ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 5, 1983 Механика

К ВОПРОСУ О КОЛЕБАНИЯХ МАГНИТОУПРУГИХ ПЛАСТИН

ЗИЛЬБЕРГЛЕЙТ А. С.

1. Не раз отмечалось [1—3], что силы диссипативного характера могут не только демпфировать колебания упругой системы, но и наоборот, в некоторых случаях служить причиной ее дестабилизации. Последнее утверждение выглядит несколько парадоксальным: ведь если силы действительно диссипативны, то они (по определению) должны отбирать энергию у системы, и, следовательно, гасить, а не усиливать, ее колебания.

Настоящая работа имеет целью прояснить этот вопрос применительно к динамическому поведению магнитоупругих пластин конечных размеров. Показано, что если контур пластины защемлен или свободно оперт, то силы, являющиеся результатом взаимодействия колебаний электропроводящей пластинки с магнитным полем, действительно диссипативны, то есть обеспечивают положительную определенность функции диссипации. Именно, закон сохранения энергии системы при отсутствии внешней нагрузки есть

$$\frac{dE}{dt} = -D \tag{1.1}$$

где E—энергия, D—функция диссипации системы, являющиеся квадратичными функционалами от прогиба w и некоторых его производных первого и второго порядка; при указанных обстоятельствах $D > 0$ на всех допустимых ненулевых функциях прогиба.

Напротив, если часть контура магнитоупругой пластинки свободна, то знак диссипативной функции не определен и зависит от начальных условий и параметров задачи, так что возможны ситуации, в которых $D < 0$ и энергия системы растет со временем. Это по существу означает, что при наличии свободных участков границы магнитоупругие силы не являются строго диссипативными в рамках принятой гипотезы магнитоупругости тонких тел [4].

Такие же выводы о динамическом поведении магнитоупругих пластин для ряда частных случаев были получены в [3] путем прямого исследования точных или приближенных решений соответствующих задач.

Подчеркнем один важный общий момент: вопрос о том, являются ли данные силы диссипативными или недиссипативными (активными), может быть решен только на основе закона сохранения энергии и тем самым обязательно при учете граничных условий, определяющих, наряду с уравнениями движения, множество допустимых состояний системы.

2. Начнем с пространственно-одномерной задачи (магнитоупругая балка длины l или пластина-полоса ширины l). Прогиб удовлетворяет уравнению [4, 3]:

$$D_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho\, h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varkappa \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2}, \quad 0 < x < l \tag{2.1}$$

Здесь D_0 — жесткость пластины, ρ, h — соответственно ее плотность и толщина, $\varkappa > 0$ — магнитоупругий коэффициент, имеющий значение $2\sigma h^3 H_0^2/3c^2$ для колебаний пластинки в постоянном поперечном магнитном поле H_0 (σ — электропроводность материала пластинки, c — скорость света); для токонесущей пластинки $\varkappa = 32\pi^2 \sigma h^5 j_0^2/15c^4$, j_0 — плотность равномерно распределенного продольного тока.

Начальные условия задачи суть

$$w \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \tag{2.2}$$

а граничные условия могут быть различными: один или оба конца $x = 0$, l пластинки могут быть заделаны ($a = 0$, $a = l$ или $a = 0, l$)

$$w \Big|_{x=a} = \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0 \tag{2.3}$$

свободно оперты

$$w \Big|_{x=a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=a} = 0 \tag{2.4}$$

и, наконец, при условии (2.3) или (2.4) на границе $x = 0$ конец $x = l$ может быть свободным от усилий

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=l} = 0 \tag{2.5}$$

Умножим уравнение (2.1) на $w_t = \frac{\partial w}{\partial t}$, проинтегрируем по интервалу $[0, l]$ и преобразуем при помощи интегрирования по частям. В результате получим закон сохранения энергии в виде (1.1), причем

$$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [D_0 w_{xx}^2 + 2\rho\, h w_t^2]\, dx \tag{2.6}$$

а функция диссипации есть

$$D(t) = D_0 [w_t\, w_{xxx} - w_{xt}\, w_{xx}]_0^l - \varkappa w_t\, w_{xt}\big|_0^l + \varkappa \int_0^l w_{xt}^2\, dx$$

(нижние индексы означают частные производные по соответствующим переменным). Легко убедиться, что при любом из граничных условий (2.3)—(2.5) первое слагаемое в правой части последнего равенства есть нуль, так что

$$D(t)=\varkappa\left[-w_t\,w_{xt}\Big|_0^l+\int\limits_0^l w_{xt}^2\,dx\right] \tag{2.7}$$

Если оба конца $x = 0,\ l$ защемлены или свободно оперты, то есть выполняются условия (2.3)или (и) (2.4), то и оставшаяся в (2.7) двойная подстановка исчезает, а тогда

$$D=\varkappa\int\limits_0^l w_{xt}^2\,dx>0$$

$$\frac{dE}{dt}=-D<0,\quad 0<t<\infty \tag{2.8}$$

Таким образом, магнитоупругая пластинка-полоса без свободных краев оказывается энергетически устойчивой — ее энергия убывает со временем. Из выражения (2.6) ясно, что и сами значения прогиба могут при этом неограниченно нарастать лишь в исключительных — «патологических» — случаях. Более того, если оба края закреплены, то справедливо неравенство [5]

$$\int\limits_0^l w^2\,dx\leqslant\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\int\limits_0^l w_{xx}^2\,dx<\frac{2}{D_0}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 E(t)<\frac{2}{D_0}\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 E(0)$$

а, значит, среднеквадратичный прогиб ограничен для всех значений t. Заметим еще, что соотношения (2.8), (2.6) очевидным образом гарантируют единственность решения соответствующих задач.

Совершенно иначе обстоит дело, если край $x=l$ свободен, то есть выполняется (2.5). В выражении (2.7) для функции диссипации сохраняется внеинтегральное слагаемое,

$$D(t)=\varkappa\left[-w_t\,w_{xt}\Big|_{x=l}+\int\limits_0^l w_{xt}^2\,dx\right] \tag{2.9}$$

и в общем случае знак D не определен. Существует бесконечное множество функций $w(x,\ t)$, удовлетворяющих граничным условиям, для которых $D(t)<0$. Однако выполняется ли это неравенство на настоящих решениях задачи? Следующее простое рассуждение дает положительный ответ на этот вопрос.

Будем, ради определенности, считать, что при $x=0$ пластинка жестко закреплена (а при $x=l$ свободна). В начальных данных положим $\varphi(x)=0$, а $\psi(x)$ выберем таким образом, чтобы $D(0)<0$, и чтобы выполнялись условия согласования начальных и граничных условий

$$\psi(0)=\psi'(0)=0,\quad \psi''(l)=\psi'''(l)=0 \tag{2.10}$$

Тогда функция $D(t)$ заведомо непрерывна в некоторой правой полуокрестности точки $t=0$, и, следовательно, сохраняет знак $D(0)$: $D(t)<0$ по крайней мере при $t\in[0,\ t_0]$, $t_0>0$.

В качестве примера функции $\psi(x)$, удовлетворяющей всем требованиям, включая (2.10), можно привести

$$\psi(x)=C\left[1-(n+3)\frac{x}{l}-\left(1-\frac{x}{l}\right)^{n+3}\right],\quad n\geqslant 1,\quad C=\text{const} \tag{2.11}$$

нетрудно убедиться, что при этом

$$D(0)=-\frac{\varkappa}{l}C^2\frac{(n+2)(n+3)}{2n+5}<0$$

По сказанному, $D(t)<0$ и при $t>0$ — энергия решения задачи с начальным данным (2.11) растет по меньшей мере в первые моменты времени а, значит, может расти и само решение.

Итак, остается неясным лишь одно обстоятельство: может ли энергия, а вместе с ней и решение, расти и при $t\to\infty$, при каких начальных данных и параметрах задачи это может происходить. Приближенные расчеты работы [3] указывают на то, что подобные ситуации возможны, но для полного доказательства необходимо соответствующее точное решение. Его нетрудно построить по крайней мере для случая, когда при $x=0$ пластинка свободно оперта (выполняются условия (2.4)), а конец $x=l$ свободен. Именно, возьмем начальные данные (2.2) в виде

$$\varphi(x)=0,\quad \psi(x)=\frac{x}{\tau},\quad \tau>0 \tag{2.12}$$

тогда, как можно проверить, точное решение всей задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) есть

$$w_0(x,t)=x\frac{t}{\tau} \tag{2.13}$$

и оно неограниченно растет при $t\to+\infty$.

Механический смысл решения (2.13) прост: пластинка поворачивается как целое вокруг опертого края $x=0$, а так как (2.13) обращает в нуль функцию диссипации (2.7), то неограниченному росту прогиба ничто не препятствует, как и при отсутствии диссипации.

С помощью (2.13) можно получить сколько угодно неограниченно растущих решений задачи с условиями «опора — свободный край». Действительно, если начальные данные

$$\varphi(x)=\varphi_1(x),\quad \psi(x)=\psi_1(x)$$

таковы, что отвечающий им прогиб $w_1(x,t)$ ограничен, то, рассмотрев задачу с начальными условиями

$$\varphi(x)=\varphi_1(x),\ \psi(x)=\frac{x}{\tau}+\psi_1(x)$$

получим неограниченное при $t\to+\infty$ решение

$$w(x,t)=x\frac{t}{\tau}+w_1(x,t)$$

Отметим, что в [3] для опертой по обоим концам балки с помощью точного решения была показана ограниченность прогиба, что соответствует сделанному выше общему выводу. Приближенный анализ, проведенный в [3] для консольной балки (один конец защемлен, другой — свободен), указывает на устойчивость колебаний при достаточно малых значениях $\varkappa$, $\varkappa < \varkappa_*$, и дестабилизацию при $\varkappa > \varkappa_*$; в качестве $\varkappa_*$ предложено значение $2\sqrt{6\rho h D}$.

3. Рассмотрение двумерной задачи совершенно аналогично предыдущему, поэтому проведем его кратко.

Пусть магнитоупругая пластина занимает ограниченную область Ω плоскости xOy с кусочно-гладкой границей Γ, часть которой Γ_1 жестко закреплена, Γ_2 оперта, Γ_3 свободна от усилий; пусть n — внешняя нормаль к Γ. Уравнение движения и начальные условия суть

$$D_0 \Delta\Delta w + 2\rho h w_{tt} = \varkappa \Delta w_t \tag{3.1}$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x, y); \quad w_t|_{t=0} = \psi(x, y) \tag{3.2}$$

$$x, y, \in \Omega$$

Выражение для энергии пластины имеет вид

$$\mathrm{E}(t) = K(t) + U(t)$$

$$K(t) = \rho h \int\limits_{\Omega} w_t^2 \, dxdy$$

$$U(t) = \frac{D_0}{2} \int\limits_{\Omega} \left[(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2) \right] dxdy \tag{3.3}$$

ν — коэффициент Пуассона.

Умножим (3.1) на w_t и проинтегрируем по Ω. Используем тождество ([6], формулы (13.61) и (13.55), в которых следует принять $\delta w = w_t$)

$$D_0 \int\limits_{\Omega} w_t \Delta\Delta w \, dxdy = \frac{dU}{dt} + \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial w_t}{\partial n} M - w_t Q \right) ds$$

и очевидное равенство

$$\int\limits_{\Omega} w_t \Delta w_t \, dxdy = \int\limits_{\Gamma} w_t \frac{\partial w_t}{\partial n} ds - \int\limits_{\Omega} (\nabla w_t)^2 \, dxdy$$

(здесь M — изгибающий момент, Q — обобщенная перерезывающая сила на контуре, ds — элемент дуги Γ). Принимая во внимание сформулированные граничные условия, приходим к закону сохранения энергии в форме (1.1) с функцией диссипации

$$\mathrm{D}(t) = \varkappa \left[-\int\limits_{\Gamma_3} w_t \frac{\partial w_t}{\partial n} ds + \int\limits_{\Omega} (\nabla w_t)^2 \, dxdy \right] \tag{3.4}$$

Если граница пластины не содержит свободных участков, $\Gamma_3 = \varnothing$, то $D(t) > 0$, энергия колебаний убывает со временем; в противном случае, как видно из (3.4), знак $D(t)$ не определен, возможен рост энергии.

Пример неограниченно растущего решения при $\Gamma_1 = \varnothing$ (отсутствие закрепленных участков границы) строится здесь так же, как и в одномерном случае. Примем, что свободно опертый участок границы Γ_2 совпадает с отрезком прямой $x = 0$, $0 < y < a$, а ее свободная часть Γ_1 имеет положительную конечную длину, а в остальном произвольна. Считая, что начальные данные (3.2) суть

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = \frac{x}{\tau}, \quad \tau > 0 \tag{3.5}$$

имеем точное линейно растущее со временем решение

$$w_0(x, t) = x \frac{t}{\tau} \tag{3.6}$$

(моментов и перерезывающих сил этот прогиб, очевидно, не создает). При помощи (3.6) и принципа суперпозиции число подобных примеров можно неограниченно увеличивать.

ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ս. ԶԻԼԲԵՐԳԼԵՅՏ

Ամփոփում

Ցույց է տրված, որ եթե բարակ մագնիսաառաձգական սալի եզրագիծը չունի լարումներից ազատ հատվածներ, ապա մագնիսաառաձգական ուժերը խիստ ցրվող այսինքն՝ կամայական ոչ համասեռ սկզբնական պայմաններում խնդրում էներգիան ժամանակի ընթացքում նվազում է։ Ընդհակառակը, երբ սալի եզրագծի մի մասը ազատ է, ապա ցրվող ֆունկցիայի նշանը որոշված չէ, և էներգիան (նրա հետ միասին նաև ճկվածքը) ժամանակի ընթացքում կարող է աճել։

ON VIBRATION OF MAGNETOELASTIC PLATES

A. S. SILBERGLEIT

Summary

Magnetoelastic bending vibration of thin plates is shown to be energetically stable if the boundary of the plate has no parts free of stresses: magnetoelastic forces are strongly dissipative in this case. On the contrary, if some part of the boundary is stress-free, the sign of the dissipative function is not determined so that the growth of energy (and corresponding elastic displacement) is possible.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971.
3. *Белубекян М. В.* Некоторые вопросы магнитоупругих колебаний пластин.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1979, т. 32, № 3.
4. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
5. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
6. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1947.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР

Поступила в редакцию
28. I. 1981