon_0 \epsilon E_0^2}$$

$$D^* = \frac{D}{k E_0 L}, \quad R_{\rho_e} = \frac{V_0}{k E_0} \quad (1.14)$$

Заметим, что при $R_{\rho_e} = \infty$ имеет место «вмороженность» заряженных частиц в среду, то есть отсутствует проскальзывание заряженных частиц относительно нейтральных [8]. В магнитной гидродинамике при магнитных числах Рейнольдса $R_s = \infty$ имеет место вмороженность магнитных силовых линий в вещество. В силу этой аналогии параметр R_{ρ_e} называют электрическим числом Рейнольдса [11].

Параметры (1.14) являются критерием подобия электрических течений.

2. Симметричное ламинарное течение заряженной жидкости в плоской трубе

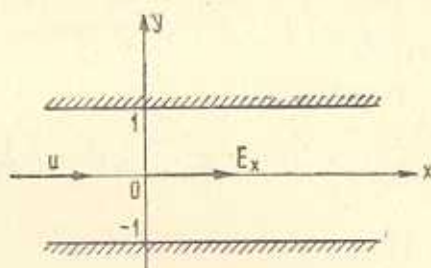
Рассмотрим установившееся ламинарное движение несжимаемой униполярно заряженной жидкости под действием внешнего электрического поля в плоской с непроводящими стенками трубе высотой $2L$. Пусть напряженность электрического поля, параллельная стенкам трубы, имеет величину E_0 . Проводя ось x в плоскости симметрии трубы (фиг. 1), имеем

$$v_x = u(y), \quad v_y = 0, \quad E_x = \text{const} = 1$$

$$E_y = E_y(y)$$

$$\rho_e = \rho_e(y), \quad \omega_x = \omega(y), \quad \omega_x = \omega_y = 0$$

$$j_y = 0$$



Фиг. 1.

(Обозначения для безразмерных величин сохраняем те же, что и для размерных).

Все искомые функции в системе (1.7)—(1.13), кроме давления p , в случае плоскопараллельных движений жидкости зависят только от координаты y . Допустим, что градиент давления по оси x постоянен и тогда

$$p = \frac{\partial p}{\partial x} x + f(y) \quad (2.1)$$

Система уравнений (1.7)—(1.13) примет вид (для простоты обозначения для безразмерных величин сохраняем те же, что и для размерных)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_r} \right) \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{2}{R_r} \frac{d\omega}{dy} + S_{\rho_e} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = S_{\rho_e} E_y \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_d}\right) \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \frac{4}{R_r} \omega + \frac{1}{M} c = \frac{2}{R_r} \frac{du}{dy} \quad (2.4)$$

$$\frac{dE_y}{dy} = Q \rho_e \quad (2.5)$$

$$\rho_e E_y = D \frac{d\rho_e}{dy} \quad (2.6)$$

$$j_x = \rho_e (R_p u + 1) \quad (2.7)$$

Параметры E_y и ρ_e электрического поля рассматриваемой системы определяются уравнениями (2.5) и (2.6). Распределение скорости по поперечному сечению u , а также распределение скоростей вращения частиц ω могут быть найдены путем совместного решения уравнений (2.2) и (2.4) при известном решении предыдущей системы. Уравнение (2.3) определит функцию $f(y)$ из соотношения (1.16), и, наконец, при помощи соотношения (2.7) становится возможным вычислить плотность тока j_x .

Из (2.5) и (2.6) найдем первый интеграл

$$E_y^2 = 2D \frac{dE_y}{dy} + C \quad (2.8)$$

Вид второго интеграла зависит от знака постоянной интегрирования C [1].

При $C < 0$

$$E_y(y) = \sqrt{-C} \operatorname{tg} \left(C_1 + \sqrt{-C} \frac{y}{2D} \right) \quad (2.9)$$

Из (2.5) и (2.9) находим величину заряда при $C < 0$

$$\rho_e(y) = \frac{2}{2DQ} \frac{-C}{\cos^2 \left(C_1 + \sqrt{-C} \frac{y}{2D} \right)}$$

Из (2.6) следует, что E_y — нечетная функция и, следовательно, на оси трубы

$$E_y(0) = 0 \quad (2.10)$$

Из уравнений (2.8) и (2.5) с учетом (2.10) имеем

$$C = -2DQ\rho_e^0$$

где $\rho_e^0 = \rho_e(0)$ — значение объемного заряда на оси трубы.

Для определенности можно считать заряды положительными, и, следовательно, $C < 0$. Исходя из решения (2.9) при отрицательном значении постоянной C , для обеспечения нечетности функции $E_y(y)$ следует положить $C_1 = 0$, тогда

$$E_y(y) = V \sqrt{2DQ\rho_e^0} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\rho_e^0 Q}{2D}} y \quad (2.11)$$

$$\rho_e(y) = \frac{\rho_e^0}{\cos^2 \sqrt{\frac{\rho_e^0 Q}{2D}} y} \quad (2.12)$$

Изменение давления в потоке, исходя из (2.3), (2.5) и (2.1), запишется в виде

$$p = \frac{\partial p}{\partial x} x + \frac{S}{2Q} E_y^2$$

или с учетом (2.11)

$$p = \frac{\partial p}{\partial x} x + SD\rho_e^0 \operatorname{tg}^2 \sqrt{\frac{\rho_e^0 Q}{2D}} y \quad (2.13)$$

Выражения для u и ω находим из (2.2) и (2.4) с учетом (2.12) при следующих граничных условиях [12]:

$$u = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 1 \quad (2.14)$$

В случае симметричного течения заряженной жидкости под действием электрического поля в плоской трубе уравнение (2.4) с учетом вектора поляризации примет следующий вид:

$$\frac{R_r}{2} \frac{R_a + R_d}{R_a R_d} \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \left(2 - \frac{R_r \Phi}{2} \right) \omega = \frac{du}{dy} \quad (2.15)$$

где

$$\Phi = \frac{c}{M} = \varepsilon''(0) \frac{E_0^2}{\rho V_0 L}$$

Совместное решение (2.2) и (2.15), при граничных условиях (2.14), дает следующее выражение для скорости потока u :

$$\begin{aligned} u = & -\frac{R}{2} \frac{4 - R_r \Phi}{4 - (R + R_r) \Phi} \frac{\partial p}{\partial x} (1 - y^2) + \\ & + \frac{4R}{R + R_r} \frac{R}{4 - (R + R_r) \Phi} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{ch} \lambda - \operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda} + \\ & + 2D \frac{RS}{Q} \frac{R_r}{R + R_r} \ln \left(\cos \sqrt{\frac{Q_r^0}{2D}} y \middle| \cos \sqrt{\frac{Q_r^0}{2D}} \right) + \\ & + \frac{2R}{R + R_r} \frac{RS}{4 - (R + R_r) \Phi} \sqrt{\frac{2D\rho_e^0}{Q}} \left[(a_1 \exp(\lambda) - a_2 \exp(-\lambda)) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\operatorname{ch} \lambda - \operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda} - (a_1 \exp(\lambda) + a_2 \exp(-\lambda)) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int \lambda \exp(-\lambda y) \left(\int \exp(\lambda y) \operatorname{tg} \sqrt{\frac{Q_p^0}{2D}} y dy \right) dy + \\
& + \int \lambda \exp(\lambda y) \left(\int \exp(-\lambda y) \operatorname{tg} \sqrt{\frac{Q_p^0}{2D}} y dy \right) dy - \\
& - \frac{2}{\sqrt{\frac{Q_p^0}{2D}}} \ln \cos \sqrt{\frac{Q_p^0}{2D}} \Big|
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{R_a R_d [4 - (R + R_r) \Phi]}{(R + R_r)(R_a + R_d)} \\
a_1 &= \int_0^1 \exp(-\lambda y) \operatorname{tg} \sqrt{\frac{Q_p^0}{2D}} y dy \\
a_2 &= \int_0^1 \exp(\lambda y) \operatorname{tg} \sqrt{\frac{Q_p^0}{2D}} y dy
\end{aligned}$$

Решение (2.16) переходит в классическое при $\nu_r = 0$ (то есть $R_r = \infty$) [1]

$$u = -\frac{R}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (1 - y^2) + 2D \frac{SR}{Q} \ln \left(\cos \sqrt{\frac{Q_p^0}{2D}} y \middle| \cos \sqrt{\frac{Q_p^0}{2D}} \right)$$

Формула (2.16) может быть переписана в несколько ином виде. Из условия $u(0) = 1$ (при $\nu_r = 0$) получим*

$$u_1 + u_2 = 1$$

где

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{R}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \\
u_2 &= -2D \frac{RS}{Q} \ln \cos \sqrt{\frac{Q_p^0}{2D}}
\end{aligned}$$

Тогда выражение (2.16) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
u &= u_1 \left[(1 - y^2) - \frac{2R}{R + R_r} \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{ch} \lambda - \operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda} \right] + \\
& + u_2 \left\{ \frac{R_r}{R + R_r} \left(1 - \ln \cos \sqrt{\frac{Q_p^0}{2D}} y \middle| \ln \cos \sqrt{\frac{Q_p^0}{2D}} \right) - \right.
\end{aligned}$$

* Для простоты примем $\Phi = 0$.

$$\begin{aligned}
& - \frac{R}{2(R + R_1)} \sqrt{\frac{Q\rho_e^0}{2D}} \ln \cos \sqrt{\frac{Q\rho_e^0}{2D}} \left[(a_1 \exp(\lambda) - \right. \\
& - a_2 \exp(-\lambda)) \frac{\operatorname{ch} \lambda - \operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{sh} \lambda} - (a_1 \exp(\lambda) + a_2 \exp(-\lambda)) - \\
& - \int \lambda \exp(-\lambda y) \left(\int \exp(\lambda y) \operatorname{tg} \sqrt{\frac{Q\rho_e^0}{2D}} y dy \right) dy + \\
& + \left. \int \lambda \exp(\lambda y) \left(\int \exp(-\lambda y) \operatorname{tg} \sqrt{\frac{Q\rho_e^0}{2D}} y dy \right) dy \right] - \\
& - \frac{2}{\sqrt{\frac{Q\rho_e^0}{2D}}} \ln \cos \sqrt{\frac{Q\rho_e^0}{2D}} \left. \right\} \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Из (2.17) следует, что рассматриваемое электрогидродинамическое течение складывается из обычного градиентного течения несимметричных жидкостей [12], а также течения, вызванного пондеромоторными силами.

Значение ρ_e^0 объемного заряда на оси трубы может быть определено из условия, что средняя плотность тока в сечении трубы равна единице, что эквивалентно выбору характерной плотности тока в виде [1]

$$j_0 = \frac{J}{2L}$$

где J — сила тока, проходящего через трубы на единицу ее глубины, $2L$ — расстояние между стенками трубы.

Для простоты при определении ρ_e^0 будем учитывать только ток проводимости и тогда

$$j_{ep} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho_e dy = 1$$

Учитывая (2.5), получим

$$E_y(1) - E_y(-1) = 2Q$$

Отсюда, используя (2.11), получим выражение для определения ρ_e^0

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{Q\rho_e^0}{2D}} = \sqrt{\frac{Q}{2D\rho_e^0}} \quad (2.18)$$

Из условия непрерывности $E_y(y)$ следует, что

$$0 < \sqrt{\frac{Q\rho_e^0}{2D}} < \frac{\pi}{2}$$

Обозначим

$$A = \frac{Q}{2\pi D} = \frac{JL}{4\pi\epsilon\epsilon_0 E_0 D}$$

и рассмотрим решения уравнения (2.18) при достаточно больших и достаточно малых значениях A .

При больших значениях A для определения φ_e^0 имеем [1]

$$\sqrt{\pi A \varphi_e^0} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2A}$$

что позволяет рассчитать функции, входящие в (2.11), (2.12), (2.13), (2.16).

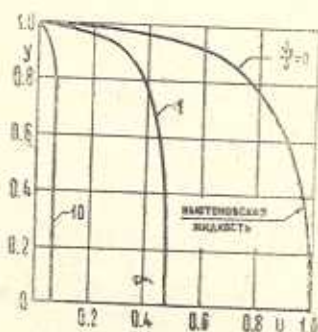
При малых значениях A для φ_e^0 имеем [1]

$$\varphi_e^0 = 1$$

Распределения скоростей потока и величин заряда при чисто пондеромоторном течении заряженной жидкости в плоской трубе ($u_1 = 0$) в зависимости от значений величины A для классических жидкостей подробно изучены в [1].

Как показали исследования, при достаточно больших значениях A заряд почти полностью сосредотачивается в тонком пристеночном слое [1]. В связи с этим пондеромоторные силы становятся особенно большими в непосредственной близости от стенки, что приводит к резкому нарастанию скорости в окрестности стенки. Отсюда по мере роста силы тока эпюра скоростей все более отличается от профиля распределения скоростей в отсутствие электрического поля, в сторону ее большего заполнения [1].

Так как ν , ν_e , ϵ_a , ϵ_d не отрицательны, то λ — действительное число.



Фиг. 2.

На фиг. 2 приводятся рассчитанные по вышеприведенной формуле эпюры распределения скоростей для различных значений ν_e/ν (при $\lambda = 1$, $A = 10^2$). Как видно, скорость здесь меньше скорости для классических жидкостей, где внутреннее вращение не учитывается.

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍԻԱՆ

Ա. մ. ֆ. ռ. ֆ. ռ. մ.

Լուծված են ոչ սիմետրիկ էլեկտրոհիդրոդինամիկայի հալասարումները հարթ խողովակում անսեղմելի բևեռացած թույլ ունիպոլյար հաղորդականությամբ հեղուկի սիմետրիկ լամինար հոսքի դեպքում:

LAMINAR ELECTROHYDRODYNAMIC FLOW OF UNIPOLAR CHARGED ASYMMETRICAL FLUID IN A FLAT CHANNEL

L. G. PETROSIAN

S u m m a r y

The equations of asymmetrical electrohydrodynamics in the case of symmetrical laminar flow of incompressible polarized fluid with weak unipolar conductivity in a flat channel have been solved. It is shown that the velocity of a stream for an asymmetrical fluid is less than the velocity of classical fluids.

ЛИТЕРАТУРА

1. Копылов Г. Н. Ламинарное течение заряженной жидкости в плоской трубе под действием внешнего электростатического поля.— ЖТФ, 1963, 33, № 11, с. 1290—1300.
2. Седов А. И. Механика сплошной среды. I. М.: Изд. Наука, 1970. 492 с.
3. Фомин В. А. Механика континуума для инженеров. Л.: Изд. ЛГУ, 1975. 118 с.
4. Эриксен Дж. Исследования по механике сплошных сред. М.: Изд. Мир, 1977. 246 с.
5. Седов А. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред.— УМН, 1965, 20, вып. 5, с. 121—180.
6. Петросян А. Г. О модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений.— ЖТФ, 1979, 49, вып. 3, с. 481—487.
7. Петросян А. Г. К построению неизоэнтальпической модели электрогидродинамики с несимметричным тензором напряжений.— ПМ, 1980, 16, № 4, с. 108—114.
8. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2, с. 31—45.
9. Condiff D. W., Dahler J. S. Fluid Mechanical Aspects of Antisymmetric Stress.— The Physics of Fluids, 1964, vol. 7, No. 6, p. 842—854.
10. Дебай П. Полярные молекулы. М.—Л.: ГИИ, 1931. 247 с.
11. Stuetzer O. Magnetohydrodynamics and electrohydrodynamics.— The Physics of Fluids, 1962, vol. 5, No. 5, p. 534—544.
12. Петросян А. Г. Об одной задаче асимметрической магнитной гидродинамики.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, 27, № 6, с. 44—55.