ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVII, № 1, 1984 Механика

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИИ МНОГОСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РАППОПОРТ Р. М.

1. Строится система однородных решений первой краевой задачи статики для полупространства, составленного из конечного числа упругих слоев. В качестве одного из слоев рассматривается подстилающее полупространство. Предполагается: 1) материал каждого из слоев изотропен или трансверсально изотропен, причем плоскость изотропии параллельна поверхности полупространства, 2) материал каждого из слоев однороден или неоднороден по толщине, подстилающее полупространство однородно и изотропно, 3) слои спаяны на границах или поверхности контакта идеально гладкие, 4) границы слоев параллельны границе полупространства.

Полагается также, что разработан алгоритм построения неоднородных решений той же краевой задачи. Здесь используются результаты, основанные на общих решениях трехмерной задачи, приведенных в [1], [2].

Указанные решения, следуя С. Г. Гутману [3], записываются в виде суммы слагаемых первого и второго рода. В слагаемом первого рода, определяемом функцией П, обращается в ноль вращение ω_z; в решении второго рода, определяемом функцией L — перемещение w, напряжение σ_z и объемное расширение (ось z нормальна плоскости изотропии).

В пределах слоя имеем

$$u\,(u_r) = \partial_1 F + \partial_2 L, \quad v\,(u_\theta) = \partial_2 F - \partial_1 L$$

$$F = \left(\beta_{13} D^2 + \beta_{11}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Pi, \quad \sigma_z = D^4\Pi$$

$$\tau_{xz}\,(\tau_{rz}) = \partial_1\tau + \partial_2 s, \quad \tau_{yz}\,(\tau_{\theta z}) = \partial_2\tau - \partial_1 s$$

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial z}D^2\Pi, \quad s = G'\frac{\partial L}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\tau}{G'} \tag{1.1}$$

$$\beta_{11} = \frac{1-\nu^2}{E}, \quad \beta_{13} = -\frac{\nu_1(1+\nu)}{E_1}, \quad \beta_{33} = \frac{1}{E_1}\left(1 - \frac{\nu_1^2 E}{E_1}\right), \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

D^2 — оператор Лапласа на плоскости, E, E_1 — модули упругости в плоскости изотропии и в направлении оси z, ν, ν_1 — коэффициенты Пуассона; G' — модуль сдвига в плоскости, перпендикулярной плоскости изотропии.

Функции Π, L удовлетворяют уравнениям

$$\beta_{11} D^4 \Pi + D^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(2\beta_{13} + \frac{1}{G'} \right) \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \Pi \frac{\partial^2 \beta_{13}}{\partial z^2} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\beta_{11} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(G' \frac{\partial L}{\partial z} \right) + G D^2 L = 0 \tag{1.2}$$

Зависимости, аналогичные (1.1), (1.2), были получены в [1] для неоднородного слоя (при экспоненциальном законе изменения упругих характеристик по толщине). В [4] указанное ограничение для изотропного слоя снято и учтены объемные силы.

Уравнения для определения функций Π и L разделились. В [2] показано, что условия на границах слоев для этих функций также отделяются. При полной спайке зон на границах слоев ставятся условия непрерывности функций F, w, σ_z, τ (решения первого рода) или L, s (решения второго рода). При идеально гладких контактах на границе слоев $\tau = s = 0$.

На границе полупространства $\sigma_z = p$; $\tau = \tau_0$; $s = s_0$, где

$$D^2 \tau_0 = \partial_1 t_1 + \partial_2 t_2; \quad D^2 s_0 = \partial_2 t_1 - \partial_1 t_2;$$

p, t_1, t_2 — интенсивности нормальных и касательных поверхностных сил.

Таким образом, решения первого и второго рода для многослойного полупространства могут рассматриваться независимо.

Из изложенного следует, что расчет слоистого полупространства расчленяется на два самостоятельных этапа. На первом этапе решением краевых задач определяются функции σ_z, τ, w, F, L, S, которые удовлетворяют инвариантным зависимостям, (1.1), (1.2) и граничным условиям; на втором этапе простым дифференцированием выражаются функции u, v, e_x, e_y, γ_{xy} (e_r, e_θ, $\gamma_{r\theta}$). Напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} (σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$) и деформации e_z, γ_{xz}, γ_{yz} (γ_{rz}, $\gamma_{\theta z}$), которые на границах слоев претерпевают разрыв непрерывности, вычисляются для каждого из слоев в отдельности по преобразованным формулам закона Гука.

Известные неоднородные решения краевых задач получены с помощью преобразований Фурье или Фурье—Бесселя. В литературе описаны различные способы определения трансформант искомых функций. Здесь используются решения [5—7]. Во всех случаях задача сводится к решению системы алгебраических уравнений для вычисления параметров, которыми определяются трансформанты искомых величин. Например, в методе перемещений [7] такими параметрами являются величины $\overline{w}_j$, $\overline{F}_j$, (решения первого рода) или $\overline{L}_j$ (решения второго рода), где $\overline{F}_j$, $\overline{w}_j$, $\overline{L}_j$ — значения трансформант функций F, w, L на границах слоев. Значения тех же функций в промежуточных точках определяются решением краевой задачи для слоя.

2. Однородные решения также различаются первого и второго рода. Решения первого рода записываются в виде

$$\Pi_k = \varphi_k(\gamma_k, z)\,\Phi_k \tag{2.1}$$

где $\Phi_k = \Phi_k(x, y, \gamma_k)$ или $\Phi_k = \Phi_k(r, \theta, \gamma_k)$ — функции, удовлетворяющие уравнению

$$D^2\Phi_k = \gamma_k^2\Phi_k \tag{2.2}$$

При этом в решениях трехмерной задачи и двухмерных (плоской и осесимметричной) различаются лишь функции Φ_k. Формулы для определения функций φ_k с точностью до множителей совпадают с выражениями для определения трансформант функций П [5—7], если произвести замену $\gamma \to i\gamma_k$.

Точно так же формируется матрица канонических уравнений, связывающих параметры, входящие в решения краевых задач для многослойного полупространства.

Здесь числа γ_k — корни определителя, составленного из коэффициентов указанных систем канонических уравнений.

Например, для двухслойного полупространства, если материал каждого из слоев изотропен и однороден, имеем

$$m(\sin^2\gamma_k h - \gamma_k^2 h^2) - \frac{i}{2}(2\gamma_k h - \sin 2\gamma_k h) = 0 \tag{2.3}$$

или

$$2(1-\nu) + 2(m-1)[1 - \nu - \exp(-2i\gamma_k h)(1 - \nu - \gamma_k^2 h^2)] -$$
$$- \frac{(m-1)^2(3-4\nu)}{2(1-\nu)} \exp(-2i\gamma_k h)(\sin^2\gamma_k h - \gamma_k^2 h^2) = 0 \tag{2.4}$$

Равенство (2.3) составлено при $\tau_1 = 0$, равенство (2.4) — при полной спайке слоев. Уравнение (2.3) при любом $m = E_2/E_1$ имеет счетное множество комплексных корней. Уравнение (2.4) не имеет решения при $m = 1$ (однородное полупространство).

В предельных случаях имеем

при $m = \infty$
$$\sin^2\gamma_k h - \gamma_k^2 h^2 = 0 \tag{2.4$'$}$$

$m = 0$
$$(3-4\nu)\sin^2\gamma_k h - \gamma_k^2 h^2 - 4(1-\nu)^2 = 0 \tag{2.4$''$}$$

Уравнения (2.4′), (2.4″) также имеют счетное множество комплексных корней. То же имеет место, если числа m и $1/m$ — малые параметры. При m, близком к единице, вычислительный процесс неустойчив.

Однородные решения первого рода обладают свойствами обобщенной ортогональности [8]. Свойства решений теории изгиба слоистых плит установлены в [9], при непрерывной неоднородности материала эти свойства изучались в [10]. Зависимости, приведенные в [9] и [10], предполагают полную спайку слоев.

На основании теоремы взаимности работ можно установить, что условия обобщенной ортогональности эквивалентны одному из приведенных ниже равенств, которые справедливы для многослойного полупространства при полной спайке слоев и при гладких контактах

$$\int\limits_{l} \sigma_{xm} u_k dz = \int\limits_{l} \tau_{xz,\,k} w_m dz \tag{2.5}$$

$$\int\limits_{l}\!\int \left[\sigma_{rm} + \frac{2G}{r} [u_{rm}] \right] u_{rk} dz d\vartheta = \int\limits_{l}\int\limits_{0}^{2\pi} \left[\tau_{rz,\,k} + \frac{2G}{r} u_{\vartheta k} \right] u_{\vartheta m} dz d\vartheta +$$

$$+ \int\limits_{l}\int\limits_{0}^{2\pi} \tau_{rz,\,k} w_m dz d\vartheta \tag{2.6}$$

$$\int\limits_{l} \left[\sigma_{rm} + \frac{2G}{r} \left(u_{rm} + \frac{\partial u_{\vartheta m}}{\partial \vartheta} \right) \right] u_{rk} dz = \int\limits_{l} \tau_{rz,\,k} w_m dz \tag{2.7}$$

где $\int\limits_{l}$ обозначает суммирование интегралов по всем слоям, включая подстилающее полупространство.

Равенство (2.5) имеет место при плоской деформации, равенства (2.6), (2.7), если напряжения и перемещения пропорциональны $\cos n\theta$ $(\sin n\theta)$.

Зависимости (2.5), (2.6), (2.7) выражают разновидность теоремы взаимности работ, которая присуща только однородным решениям. При рассмотрении конкретных задач они предпочтительнее зависимостей, приведенных в [9], [10], содержащих операторы функций φ_k и φ_m, так как допускают физическое толкование этапов решения и оценку отдельных итераций.

Равенства (2.5), (2.7) могут быть представлены в виде

$$\gamma_m^2 \Phi_m \int\limits_{l} \varphi''_m u_k (u_{rk})\, dz = \int\limits_{l} \tau_{xz,\,k} (\tau_{rz,\,k})\, w_m dz \tag{2.8}$$

Решения первого рода для слоистого полупространства можно формально пополнить слагаемыми с непрерывным спектром собственных чисел. Эти решения, в отличие от рассмотренных выше, вырождаются в пределе в решения для однородного полупространства. Ниже показано, что собственные функции этого класса не могут быть использованы для построения решений краевых задач, удовлетворяющих условиям единственности, их свойства лишь полезны при рассмотрении вопросов о корректности постановки этих задач. Эти вопросы в первую очередь возникают при рассмотрении деформации областей, выделенных из однородного полупространства.

Собственные функции первого рода для однородного полупространства по-прежнему записываются в виде (2.1), (2.2) с заменой $\gamma_k \to \gamma$. Функция φ определяется равенством

$$\varphi = \varphi_0 = A_1(\gamma)\,\varphi_1(\gamma z) + A_2(\gamma)\,\varphi_2(\gamma z) \tag{2.9}$$

$$\varphi_1(\gamma z) = \gamma z \sin \gamma z, \quad \varphi_2(\gamma z) = \sin \gamma z - \gamma z \cos \gamma z \tag{2.10}$$

Функция φ_0 обладает свойством, родственным обобщенной ортогональности

$$\int\limits_0^\infty \left[\frac{\partial^2 \varphi_0(\gamma z)}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \varphi_0(\gamma_1 z)}{\partial z^2} - \gamma^2 \gamma_1^2 \varphi_0(\gamma z)\, \varphi_0(\gamma_1 z) \right] dz =$$

$$= [A_1(\gamma)\, A_1(\gamma_1) + A_2(\gamma)\, A_2(\gamma_1)]\, \delta(\gamma - \gamma_1) \tag{2.11}$$

где γ_1 — фиксированное значение переменной γ; $\delta(\gamma - \gamma_1)$ — дельта-функция.

Условиям „ортогональности“ удовлетворяют также функции $\varphi_1 (A_2 = 0)$ и $\varphi_2 (A_1 = 0)$. Функции φ_1 и φ_2 взаимно не „ортогональны“.

Решения указанного класса, построенные для слоистого полупространства, обладают всеми свойствами, отмеченными здесь и в дальнейшем при рассмотрении однородной среды, так как они содержат, в пределах подстилающего полупространства, функции φ_0. Естественно, что условия «ортогональности» при этом усложняются, однако здесь эти решения не выписываются, так как они в дальнейшем не используются.

Напряженное состояние второго рода существенно зависит от условий на границах слоев. Если на контактных плоскостях отсутствуют касательные напряжения, слои деформируются независимо. Этот случай здесь не рассматривается. При полной спайке слоев однородные решения второго рода записываются в виде

$$L = \Psi(\gamma,\ z)\, \Phi^* \tag{2.12}$$

где Φ^* — функция, также удовлетворяющая уравнению

$$D^2\Phi^* = \gamma^2\Phi^* \tag{2.13}$$

Формулы для определения Ψ также с точностью до множителя совпадают с формулами для определения трансформант функций L, полученными при построении неоднородных слагаемых, если в них произвести замену $\gamma \to i\gamma$.

Здесь спектр собственных чисел только непрерывен. Функции Ψ обладают свойствами

$$\int\limits_l \Psi(\gamma,\ z)\, \Psi(\gamma_1,\ z)\, dz = \omega(\gamma_1)\, \delta(\gamma - \gamma_1) \tag{2.14}$$

где $\delta(\gamma - \gamma_1)$ — по-прежнему дельта-функция.

При этом функции $\Psi(\gamma,\ z)$ могут рассматриваться как ядра интегральных преобразований. Формулы обращения имеют вид*

$$f(z) = \int\limits_0^\infty g(\gamma)\, \Psi(\gamma,\ z)\, d\gamma, \quad g(\gamma) = \frac{1}{\omega(\gamma)} \int\limits_0^\infty f(z)\, \Psi(\gamma,\ z)\, dz \tag{2.15}$$

* Способ построения формул обращения указан В. М. Бабичем.

3. Решения краевых задач для областей, выделенных из многослойного полупространства, представляются суммированием однородных слагаемых. Можно указать задачи, при решении которых уравнения для определения коэффициентов при однородных слагаемых отделяются или для их определения можно построить итерационный процесс. В качестве примера рассматривается деформация слоистого (однородного) полупространства с цилиндрической выемкой (ось цилиндра нормальна к границе полупространства). При осесимметричной деформации на цилиндрической поверхности ($r = a$) дано

$$u_r = u_0(z), \quad \tau_{rz} = t_{z0}(z), \quad \int_z^{\infty} t_{z0}\, dz = 0, \quad \lim_{z \to \infty} u_0 = 0 \tag{3.1}$$

Осесимметричная деформация многослойной области рассматривалась в [11]. Авторы ошибочно полагают, что ими получено решение, удовлетворяющее условиям (3.1). В действительности, это решение позволяет удовлетворить неоднородным условиям на границе полупространства, а при $r = a$ равенствам $u_r = 0$, $\tau_{rz} = 0$.

Для однородного полупространства с цилиндрическим отверстием поставленная задача решена в [12]. В данной работе деформация однородной области рассматривается с целью более полного изучения свойств функций с непрерывным спектром собственных чисел.

При осесимметричной деформации в решении сохраняются слагаемые первого рода, причем вспомогательная функция П для однородной области записывается в виде

$$\Pi = \int_0^{\infty} \varphi_0(\gamma z)\, K_0(\gamma r)\, d\gamma \tag{3.2}$$

где $\varphi_0(\gamma r)$ — функция, определяемая формулой (2.9), $K_0(\gamma r)$ — функция Макдональда.

Граничные условия принимают вид

$$T_0 = \int_0^{z} t_{z0}\, dz = \int_0^{\infty} \gamma^2 \varphi_0(\gamma z)\, K_1(\gamma a)\, d\gamma \tag{3.3}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} u_0 - \frac{\nu}{1-\nu} T_0 = -\int_0^{\infty} \gamma \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} K_1(\gamma a)\, d\gamma \tag{3.4}$$

Из (3.3), (3.4) вытекает равенство

$$P_0(\gamma_1) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \left[\frac{\partial^2 \varphi_0(\gamma z)}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \varphi_0(\gamma_1 z)}{\partial z^2} - \gamma^2 \gamma_1^2 \varphi_0(\gamma z)\, \varphi_0(\gamma_1 z) \right] \gamma K_1(\gamma a)\, d\gamma\, dz \tag{3.5}$$

где

$$P_0(\gamma_1) = -\int_0^\infty \left\{ \left[\frac{E}{1-\nu^2} u_0 - \frac{\nu}{1-\nu} T_0 \right] \frac{\partial^2 \varphi_0(\gamma_1 z)}{\partial z^2} + \gamma_1^2 T_0 \varphi_0(\gamma_1 z) \right\} dz \qquad (3.6)$$

γ_1 — по-прежнему фиксированное значение переменной γ.

Установим, что решения поставленной краевой задачи, использующие функции φ_0 с непрерывным спектром собственных чисел, не удовлетворяют условиям единственности.

Действительно, доказательство теоремы единственности основано на выражении потенциальной энергии, заключенной в твердом теле с помощью формулы Гаусса. Если напряжения и деформации суть разности соответствующих величин, определяемых функциями φ^* и φ^{**}, то потенциальная энергия, заключенная в полом цилиндре с радиусами a и r (r — произвольно), выражается расходящимся интегралом, формула Гаусса при этом теряет смысл, а условие единственности не выполняется.

Здесь не требуется построения полного спектра решений поставленной краевой задачи. Следует лишь различать два случая. В первом существуют решения, определяемые функцией φ, что свидетельствует о некорректности поставленных условий; во втором случае решение, использующее собственные функции данного класса, выражается расходящимся интегралом. В этом случае граничные условия допускают построение единственного решения, но оно не может быть получено указанным путем. Этот второй случай исследован в [12].

Для указанных целей достаточно получить любые решения, удовлетворяющие необходимому условию (3.5), например, решения, определяемые функциями φ_1 и φ_2. Из (2.9), (3.5) и условий «ортогональности» имеем

$$A_{1,2}(\gamma) = \frac{P_{1,2}(\gamma)}{\gamma^5 K_1(\gamma a)} \qquad (3.7)$$

где $P_{1,2}(\gamma)$ — функции, определяемые (3.6) при замене $\varphi_0(\gamma)$ на $\varphi_1(\gamma)$ или $\varphi_2(\gamma)$.

Рассматриваются примеры. В первом примере дано:

$$u_0 = 0, \quad T_0 = q_0 z^2 \exp(-z)$$

Здесь имеет место первый из указанных случаев. Функции $\varphi_1(\gamma z)$ и $\varphi_2(\gamma z)$ определяются независимо. Приводятся, например, выражения для перемещений границы

$$w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = \frac{8(1-\nu^2)q_0}{E} \int_0^\infty \frac{\gamma[3 - 8\gamma^2 + \gamma^4 - \nu(3 + 2\gamma^2 + \gamma^4)] K_0(\gamma r) d\gamma}{(1+\gamma^2)^4 K_1(\gamma a)}$$

Во втором примере дано:

$$u_0 = 0, \quad T_0 = \begin{cases} q_0(1 - \cos \beta z) \quad (\beta = 2\pi/a) & z < a \\ 0 & z > a \end{cases}$$

Здесь имеет место второй из рассмотренных случаев. Напряжения и перемещения, определяемые функциями $\varphi_1(\gamma z)$, $\varphi_2(\gamma z)$, представлены расходящимися интегралами. Можно ожидать, что условие единственности решения всегда выполняется, если нагрузка распределена на ограниченном участке поверхности выемки. В [12] это условие выполняется.

При рассмотрении деформации слоистого полупространства решения, зависящие от корней трансцендентных уравнений, и решения с непрерывным спектром собственных чисел определяются независимо. Последние здесь опускаются, так как они также нарушают условия единственности. Корректность постановки задачи выясняется в процессе решения без использования этих функций.

В этом случае функция П записывается в виде

$$\Pi = \sum_1^\infty C_k \Pi_k = \sum_1^\infty C_k \varphi_k(\gamma_k, z) K_0(\gamma_k r) \tag{3.8}$$

где $K_0(\gamma_k r)$ — по-прежнему функция Макдональда.

На основании (2.9) имеем

$$C_k = \frac{\gamma_k^2 K_0(\gamma_k a) \int\limits_l u_0 \varphi_k'' dz - \int\limits_l t_{z0} w_k dz}{\gamma_k^2 K_0(\gamma_k a) \int\limits_l u_{rk} \varphi_k'' dz - \int\limits_l \tau_{rz,k} w_k dz} \tag{3.9}$$

где $u_{rk}, \ldots, \tau_{rz,k}$ — перемещения и напряжения, определяемые функциями Π_k при $r = a$.

Решения, определяемые (3.8), (3.9), удовлетворяют условиям единственности. При корректной постановке граничных условий ряды сходятся.

Если на цилиндрической границе выемки даны перемещения $u_\theta = u_{\theta 0}$ (или напряжения $\tau_{r\theta} = t_{\theta 0}$), в решении сохраняются слагаемые второго рода, которые записываются в виде

$$L = \int\limits_0^\infty g(\gamma) \Psi(\gamma, z) K_0(\gamma r) d\gamma \tag{3.10}$$

Положим для определенности, что при $r = a$ $u_\theta = u_{\theta 0}$.

Тогда граничное условие записывается в виде

$$u_{\theta 0} = -\int\limits_0^\infty \gamma g(\gamma) \Psi(\gamma, z) K_1(\gamma a) \tag{3.11}$$

Функция $g(\gamma)$ определяется по формуле обращения. Если на цилиндрической поверхности выемки заданы перемещения и напряжения, пропорциональные $\cos n\theta$ или $\sin n\theta$, то в решении сохраняются слагаемые первого и второго рода, определяемые при каждом n равенствами

$$\Pi = \sum_{k=1}^{\infty} C_{kn}\Pi_{kn}, \quad \Pi_{kn} = \varphi_k(\gamma_k, z) K_n(\gamma_k r)\cos n\theta \tag{3.12}$$

$$L = \sin n\theta \int_0^{\infty} g(\gamma)\Psi(\gamma, z) K_n(\gamma r)\, d\gamma \tag{3.13}$$

Коэффициенты C_{kn} и функция $g(\gamma)$ при двух расчетных схемах определяются в результате итерационного процесса.

В первом случае при $r = a$ дано:

$$u_r = u_{r0} = u_r^* \cos n\theta, \quad \tau_{rz} = t_z^* \cos n\theta = t_{z0}, \quad u_\theta = u_\theta^* \sin n\theta$$

во втором случае при $r = a$ имеем

$$u_r = u_{r0}, \ \tau_{rz} = t_{z0}, \quad \tau_{r\theta} = t_\theta^* \sin n\theta$$

Граничные условия, например, для первой расчетной схемы, приводят к равенствам

$$u_{r0} = \sum_1^{\infty} C_{kn} u_{r,\,kn} + n\cos\theta \int_0^{\infty} g(\gamma)\Psi(\gamma, z) K_n(\gamma a)\, d\gamma$$

$$t_{z0} = \sum_1^{\infty} C_{kn}\tau_{rz,\,kn} + nG\cos n\theta \int_0^{\infty} g(\gamma)\frac{\partial\Psi(\gamma, z)}{\partial z} K_n(\gamma a)\, d\gamma \tag{3.14}$$

$$u_{\theta 0} = \sum_1^{\infty} C_{kn} u_{\theta,\,kn} + \frac{1}{2}\sin n\theta \int_0^{\infty} \gamma g(\gamma)\Psi(\gamma, z)[K_{n+1}(\gamma a) + K_{n-1}(\gamma a)]\, d\gamma \tag{3.15}$$

где $u_{r,\,kn}, \ldots, \tau_{rz,\,kn}$ — перемещения и напряжения, определяемые функциями Π_{kn} при $r = a$.

При определении постоянных и $g(\gamma)$ примем во внимание то обстоятельство, что однородные решения первого рода, в основном, влияют на напряжения и перемещения, нормальные к контуру выемки и параллельные оси z; решения второго рода — на напряжения и перемещения, направленные по касательной к контуру. Это вытекает из зависимостей (1.1) и интенсивного затухания (с увеличением r) функций F, т, L, s. Положим, что в правой части равенств (3.14) преобладают ряды, порожденные решением первого рода, а в равенстве (3.15) — интегральное слагаемое, порожденное решением второго рода. Предлагается следующая схема итерационного процесса.

Выполняются разложения

$$f_1^{(e)} = \sum_1^{\infty} C_{kn}^{(e)} u_{r,\,kn}$$

$$f_2^{(e)} = \sum_1^n C_{kn}^{(e)} \tau_{rz,\, kn}$$

$$f_3^{(e)} = \frac{1}{2} \sin n\theta \int_0^\infty \gamma g^{(e)}(\gamma)\, \Psi(\gamma, z) \left[K_{n-1}(\gamma a) + K_{n+1}(\gamma a)\right] d\gamma \qquad (3.16)$$

где $f_1^{(e)}, f_2^{(e)}, f_3^{(e)}$ — функции, которые на каждом шаге определяются равенствами

$$f_1^{(1)} = u_{r0},\ f_2^{(1)} = t_{z0},\ f_3^{(1)} = u_{\theta 0}$$

$$f_1^{(e)} = f_2^{(e-1)} - n \cos n\theta \int_0^\infty g^{(e-1)}\, \Psi(\gamma, z)\, K_n(\gamma a)\, d\gamma$$

$$f_2^{(e)} = f_2^{(e-1)} - nG' \cos n\theta \int_0^\infty g^{(e-1)}(\gamma) \frac{\partial \Psi(\gamma, z)}{\partial z} K(\gamma a)\, d\gamma$$

$$f_3^{(e)} = f_3^{(e-1)} - \sum_1^\infty C_{kn}^{(e-1)} u_{\theta,\, kn}$$

На каждом шаге коэффициенты C_{kn} определяются по формуле (3.9), если произвести замену:

$$C_k \to C_{kn}^{(e)}, \quad K_0(\gamma_k a) \to K_n(\gamma_k a) \cos n\theta, \quad u_0 \to f_1^{(e)}, \quad t_{z0} \to f_2^{(e)}$$

Процесс продолжается до стабилизации. Аналогичная схема итерационного процесса была использована при расчете слоистых плит [13]. В рассмотренных случаях необходимая точность решения достигалась на третьем шаге.

ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՀԱՄԱՍԵՌ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ռ. Մ. ԽԱԳՈԳՈՐՏ

Ամփոփում

Կառուցված է շերտավոր առաձգական կիսատարածության համար առանցքային եզրային խնդրի համասեռ լուծումների համակարգ, կազմված երկու խմբից։ Առաջին սեռի լուծումները կախված են տրանսցենդենտ հավասարման արմատներից, դրանք հաշվելի բազմություն են։ Այդ լուծումները օժտված են ընդհանրացված օրթոգոնալության հատկությամբ։ Երկրորդ սեռի սեփական թվերի սպեկտրը անընդհատ է։ Երկրորդ սեռի սեփական ֆունկցիաները դիտարկվում է որպես ինտեգրալ ձևափոխությունների կորիզ։

Բերվում է շրջման բանաձևեր։