

ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО ТЕЛА В УПРУГИЕ
 АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

БАГДОЕВ А. Г., ВАНЦЯН А. А.

Рассматривается задача проникания тонкого твердого тела вращения в первоначально упругие анизотропные среды. Проникание тел в грунты рассмотрено в [1]. Проникание в пластическую среду для малых скоростей рассматривалось в [2]. Проникание тонких тел в жидкость исследовано в [3—5]. В [6] проводится исследование обтекания тонкого тела пластической средой. В [7] рассматривалось проникание тонкого твердого тела в композиционные материалы. Решение чисто упругой задачи приведено в [8, 9]. Проникание в упругую среду с образованием пластической области исследовано в [10—12]. Пробивание пластинки рассмотрено в [13].

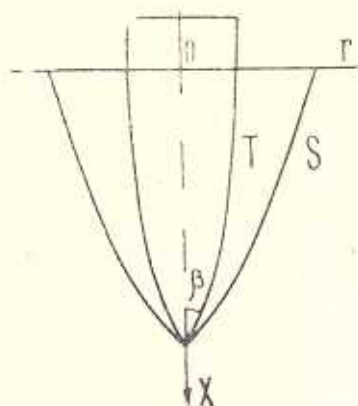
Метод, развитый в настоящей статье, состоит в изучении фронта разрушения S , который исходит из вершины тела, упругой области вне S и области разрушения позади S (фиг. 1). Предполагается, что разрушение позади S происходит вдоль площадок скольжения, и следует пользоваться уравнениями идеально-пластического течения.

Рассматриваются случаи, когда среда является ортотропной или трансверсально изотропной. Для тонких тел вращения задачу можно считать квазистатической [12], осесимметричной и одномерной, то есть можно считать, что имеет место гипотеза плоских сечений [10, 11].

Ось X направим по нормали к свободной поверхности среды, занимающей нижнее полупространство, а через r обозначим радиальную координату. Уравнение поверхности проникающего тела берется в виде $r = r_k(x, t)$, где r_k мало, t есть время с начала проникания, причем при $t = 0$ $r_k = 0$. Уравнение поверхности разрушения берется в виде $r = r_k \xi_0$, где $\xi_0 \gg 1$ [10], но $\xi_0 r_k$ мало, тогда можно

для решения вблизи S пользоваться формулами, соответствующими переходу к большим значениям r/r_k , что соответствует линейной асимптотике.

В области течения, то есть при $r \ll r_k \xi_0$, тензор скоростей деформаций и тензор напряжений связаны зависимостями [14]



Фиг. 1.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= a[F(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + G(\sigma_{rr} - \sigma_{xx})] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= a[F(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) + H(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx})] \\ \varepsilon_{xx} &= a[G(\sigma_{xx} - \sigma_{rr}) + H(\sigma_{xx} - \sigma_{\theta\theta})]\end{aligned}\quad (1.1)$$

Условие текучести Мизеса запишется в виде

$$F(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + G(\sigma_{rr} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{xx})^2 = 1 \quad (1.2)$$

В (1.1) и (1.2) F, G, H даются формулами

$$\begin{aligned}2F &= \frac{1}{\tau_{s\theta}^2} + \frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{\tau_{sr}^2}, & 2G &= \frac{1}{\tau_{sr}^2} + \frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{\tau_{s\theta}^2} \\ 2H &= \frac{1}{\tau_{sr}^2} + \frac{1}{\tau_{s\theta}^2} - \frac{1}{\tau_{sr}^2}\end{aligned}\quad (1.3)$$

где $\tau_{sr}, \tau_{sr}, \tau_{s\theta}$ — пределы текучести в соответствующих направлениях, величина a в формулах (1.1) подлежит определению.

С учетом тонкости проникающего тела можно записать $|\varepsilon_{xy}| \ll |\varepsilon_{xx}|, |\varepsilon_{rr}| \ll |\varepsilon_{rr}|$. Уравнение несжимаемости в основном порядке запишется в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0$$

где v_r есть скорость частиц.

Решение этого уравнения в области $r \leq r_k^*$ согласно граничному условию $r = r_k, v_r = dr_k/dt$ имеет вид [7, 12]

$$v_r = \frac{r_k}{r} \frac{\partial r_k}{\partial t}$$

В упругой области, то есть для $r > r_n^*$, связь между компонентами напряжений и деформаций можно записать в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= a_{11}\varepsilon_{rr} + a_{12}\varepsilon_{\theta\theta}, & \sigma_{\theta r} &= a_{44}\varepsilon_{\theta r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= a_{12}\varepsilon_{rr} + a_{22}\varepsilon_{\theta\theta}, & \sigma_{xr} &= a_{35}\varepsilon_{xr} \\ \sigma_{xx} &= a_{13}\varepsilon_{rr} + a_{23}\varepsilon_{\theta\theta}, & \sigma_{\theta x} &= a_{30}\varepsilon_{\theta x}\end{aligned}\quad (1.4)$$

где в цилиндрических координатах

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (1.5)$$

a_{ij} — упругие постоянные.

Из-за тонкости проникающего тела уравнение равновесия примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (1.6)$$

Условие на поверхности раздела упругой и идеально-пластической областей без учета диссипации энергии на S можно записать в форме сохранения массы, импульса и энергии, причем в силу малости радиальных скоростей второе условие заменяется условием равенства напряжений на площадке с нормалью n к поверхности S , направление которой в силу тонкости S можно заменить на ось r и получить

$$u_{r_1} = u_{r_2}, \quad \tau_{r_1} = \tau_{r_2}, \quad v_{r_1} = v_{r_2}$$

где индекс 1 показывает величины впереди фронта, а индекс 2 — позади фронта.

С учетом диссипации энергии на фронте $r = r_k \xi_0$ можно вместо условия непрерывности скоростей на фронте выбрать уравнение ударной адиабаты [16]:

$$e_1 - e_2 = - (v_{r_1} - v_{r_2}) \frac{\sigma_{rr_1} + \sigma_{rr_2}}{2 \xi_0 \rho_1 \frac{\partial r_k}{\partial t}} \quad (1.7)$$

где ρ_1 — плотность среды впереди S , $e_{1,2}$ — внутренняя энергия впереди и позади фронта [15]:

$$e_1 = e_0(T_1) + 2\mu \frac{f^2(x, t)}{r_k^2 \xi_0^4}, \quad e_2 = e_0(T_2) + \varepsilon_s + \frac{v_s^2}{2\mu} \quad (1.8)$$

$T_{1,2}$ — температура, ε_s — энергия разрушения, c_v — теплоемкость, а последние слагаемые соответствуют внутренней энергии упругой области и внутренней энергии пластической области в начале ее образования или ее значению на поверхности разрушения S соответственно, $f(x, t)$ определяется из условий на поверхности S .

В силу малости ε_{xx} из (1.1) можно получить

$$\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{\theta\theta} = - \frac{G}{H} (\sigma_{xx} - \sigma_{rr})$$

а из второго уравнения (1.1) следует

$$\varepsilon_{\theta\theta} = a [F(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) + G(\sigma_{xx} - \sigma_{rr})]$$

Вводя девиаторы напряжения, из (1.1) можно получить

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} + \sigma'_{rr} + \sigma'_{\theta\theta} &= 0 \\ \sigma'_{xx} &= \sigma'_{\theta\theta} + \frac{G}{H} (\sigma'_{rr} - \sigma'_{xx}) \\ \frac{\sigma'_{\theta\theta}}{a} &= F(\sigma'_{\theta\theta} - \sigma'_{rr}) + G(\sigma'_{xx} - \sigma'_{rr}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Вводя обозначения

$$\sigma'_{rr} = \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a} \bar{\sigma}'_{rr}, \quad \sigma'_{\theta\theta} = \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a} \bar{\sigma}'_{\theta\theta}, \quad \sigma'_{xx} = \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{a} \bar{\sigma}'_{xx} \quad (1.10)$$

условие текучести Мизеса можно записать в следующем виде:

$$F(\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\theta\theta})^2 + G(\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{xx})^2 + H(\bar{\sigma}_{\theta\theta} - \bar{\sigma}_{xx})^2 = \frac{\alpha}{\varepsilon_{00}^2} \quad (1.11)$$

Из (1.9) и (1.10) получим

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{H-G}{\alpha}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{2H+G}{-\alpha}, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{2G+H}{\alpha} \quad (1.12)$$

где

$$\alpha = 3(GF + GH + FH)$$

Из (1.11) и (1.12) для определения α найдем

$$\frac{\varepsilon_{00}^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha}{3(G+H)} \quad (1.13)$$

Подставляя значения $\bar{\sigma}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ из (1.4) в уравнение равновесия (1.6), с учетом (1.5) в упругой области получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{a_{22}}{a_{11}} \frac{u_r}{r^2} = 0 \quad (1.14)$$

решение которого ищем в виде

$$u_r = Ar^n \quad (1.15)$$

Из (1.14) и (1.15) для определения показателя n получим

$$n = -\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}$$

Выбор знака определен условием равенства решения нулю при $r = \infty$. Подставляя (1.15) в (1.5), а затем в (1.4), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= a_{11}nAr^{n-1} + a_{12}Ar^{n-1} \\ \sigma_{\theta\theta} &= a_{12}nAr^{n-1} + a_{22}Ar^{n-1} \\ \sigma_{xx} &= a_{13}nAr^{n-1} + a_{23}Ar^{n-1} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Отсюда для σ_{rr} на фронте $r = r_k \xi_0$ можно получить

$$\sigma_{rr} = (a_{11}n + a_{12}) Ar_k^{n-1} \xi_0^{n-1} \quad (1.17)$$

Для пластической области с учетом (1.6) и (1.10) имеем

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{00}}{a} \frac{(\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\theta\theta})}{r} = 0$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\sigma_{rr} = -\frac{\varepsilon_{00}}{\alpha} (\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\theta\theta}) \ln \frac{r}{r_k \xi_0} + \tilde{\sigma}_{rr} \quad (1.18)$$

где $\tilde{\sigma}_{rr}$ — значение напряжения на фронте $r = r_k \xi_0$.

Подставляя упругое решение (1.16) в условие текучести Мизеса (1.2), с учетом непрерывности радиальных напряжений при $r = r_k \xi_0$ получим

$$F(a_{11}n - a_{12}n + a_{22} - a_{23})^2 + G(a_{11}n - a_{13}n + a_{12} - a_{23})^2 + H(a_{12}n - a_{13}n + a_{22} - a_{23})^2 = \frac{1}{A^2 r_k^{2(n-1)} \xi_0^{2(n-1)}} = B \quad (1.19)$$

Из (1.17), (1.18), (1.19) при $r = r_k$ для σ_{rr} получим

$$\sigma_{rr} = \frac{\bar{\sigma}_{00}}{\alpha} (\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\theta\theta}) \ln \xi_0 + (a_{11}n + a_{12}) B^{-1/2} \quad (1.20)$$

Из условия непрерывности скоростей на фронте $r = r_k \xi_0$ определяем значение A

$$A = \frac{1}{\xi_0^{n+1}} \frac{r_k^{1-n}}{1-n}$$

Для определения ξ_0 имеем из (1.19)

$$\xi_0^4 = \frac{B}{(1-n)^2}$$

Рассмотрим случай, когда учитывается диссипация энергии на фронте $r = r_k \xi_0$. Для скоростей из упругой и пластической областей при $r = r_k \xi_0$ имеем соответственно

$$v_{r_1} = \frac{\partial A}{\partial t} r_k^n \xi_0^n, \quad v_{r_2} = \frac{1}{\xi_0} \frac{\partial r_k}{\partial t} \quad (1.21)$$

Вводя в (1.7) обозначение $e_1 - e_2 = \varepsilon_s + c_v \Delta T$, где ΔT — скачок температур на фронте, и используя (1.21), можно получить уравнение

$$\varepsilon_s + c_v \Delta T = - \left(\frac{1}{\xi_0} \frac{\partial r_k}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t} r_k^n \xi_0^n \right) \frac{(a_{11}n + a_{12}) A r_k^{-1} \xi_0^{-n-1}}{\xi_0^{2n} \frac{\partial r_k}{\partial t}} \quad (1.22)$$

решение которого ищем в виде

$$A = C r_k^{1-n} \xi_0^{-(1+n)} \quad (1.23)$$

С использованием (1.19) и (1.23) получим

$$C = \frac{1}{1-n} + \frac{(\varepsilon_s + c_v \Delta T) \xi_0^{2n} \rho_1 B^{1/2}}{(a_{11}n + a_{12}) (1-n)} \quad (1.24)$$

$$\frac{1}{\xi_0^2} = (1-n) B^{-1/2} - \frac{(\varepsilon_s + c_v \Delta T) \rho_1 B^{1/2}}{a_{11}n + a_{12}} \quad (1.25)$$

Для изотропной среды

$$B = \frac{12\mu^2}{\tau_s^2}, \quad n = -1, \quad \xi_0^2 = \frac{\mu \sqrt{3}}{\tau_s} \frac{1}{1 + (\varepsilon_s + c_v \Delta T) \rho_1 \frac{3\mu}{\tau_s}} \quad (1.26)$$

Можно определить ξ_0 из эксперимента, а диссипацию энергии найти по формуле (1.26).

В дальнейшем, для простоты берем условие непрерывности скоростей на фронте, что соответствует отбрасыванию в (1.24) слагаемого, содержащего диссипацию энергии.

Подставляя в (1.20) вместо $\bar{\tau}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ их выражения из (1.12), для σ_{rr} при $r = r_k$ получим

$$\sigma_{rr} = - \sqrt{\frac{3(H+G)}{\alpha}} \ln \xi_0 + (a_{11}n + a_{12})^{-1/2} \quad (1.27)$$

Для трансверсально-изотропной среды с плоскостью изотропии $r\theta$ имеем

$$a_{11} = a_{22} = \lambda + 2\mu, \quad n = -1, \quad a_{12} = \lambda, \quad a_{13} = a_{23}, \quad a_{44} = \mu, \quad a_{55} = a_{66}$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе.

Из (1.19) для B следует выражение

$$B = 4\mu^2(5F + H)$$

а для σ_{rr} из (1.27) получим

$$\sigma_{rr} = - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{F+H}{F^2+2FH}} \ln [\mu^2(5F+H)] - \frac{1}{\sqrt{5F+H}}$$

Согласно формулам (1.3) и с учетом того, что для трансверсально-изотропной среды $\tau_{\theta\theta} = \tau_{sr}$, для σ_{rr} получим выражение

$$\sigma_{rr} = - \frac{1}{2} \frac{\tau_{sr}^2}{\sqrt{4\tau_{xx}^2 - \tau_{sr}^2}} \ln \left[\mu^2 \left(\frac{2}{\tau_{xx}^2} + \frac{1}{\tau_{sr}^2} \right) \right] - \frac{1}{\sqrt{2/\tau_{sr}^2 + 1/\tau_{sr}^2}} \quad (1.28)$$

Для изотропной среды $\tau_{xx} = \tau_{sr} = \tau_{\theta\theta}$ и из формулы (1.28) получим формулу для σ_{rr}

$$\sigma_{rr} = - \frac{\tau_x}{\sqrt{3}} \left(1 + \ln \frac{\mu \sqrt{3}}{\tau_x} \right)$$

которая совпадает с выражением для σ_{rr} , полученным в [12] для изотропной среды.

Как видно из (1.27), (1.28), наличие сильно выраженной анизотропии, выражающейся в значительном отличии τ_{xx}/τ_{sr} от единицы, существенно влияет на значение σ_{rr} .

Сила сопротивления, как и в случае изотропной среды, дается формулой

$$P = 2\pi \int_0^{f(t)} r_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial x} - k_1 \right) \tau_{rr} dx$$

где k_1 — коэффициент трения между средой и телом, $f(t)$ — глубина проникания.

Для тела в форме конуса, переходящего в цилиндр, в [12] проведено вычисление интеграла для P , дается решение уравнения движения тела $mf'' = -P$, где m — масса тела, и определены формулы для максимальной глубины проникания, которые годятся для анизотропной среды, только вместо $-\tau_x(1 + \ln \mu a/\tau_x)$ следует подставить (1.27) или (1.28).

ԲԱՐԱԿ ՄԱՐՄՆԻ ՆԵՐԹԱՓՈՆՑՈՒՄԸ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ
ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅԵՎ, Ա. Ա. ՎԱՆՏՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Տրվում է նախապես առաձգական անիզոտրոպ միջավայր բարակ մարմնի ներթափանցման խնդրի լուծումը: Ներմուծվում է մակերևույթ, որը բաժանում է առաձգական անիզոտրոպ միջավայրը անիզոտրոպ հոսունույթյան միջավայրից: Մտացված են լարման բանաձևեր:

THE PENETRATION OF A THIN BODY IN AN ELASTIC
ANISOTROPIC MEDIA

A. G. BAGDOEV, A. A. VANTSIAN

S u m m a r y

The solution of the problem of penetration of a thin body in an initially elastic anisotropic medium is given. The surface which separates the elastic region from the region of anisotropic flow is introduced. The formulae for stresses on the body are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Сазомонян А. Я., Алексеев Н. А. Вопросы динамики грунтов. М.: МГУ, 1964.
2. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бриелля.— ПММ, 1944, т. 8, вып. 3.
3. Григорян С. С. Некоторые вопросы газодинамики тонких тел. Кандидатская диссертация, МГУ, 1956.
4. Сазомонян А. Я. Проникание. М.: МГУ, 1977.
5. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды, Ереван: Изд. АН Арм.ССР, 1961.
6. Флитман Л. М. О пограничном слое в некоторых задачах динамики пластической среды. Препринт, № 150, М.: 1980.
7. Багдоев А. Г., Минасян В. Ц. Исследование проникания тонкого твердого тела в металлы.— Изв. АН Арм.ССР, сер. техн. наук, 1979, т. 32, № 3.
8. Багдоев А. Г. Проникание тонкого тела вращения в упругую среду.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т. 30, № 5.

9. Баблоев А. Г., Мартиросян А. Н., Саркисян Г. А. Решение некоторых нестационарных задач взаимодействия тел с упругими преградами.—Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 3.
10. Сагомолян А. Я. Пробивание плиты тонким твердым снарядом. ВМУ. Математика механика, 1975, № 5.
11. Backman M. E., Goldsmith W. The mechanics of penetration of projectiles into targets.—International Journal of Engineering Science, 1978, vol. 16, No. 11.
12. Баблоев А. Г., Ванцян А. А. Проникание тонких тел в упругие среды.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1981, т. 34, № 1.
13. Wilkins M. L. Mechanics of penetration and perforation.—International Journal of Engineering Science, 1978, vol. 16, No. 11.
14. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956.
15. Мастеров В. А., Берковский В. С. Теория пластической деформации и обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1974.
16. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформации горных пород.—ПММ, 1967, т. 31, № 4.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
29. X. 1981