ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 6, 1983 Механика

КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

МКРТЧЯН П. А.

В работе на основе трехмерных уравнений магнитоупругости при условии справедливости гипотезы Кирхгофа дается решение задачи магнитоупругих колебаний бесконечной пластинки в поперечном магнитном поле. Определены значения векторов индуцированных электромагнитных полей и получены характеристические уравнения, определяющие частоты магнитоупругих колебаний пластинки. Задача решается также на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел. Приводится сравнительный анализ о точности приближения гипотезы магнитоупругости тонких тел для данной задачи.

1. Пусть бесконечная изотропная пластинка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью σ, находится в поперечном стационарном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0\,(0,\ 0,\ H_0)$. Магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки и среды, окружающей пластинку, считаются равными единице. Прямоугольная система координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ выбрана так, что координатная плоскость (x_1x_2) совпадает со срединной плоскостью пластинки. В отношении тонкой пластинки принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

В силу принятых предположений для рассматриваемой задачи после некоторых преобразований получим следующие линеаризованные исходные уравнения [1, 2].

Во внутренней области $(|x_3| \leqslant h)$:

уравнения электродинамики

$$\operatorname{rot}\vec{h}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\vec{h}=0 \tag{1.1}$$

уравнения движения пластинки

$$\Delta\theta-\frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\frac{\sigma H_0}{2\rho hc_0^2c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{h}h_3dx_3$$

$$\frac{1-\nu}{2}\Delta\chi-\frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2c^2}\frac{\partial\chi}{\partial t}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=\frac{\sigma H_0}{2\rho h c_0^2 c}\int_{-h}^{h}\left(\frac{\partial e_1}{\partial x_1}+\frac{\partial e_2}{\partial x_2}\right)dx_3 \tag{1.2}$$

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\sigma H_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{h}x_3h_3\,dx_3=\frac{2\sigma h^3H_0^2}{3c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta w$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластинки, c — скорость света, c_0 — скорость звука в материале пластинки, $\vec{h}\,(h_1, h_2, h_3)$ и $\vec{e}\,(e_1, e_2, e_3)$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей для внутренней области, $\vec{u}\,(u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещения произвольной точки пластинки, $u\,(x_1, x_2, t)$, $v\,(x_1, x_2, t)$, $w\,(x_1, x_2, t)$ — тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности пластинки,

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2},\qquad \chi=\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$c_0^2=\frac{E}{\rho(1-\nu^2)},\qquad D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)},\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Во внешней области ($|x_3|>h$):
уравнения электродинамики для вакуума

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}&=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}^{(e)}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\vec{e}^{(e)}=0\\ \operatorname{rot}\vec{e}^{(e)}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0\end{aligned} \tag{1.3}$$

В (1.3) индекс $e=1$ относится к области $x_3>h$, а $e=2$ — к области $x_3<-h$.

Решения уравнений (1.1) и (1.3) должны удовлетворять следующим линеаризованным поверхностным условиям на разделе двух сред [1]:

$$\vec{h}=\vec{h}^{(e)},\quad e_1=e_1^{(e)},\quad e_2=e_2^{(e)}\quad \text{при}\ x_3=\pm h \tag{1.4}$$

Таким образом, трехмерная задача магнитоупругих колебаний тонкой пластинки в поперечном магнитном поле на основе гипотезы недеформируемых нормалей свелась к совместному интегрированию системы уравнений (1.1)—(1.3), решения которых должны удовлетворять поверхностным условиям (1.4) и следующим условиям затухания возбужденного электромагнитного поля на бесконечности

$$\vec{h}^{(e)}\to 0,\ e_1^{(e)}\to 0,\ e_2^{(e)}\to 0\ \text{при}\ |x_3|\to\infty \tag{1.5}$$

Решения уравнений (1.1)—(1.3) представим в виде

$$w = w_0 \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad u = u_0 \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)]$$
$$v = v_0 \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad Q = Q_0(x_3) \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)] \tag{1.6}$$

Здесь под Q понимается любая искомая компонента возбужденного электромагнитного поля, ω — частота колебаний, $k_1 = \pi/\lambda_1$, $k_2 = \pi/\lambda_2$ — волновые числа, λ_1 и λ_2 — длины полуволн соответственно по направлениям осей ox_1 и ox_2.

Подставляя (1.6) в уравнения (1.1)—(1.3), после некоторых преобразований получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для определения неизвестных коэффициентов $Q_0(x_3)$ компонент возбужденного магнитного поля:

$$\frac{d^2 h_{01}}{dx_3^2} - \nu_1^2 h_{01} = \frac{4\pi\sigma H_0 \omega k_1 w_0}{c^2}, \qquad \frac{d^2 h_{02}}{dx_3^2} - \nu_1^2 h_{02} = \frac{4\pi\sigma H_0 \omega k_2 w_0}{c^2}$$

$$\frac{d^2 h_{03}}{dx_3^2} - \nu_1^2 h_{03} = \frac{4\pi\sigma H_0 \omega}{c^2} \left[k_1 u_0 + k_2 v_0 + i(k_1^2 + k_2^2) w_0 x_3\right] \tag{1.7}$$

$$\frac{d^2 \vec{h}_0^{(e)}}{dx_3^2} - \nu_{01}^2 \vec{h}_0^{(e)} = 0, \quad \nu_{01}^2 = k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \qquad \nu_1^2 = \nu_{01}^2 + \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}$$

Коэффициенты возбужденного электрического поля определяются через коэффициенты возбужденного магнитного поля формулами

$$e_{01} = -\frac{c}{i\omega\nu_2}\left[ik_2 h_{03} + \frac{dh_{02}}{dx_3} + \frac{4\pi\sigma i\omega H_0}{c^2}(v_0 + ik_2 w_0 x_3)\right]$$

$$e_{02} = \frac{c}{i\omega\nu_2}\left[-ik_1 h_{03} + \frac{dh_{01}}{dx_3} + \frac{4\pi\sigma i\omega H_0}{c^2}(u_0 + ik_1 w_0 x_3)\right]$$

$$e_{03} = \frac{c}{\omega\nu_2}(-k_1 h_{02} + k_2 h_{01}), \quad e_{01}^{(e)} = -\frac{c}{i\omega}\left[ik_2 h_{03}^{(e)} + \frac{dh_{02}^{(e)}}{dx_3}\right] \tag{1.8}$$

$$e_{02}^{(e)} = \frac{c}{i\omega}\left[ik_1 h_{03}^{(e)} + \frac{dh_{01}^{(e)}}{dx_3}\right], \quad e_{03}^{(e)} = \frac{c}{\omega}\left[-k_1 h_{02}^{(e)} + k_2 h_{01}^{(e)}\right], \quad \nu_2 = 1 + \frac{4\pi\sigma}{i\omega}$$

Найдя общее решение уравнения (1.7), удовлетворяя граничным условиям (1.4) и условиям затухания возмущений на бесконечности (1.5), определим указанные неизвестные функции и, следовательно, индуцированное электромагнитное поле во внутренней и внешней областях:

$$h_1 = \gamma_1'(x_3)\, u - \gamma_3(x_3) \frac{\partial \chi}{\partial x_2} - \gamma_2'(x_3) \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

$$h_2 = \gamma_1'(x_3)\, v + \gamma_3(x_3) \frac{\partial \chi}{\partial x_1} - \gamma_2'(x_3) \frac{\partial w}{\partial x_2}$$

$$h_3 = -\gamma_1(x_3)\,\theta + \gamma_2(x_3)\Delta w$$

$$e_1 = \frac{c}{j\omega\nu_2}\left[\gamma_2(x_3)\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta w + \gamma_2'(x_3)\frac{\partial w}{\partial x_2} - \gamma_1(x_3)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2} - \right.$$

$$\left. - \gamma_3'(x_3)\frac{\partial\chi}{\partial x_1} - \gamma_1''(x_3)\,v - \frac{4\pi\sigma j\omega H_0}{c^2}\left(v - x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\right]$$

$$e_2 = -\frac{c}{j\omega\nu_2}\left[\gamma_2(x_3)\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta w + \gamma_2'(x_3)\frac{\partial w}{\partial x_1} - \gamma_1(x_3)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \gamma_3'(x_3)\frac{\partial\chi}{\partial x_2} - \gamma_1''(x_3)\,u - \frac{4\pi\sigma j\omega H_0}{c^2}\left(u - x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\right]$$

$$e_3 = \frac{c}{j\omega\nu_2}[\gamma_1'(x_3)\,\chi + \gamma_3(x_3)\,\Delta\chi]$$

$$h_1^{(1)} = \left[\gamma_1'(h)\,u - \gamma_3(h)\frac{\partial\chi}{\partial x_2} - \gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\exp[-\nu_{01}(x_3 - h)]$$

$$h_2^{(1)} = \left[\gamma_1'(h)\,v + \gamma_3(h)\frac{\partial\chi}{\partial x_1} - \gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_2}\right]\exp[-\nu_{01}(x_3 - h)]$$

$$h_3^{(1)} = -[\gamma_1(h)\,\vartheta - \gamma_2(h)\,\Delta w]\exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] \qquad (1.9)$$

$$e_1^{(1)} = \frac{c}{j\omega}\left[\gamma_2(h)\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta w - \nu_{01}\gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_2} - \gamma_1(h)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2} + \right.$$

$$\left. + \nu_{01}\gamma_1'(h)\,v + \nu_{01}\gamma_3(h)\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right]\exp[-\nu_{01}(x_3 - h)]$$

$$e_2^{(1)} = -\frac{c}{j\omega}\left[\gamma_2(h)\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta w - \gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_1} - \gamma_1(h)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \nu_{01}\gamma_1'(h)\,u - \nu_{01}\gamma_3(h)\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right]\exp[-\nu_{01}(x_3 - h)]$$

$$e_3^{(1)} = \frac{c}{j\omega}[\gamma_1'(h)\,\chi + \gamma_3(h)\,\Delta\chi]\exp[-\nu_{01}(x_3 - h)]$$

$$h_1^{(2)} = -\left[\gamma_1'(h)\,u + \gamma_3(h)\frac{\partial\chi}{\partial x_2} + \gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\exp[\nu_{01}(x_3 + h)]$$

$$h_2^{(2)} = -\left[\gamma_1'(h)\,v - \gamma_3(h)\frac{\partial\chi}{\partial x_1} + \gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_2}\right]\exp[\nu_{01}(x_3 + h)]$$

$$h_3^{(2)} = -[\gamma_1(h)\,\vartheta + \gamma_2(h)\,\Delta w]\exp[\nu_{01}(x_{31} + h)]$$

$$e_1^{(2)} = -\frac{c}{j\omega}\left[\gamma_2(h)\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta w - \nu_{01}\gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_2} + \gamma_1(h)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2} - \right.$$

$$\left. - \nu_{01}\gamma_1'(h)\,v + \nu_{01}\gamma_3(h)\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right]\exp[\nu_{01}(x_3 + h)]$$

$$e_2^{(2)} = \frac{c}{i\omega}\left[\gamma_2(h)\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta w - \nu_{01}\gamma_2'(h)\frac{\partial w}{\partial x_1} + \gamma_1(h)\frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \right.$$

$$\left. - \nu_{01}\gamma_1'(h)\,u - \nu_{01}\gamma_3(h)\frac{\partial \chi}{\partial x_2}\right]\exp[\nu_{01}(x_3+h)]$$

$$e_3^{(2)} = -\frac{c}{i\omega}[\gamma_1'(h) - \gamma_3(h)\,\Delta\chi]\exp[\nu_{01}(x_3+h)]$$

Здесь штрих означает производную по переменной x_3

$$\gamma_1(x_3) = \frac{4\pi\sigma i\omega H_0}{\nu_1^2 c^2}\left(1 - \frac{\nu_{01}\operatorname{ch}\nu_1 x_3}{\Delta_1}\right), \quad \Delta_1 = \nu_{01}\operatorname{ch}\nu_1 h + \nu_1\operatorname{sh}\nu_1 h$$

$$\gamma_2(x_3) = \frac{4\pi\sigma i\omega H_0}{\nu_1^2 c^2}\left[x_3 - \frac{(1+\nu_{01}h)\operatorname{sh}\nu_1 x_3}{\Delta_2}\right], \quad \Delta_2 = \nu_1\operatorname{ch}\nu_1 h + \nu_{01}\operatorname{sh}\nu_1 h$$

$$\gamma_3(x_3) = -\frac{(4\pi\sigma)^2 H_0}{\nu_1 c^2}\,\frac{\operatorname{sh}\nu_1 h\operatorname{sh}\nu_1 x_3}{\Delta_1\Delta_3}, \quad \Delta_3 = \nu_1\operatorname{ch}\nu_1 h + \nu_{01}\nu_2\operatorname{sh}\nu_1 h$$

Подставляя (1.6) и (1.9) в уравнения (1.2) и выполняя соответствующее интегрирование, найдем характеристические уравнения, определяющие частоты колебаний. Характеристические уравнения, описывающие распространение быстрых и медленных магнитоупругих волн в плоскости пластинки, получаются из первых двух уравнений системы (1.2) и соответственно имеют вид

$$k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} + i\omega\frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\left[1 - \frac{4\pi\sigma i\omega}{\nu_1^2 c^2}\left(1 - \frac{\nu_{01}\operatorname{sh}\nu_1 h}{\nu_1 h\Delta_1}\right)\right] = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{1-\nu}{2}(k_1^2+k_2^2) - \frac{\omega^2}{c_0^2} + i\omega\frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\left\{1 + \frac{1-\nu_2}{\nu_2}\left[1 - \frac{\nu_{01}\operatorname{sh}\nu_1 h}{\nu_1 h\Delta_1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(1-\nu_2)(k_1^2+k_2^2)\operatorname{sh}^2\nu_1 h}{\nu_1 h\Delta_1\Delta_3}\right]\right\} = 0 \quad (1.11)$$

Характеристическое уравнение, определяющее частоты поперечных колебаний пластинки, получается из третьего уравнения (1.2) и имеет вид

$$\Omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2\sigma h^3 H_0^2 i\omega\Omega_0}{3c^2\sqrt{2D\rho h}}\left\{1 - \frac{4\pi\sigma i\omega}{\nu_1^2 c^2}\left[1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3(1+\nu_{01}h)(\nu_1 h\operatorname{ch}\nu_1 h - \operatorname{sh}\nu_1 h)}{\nu_1^2 h^3\Delta_2}\right]\right\} = 0 \quad (1.12)$$

где $\Omega_0 = (k_1^2+k_2^2)\sqrt{D/2\rho h}$ — частота собственных колебаний пластинки в вакууме при отсутствии магнитного поля.

Уравнения (1.10)—(1.12) являются трансцендентными, нахождение их корней связано со значительными трудностями. Исследование корней уравнений (1.10)—(1.12) существенно упрощается, если предположить [1], что

$$|\nu_1^2 h^2| \ll 1 \quad (1.13)$$

Используя условие (1.13), из (1.9) для компонент возбужденного электромагнитного поля в области $|x_3| \leqslant h$ получим следующие упрощенные выражения:

$$h_1 = \frac{4\pi\sigma H_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x_3}{\delta_1}\left(\frac{h}{\delta_3}\frac{\partial\chi}{\partial x_2} - \nu_{01}u\right) + \left(\frac{x_3^2 - h^2}{2} + \frac{\nu_{01}h^3}{3\delta_2}\right)\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]$$

$$h_2 = -\frac{4\pi\sigma H_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x_3}{\delta_1}\left(\frac{h}{\delta_3}\frac{\partial\chi}{\partial x_1} + \nu_{01}v\right) - \left(\frac{x_3^2 - h^2}{2} + \frac{\nu_{01}h^3}{3\delta_2}\right)\frac{\partial w}{\partial x_2}\right]$$

$$h_3 = -\frac{4\pi\sigma h H_0}{\delta_1 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\theta + \frac{\delta_1 x_3}{\delta_2 h}\left[\frac{x_3^2 - h^2}{2}\left(1 + \frac{\nu_{01}h}{3}\right) - \frac{x_3^2}{3}\right]\Delta w\right\}$$

$$\begin{aligned} e_1 = -\frac{4\pi\sigma H_0}{\nu_2 c}\Bigg\{\frac{x_3}{\delta_2}\left[\frac{x_3^2 - h^2}{2}\left(1 + \frac{\nu_{01}h}{3}\right) - \frac{x_3^2}{3}\right]\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta w + \\ + \frac{h}{\delta_1}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \nu_1^2 v - \frac{1}{\delta_3}\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right]\Bigg\} \end{aligned} \qquad (1.14)$$

$$\begin{aligned} e_2 = \frac{4\pi\sigma H_0}{\nu_2 c}\Bigg\{\frac{x_3}{\delta_2}\left[\frac{x_3^2 - h^2}{2}\left(1 + \frac{\nu_{01}h}{3}\right) - \frac{x_3^2}{3}\right]\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta w + \\ + \frac{h}{\delta_1}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \nu_1^2 u + \frac{1}{\delta_3}\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right]\Bigg\} \end{aligned}$$

$$e_3 = -\frac{4\pi\delta H_0}{\delta_1\nu_2 c}x_3\left(\nu_{01}\chi + \frac{h}{\delta_3}\Delta\chi\right)$$

где

$$\delta_1 = \nu_{01} + \nu_1^2 h, \quad \delta_2 = 1 + \nu_{01}h, \quad \delta_3 = \frac{i\omega(1 + \nu_{01}\nu_2 h)}{4\pi\sigma}$$

Уравнения, определяющие частоты колебаний в плоскости пластинки (1.10) и (1.11), соответствующей условию (1.13), соответственно принимают вид

$$k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} + i\omega\frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\left[1 - \frac{4\pi\sigma i\omega h}{c^2(\nu_{01} + \nu_1^2 h)}\right] = 0 \qquad (1.15)$$

$$\frac{1-\nu}{2}(k_1^2 + k_2^2) - \frac{\omega^2}{c_0^2} + i\omega\frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\left[1 - \frac{4\pi\sigma\nu_{01}h}{i\omega(1 + \nu_2\nu_{01}h)}\right] = 0 \qquad (1.16)$$

Последний член в уравнении (1.15) учитывает влияние поперечного магнитного поля на скорость распространения быстрых магнитоупругих волн в плоскости пластинки. Этот член, как и следовало ожидать, полностью совпадает с соответствующим членом характеристического уравнения поперечных колебаний пластинки в продольном магнитном поле [3], учитывающим влияние продольного магнитного поля.

Принимая условие (1.13), из (1.12) получим квадратное уравнение относительно частоты поперечных колебаний пластинки

$$\omega^2 - \Omega_0^2 = 2\alpha\Omega_0 i\omega, \qquad \left(\alpha = \frac{\sigma h^3 H_0^2}{3c^2\sqrt{2D\rho h}}\right) \tag{1.17}$$

Параметр α характеризует отношение силы электромагнитного происхождения к силе упругого сопротивления.

Рассматривая (1.17), замечаем, что характер движения пластинки в магнитном поле существенно зависит от величины параметра α.

Если $\alpha \leqslant 1$ (в этом случае преобладающими являются упругие силы), то

$$\mathrm{Re}\,\omega = \pm\,\Omega_0\sqrt{1-\alpha^2}, \quad \mathrm{Im}\,\omega = \Omega_0\alpha \tag{1.18}$$

Из (1.18) следует, что в этом случае магнитное поле приводит к уменьшению частоты поперечных колебаний. Кроме того, имеется также затухание начальных возмущений по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания $\Omega_0\alpha$.

Если же $\alpha > 1$ (преобладают силы электромагнитного происхождения), то

$$\mathrm{Re}\,\omega = 0, \quad \mathrm{Im}\,\omega = \Omega_0(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1}) > 0 \tag{1.19}$$

В этом случае начальные возмущения затухают по экспоненциальному закону, не проходя через положение равновесия.

2. Рассмотрим задачу магнитоупругих колебаний пластинки в поперечном магнитном поле на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел. Эти гипотезы аналитически представляются следующим образом [1]:

$$u_1 = u - x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = v - x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w(x_1, x_2, t) \tag{2.1}$$

$$e_1 = \varphi(x_1, x_2, t), \quad e_2 = \psi(x_1, x_2, t), \quad h_3 = f(x_1, x_2, t)$$

Здесь φ, ψ — искомые тангенциальные компоненты индуцированного в пластинке электрического поля, f — искомая нормальная компонента индуцированного в пластинке магнитного поля.

Предположим, что в пластинке можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. Тогда уравнения, определяющие искомые компоненты возбужденного электромагнитного поля φ, ψ, f и перемещения u, v, w, после некоторых преобразований записываются следующим образом [1]:

$$\begin{gathered}
\Delta\theta - \frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\sigma H_0}{\rho c_0^2 c^2}\frac{\partial f}{\partial t} \\
\frac{1-\nu}{2}\Delta\chi - \frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \frac{\sigma H_0}{\rho c_0^2 c}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) \\
D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\sigma h^3 H_0^2}{3c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta w = 0 \\
\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = 0
\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi-\frac{H_0}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{h_1^+-h_1^-}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi+\frac{H_0}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\frac{h_2^+-h_2^-}{2h}$$

где индексы плюс и минус означают значения соответствующих величин при $x_3=h$ и $x_3=-h$.

Формулы, определяющие компоненты h_1, h_2 и e_3 возбужденного электромагнитного поля, имеют вид [1]

$$h_1=\frac{h_1^+ + h_1^-}{2}+x_3\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi-\frac{H_0}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]+\frac{2\pi\sigma H_0}{c^2}(x_3^2-h^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial t}$$

$$h_2=\frac{h_2^+ + h_2^-}{2}+x_3\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi+\frac{H_0}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right]+\frac{2\pi\sigma H_0}{c^2}(x_3^2-h^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial t}$$

$$e_3=\frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2^+ + h_2^-}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1^+ + h_1^-}{2}\right)\right]-x_3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\frac{H_0}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) \tag{2.3}$$

Исходные разрешающие уравнения рассматриваемой здесь задачи (2.2) содержат неизвестные величины h_1^+, h_1^-, h_2^+, h_2^-, поэтому они должны быть рассмотрены совместно с уравнениями электродинамики (1.3) в области $|x_3|\geqslant h$ (в окружающей пластинку среде). Граничные условия (1.4) в рассматриваемом случае записываются в виде

$$\left.\begin{aligned}&e_1^{(1)}=\varphi,\quad e_2^{(1)}=\psi,\quad h_3^{(1)}=f\\&h_1^{(1)}=h_1^+,\quad h_2^{(1)}=h_2^+\end{aligned}\right\}\ \text{при } x_3=h$$

$$\left.\begin{aligned}&e_1^{(2)}=\varphi,\quad e_2^{(2)}=\psi,\quad h_3^{(2)}=f\\&h_1^{(2)}=h_1^-,\quad h_2^{(2)}=h_2^-\end{aligned}\right\}\ \text{при } x_3=-h \tag{2.4}$$

Решение задачи ищется в виде

$$Q=Q_0\exp[i(\omega t-k_1x_1-k_2x_2)] \tag{2.5}$$

для искомых величин u, v, w, φ, ψ, f и

$$Q=Q_0^{(e)}(x_3)\exp[i(\omega t-k_1x_1-k_2x_2)] \tag{2.6}$$

для остальных неизвестных величин.

Рассматривая систему (2.2), замечаем, что индуцированное электромагнитное поле не входит в уравнение поперечных колебаний пластинки (третье уравнение системы (2.2)). Из этого уравнения в силу (2.5) для определения частоты поперечных колебаний пластинки получим уравнение, полностью совпадающее с уравнением (1.17).

Следовательно, в данной задаче погрешность гипотез магнитоупругости тонких тел при определении частоты поперечных колебаний характеризуются пренебрежением величиной $|\nu_1^2h^2|$ по сравнению с единицей.

Подставляя (2.5) и (2.6) в уравнения (1.3) и (2.2), удовлетворяя условиям (1.5), (2.4), с учетом (2.3) получим индуцированное электромагнитное поле во всем пространстве.

$$h_1 = -\frac{x_3}{\nu_{01} h}\left[A\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta\theta - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - B\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)\right] + \\ + \frac{2\pi\sigma H_0}{c^2}(x_3^2 - h^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t}$$

$$h_2 = -\frac{x_3}{\nu_{01} h}\left[A\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\theta - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + B\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)\right] + \\ + \frac{2\pi\sigma H_0}{c^2}(x_3^2 - h^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t}$$

$$h_3 = A\Delta\theta, \quad e_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + B\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)$$

$$e_2 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - B\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right), \quad e_3 = -x_3\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(B\Delta\chi + H_0\chi)$$

$$h_1^{(e)} = \frac{1}{\nu_{01}}\left[A\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta\theta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - \right.\right. \\ \left.\left. - B\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)\right]\begin{cases} -\exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ \exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases} \qquad (2.7)$$

$$h_2^{(e)} = \frac{1}{\nu_{01}}\left[A\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta\theta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \right.\right. \\ \left.\left. + B\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)\right]\begin{cases} -\exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ \exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases}$$

$$h_3^{(e)} = A\Delta\theta\begin{cases} \exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ \exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases}$$

$$e_1^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + B\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)\begin{cases} \exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ \exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases}$$

$$e_2^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - B\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)\begin{cases} \exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ \exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases}$$

$$e_3^{(e)} = \frac{B}{\nu_{01}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\chi\begin{cases} \exp[-\nu_{01}(x_3 - h)] & \text{при } x_3 > h \\ -\exp[\nu_{01}(x_3 + h)] & \text{при } x_3 < -h \end{cases}$$

где введены обозначения

$$A = \frac{4\pi\sigma i\omega h H_0}{k_1^2 + k_2^2}\{4\pi\sigma i\omega h + c^2[\nu_{01} + (k_1^2 + k_2^2)h]\}^{-1}$$

$$B = \frac{4\pi\sigma\nu_{01} h H_0}{k_1^2 + k_2^2}(4\pi\sigma\nu_{01} h + i\omega)^{-1}$$

Используя (2.5) и (2.7), из первых уравнений системы (2.2) для определения частоты колебаний в плоскости пластинки получим следующие характеристические уравнения:

$$k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} + i\omega \frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2} \left\{ 1 - \frac{4\pi\sigma i\omega h}{c^2 [\nu_{01} + (k_1^2 + k_2^2) h] + 4\pi\sigma i\omega h} \right\} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{1-\nu}{2}(k_1^2 + k_2^2) - \frac{\omega^2}{c_0^2} + i\omega \frac{\sigma H_0^2}{\rho c_0^2 c^2} \left(1 - \frac{4\pi\sigma\nu_{01} h}{i\omega + 4\pi\sigma\nu_{01} h} \right) = 0 \quad (2.9)$$

Сравнивая характеристические уравнения (2.8) и (2.9) соответственно с характеристическими уравнениями (1.15) и (1.16), полученными без использования гипотез магнитоупругости тонких тел, замечаем, что они совпадают, если в уравнениях (1.15) и (1.16) пренебречь влиянием токов смещения в пластинке. Пренебрежение токов смещения по сравнению с токами проводимости равносильно условию $\mathrm{Re}\,(4\pi\sigma/i\omega) \gg 1$, которое выполняется в хороших проводниках для всех частот, применяемых в технике [4, 5].

Если разложить точное решение в ряд по степеням $\nu_1 x_3$ и в первом приближении пренебречь в этом разложении членом $|\nu_1^2 h^2|$ по сравнению с единицей, то с точки зрения характеристических уравнений результаты, полученные на основе гипотез магнитоупругости тонких тел, совпадают с первым приближением к точному решению.

Отметим, что указанная точность сохраняется и в задачах колебания пластинки в поперечном магнитном поле с заданными начальными условиями [2].

ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Գ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքի մագնիսաառաձգականության եռաչափ հավասարումների հիման վրա ուսումնասիրվում է անվերջ սալի մագնիսաառաձգական տատանումների խնդիրը լայնական մագնիսական դաշտում։ Համատեղ լուծելով սալի մագնիսաառաձգականության հավասարումները նրան շրջապատող միջավայրի էլեկտրոդինամիկայի հավասարումների հետ, որոշվում են ինդուկցված էլեկտրամագնիսական դաշտի բաղադրիչները և բերվում են բնութագրիչ հավասարումներ հաճախականությունների որոշման համար։ Բերված արդյունքները համեմատվում են այն արդյունքների հետ, որոնք ստացվում են նույն խնդիրը բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության հիպոթեզի օգնությամբ լուծելիս և գնահատվում է նշված հիպոթեզի ճշտությունը դիտարկվող խնդրի համար։

VIBRATION OF ELECTROCONDUCTIVE PLATES IN A TRANSVERSAL MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

Summary

In the paper on the basis of three-dimensional equations of magnetoelasticity the solution of magnetoelastic vibration of an infinite length plate is given in the case of a transversal magnetic field. The values of induced electromagnetic field vectors are determined and dispersion equations concerning plate magnetoelastic vibration frequencies are obtained. The problem has been also solved on the basis of magnetoelasticity hypothesis of thin bodies. For the given problem a comparative analysis is adduced conserning the approximation accuracy of magnetoelasticity hypothesis of thin bodies.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, М.: Наука, 1977.
2. *Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А.* О колебаниях проводящих пластин в поперечном магнитком поле. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1975, т. 28, № 1.
3. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки в магнитном поле. Изв. АН Амр.ССР, Механика, 1967, т. 20, № 5.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат. 1957.
5. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества, М.: Наука, 1976.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
26. III. 1982