ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 5, 1983 Механика

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАСТИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНЫХ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ТЕЛ ПРИ ВНЕЗАПНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

САФАРЯН Н. Б.

Пластически-неоднородные тела при динамическом воздействии впервые исследованы в работах Х. А. Рахматулина [1, 2], где предел текучести принимается переменным по длине рассматриваемого стержня. Этому вопросу посвящены также работы [3—9]. Подробный анализ исследований по динамическим задачам пластически-неоднородных тел приведен в обзорных статьях Х. А. Рахматулина и Г. С. Шапиро [10], Н. Кристеску [11] и в монографии В. Ольшака, Я. Рыхлевского, В. Урбановского [12].

В вышеуказанных работах исследования проводились, в основном, для случая идеально-пластической среды или случая линейного упрочнения.

В этой работе рассматриваются некоторые динамические задачи плоской деформации для несжимаемых двумерно-неоднородных тел со степенным упрочнением.

1. Соотношения деформационной теории пластичности при плоской деформации, несжимаемости материала и степенном упрочнении в случае двумерной неоднородности можно представить в виде:

дифференциальные уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

закон упрочнения

$$\sigma_0 = k(r, \theta)\, \varepsilon_0^m$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2}, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + 4\gamma_{r\theta}^2} \tag{1.2}$$

где $k(r, \theta)$ — известная из эксперимента функция, характеризующая неоднородность материала; m — показатель упрочнения материала; соотношения между компонентами деформации, перемещения и напряжения

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} K(r, \theta)\, \sigma_0^{n-1} (\sigma_r - \sigma)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{2} K(r, \theta)\, \sigma_0^{n-1} (\sigma_\theta - \sigma)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{2} K(r, \theta)\, \sigma_0^{n-1}\, \tau_{r\theta} \tag{1.3}$$

здесь

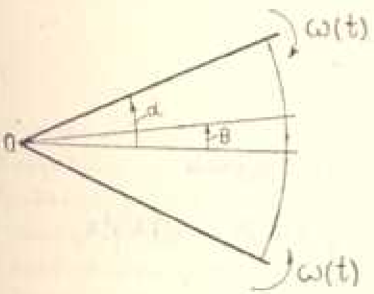
$$n = \frac{1}{m}, \quad K(r, \theta) = k^{-n}(r, \theta), \quad \sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}$$

В данной работе полагаем, что закон неоднородности задан в виде

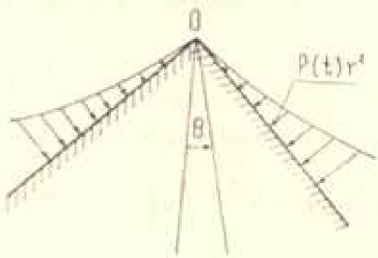
$$k(r, \theta) = k r^{-\mu} \cos \lambda\theta \tag{1.4}$$

где k, μ, λ — постоянные параметры материала.

2. *Внезапное сжатие пластически-неоднородного клина между шероховатыми жесткими плитами* (фиг. 1). Принимаем, что пластически-неоднородный клин с раствором 2α в момент $t = 0$ внезапно сжимается шероховатыми жесткими плитами, вращающимися вокруг оси $r = 0$ по закону



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$v = \mp \omega(t) r \quad \theta = \pm \alpha, \quad \text{где } \omega(0) = 0 \tag{2.1}$$

Проекция на ось $\theta = 0$ равнодействующей напряжений, вычисленная на боковой поверхности цилиндра $r = \text{const}$, равна нулю

$$\int_0^\alpha (\sigma_r \cos\theta - \tau_{r\theta} \sin\theta)\, d\theta = 0 \tag{2.2}$$

Здесь учтена симметричность относительно оси $\theta = 0$.

Компоненты перемещения, удовлетворяющие условию несжимаемости, ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= -\lambda r^{-\lambda-1} f(t) \cos \lambda\theta + N(t) \cos\theta \\ v &= -\lambda r^{-\lambda-1} f(t) \sin \lambda\theta - N(t) \sin\theta \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $N(t)$ — произвольная функция от t.

Выражения компонентов напряжений

$$\sigma_r, \sigma_\theta = H(t) + \rho r^{-\lambda} f''(t) \cos \lambda\theta + \rho N''(t)\, r \cos\theta +$$

$$+k\lambda[2\lambda(\lambda+1)]^{m-1} r^{-2\lambda-2} f^m(t)\,[\lambda\cos 2\lambda\theta-2[\lambda\mp(\lambda+1)]\cos^2\lambda\theta]$$

$$\tau_{r\theta}=k\lambda(\lambda+1)[2\lambda(\lambda+1)]^{m-1} r^{-2\lambda-2} f^m(t)\sin 2\lambda\theta \tag{2.4}$$

Здесь функция $H(t)$ получается при интегрировании уравнения (1.1) $\lambda=\dfrac{2m-2+\mu}{2-m}$.

В нашем случае, полагая $\mu=-2$, то есть при законе неоднородности $k(r,\theta)=kr^2\cos 2\theta$ и $N(t)=0$ будем иметь

$$\begin{gathered}\sigma_r,\ \sigma_\theta=H(t)+r^2[\rho f''(t)\cos 2\theta-k\,4^m f^m(t)(1\mp\cos^2 2\theta)]\\ \tau_{r\theta}=-k\,4^m f^m(t)\,r^2\sin 2\theta\cos 2\theta\end{gathered} \tag{2.5}$$

Для компонентов перемещений находим

$$u=2f(t)\,r\cos 2\theta,\quad v=-2f(t)\,r\sin 2\theta \tag{2.6}$$

Из граничных условий (2.1) определяем

$$f(t)=\frac{\omega(t)}{2\sin 2\alpha} \tag{2.7}$$

Далее, подставляя σ_r и $\tau_{r\theta}$ из (2.5) в (2.2), получим

$$H(t)=R^2\rho f''(t)\left[\frac{2}{3}\sin^2\alpha-1\right]+\frac{2}{3}k\,4^m R^2 f^m(t)\sin^2\alpha \tag{2.8}$$

где R — фиксированное значение r.

Сила давления на клин будет

$$P(t)=-\int_0^R\sigma_\theta(r,\alpha,t)\,dr=$$

$$=-H(t)R-[\rho f''(t)\cos 2\alpha-k\,4^m f^m(t)(1+\cos^2 2\alpha)]\frac{R^3}{3} \tag{2.9}$$

3. *Внезапное воздействие нормального давления на неоднородной четверть-плоскости* (фиг. 2). Положим, что на гранях четверть-плоскости, неоднородность которой определяется законом $k(r,\theta)=kr^2\cos 2\theta$, в момент $t=0$ приложено давление, меняющееся по длине по параболическому закону

$$\sigma_\theta=-P(t)\,r^2\quad \theta=\pm\frac{\pi}{4} \tag{3.1}$$

Полагая в соотношениях компонентов напряжений и перемещений $\mu=-2$, $(\lambda=-2)$, $H(t)=0$, получим

$$\begin{gathered}\sigma_r,\ \sigma_\theta=[\rho f''(t)\cos 2\theta-k\,4^m f^m(t)(1\mp\cos^2 2\theta)]\,r^2\\ \tau_{r\theta}=-k\,4^m f^m(t)\,r^2\sin 2\theta\cos 2\theta\\ u=2f(t)\,r\cos 2\theta,\quad v=-2f(t)\,r\sin 2\theta\end{gathered} \tag{3.2}$$

Из граничных условий (3.1) определяем

$$f(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{P(t)}{k}\right)^n$$

Перемещения на гранях будут

$$u = 0 \qquad v = \mp \frac{1}{2}\left(\frac{P(t)}{k}\right)^n r \quad \theta = \pm \frac{\pi}{4}$$

Этап разгрузки можно рассматривать обычным способом.

ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԱՄՐԱՊՆԴՎՈՂ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ ՀԱՆԿԱՐԾԱԿԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ն. Բ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է աստիճանային ամրապնդվող, երկչափ անհամասեռ և անսեղմելի մարմինների հարթ դեֆորմացիան վիճակը հանկարծակի ազդեցությունների դեպքում։

Օգտագործելով անսեղմելիության պայմանը դիտարկվող երկու խնդիրներում տեղափոխությունները փնտրվում են որոշակի տեսքով։ Անհամասեռության $k \cdot r^2 \cos 2\theta$ *օրենքի դեպքում բավարարելով շարժման հավասարումներին ու եզրային պայմաններին, լարումների և տեղափոխությունների համար ստացվում են պարզ անալիտիկ արտահայտություններ։*

THE PLANE DEFORMATION OF THE PLASTIC NONHOMOGENEOUS STRENGTHING BODIES BY SUDDEN ACTION

N. B. SAFARIAN

Summary

The plane deformation state of two-dimensional nonhomogeneous, incompressible bodies with power strengthing by sudden action is considered. Assuming the incompressible condition in the two considered problems, the displacements are determined in a definite form.

Satisfying the motion equations and boundary conditions, by means of nonhomogeneous rule $k \cdot r^2 \cos 2\theta$ for the stresses and for the displacements the simple analytic expressions are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А.* О распространении волны разгрузки вдоль стержня переменного предела упругости.— ПММ, 1946, т. 10, № 3.
2. *Рахматулин Х. А.* Исследование законов распространения плоских упруго-пластических волн в среде с переменным пределом упругости.— ПММ, 1950, т. 14, № 1.

3. *Ленский В. С.* Задача распространения упруго-пластических волн.— Вестник МГУ, 1949, № 3.
4. *Мочалов С. Д.* К вопросу о распространении упруго-пластических волн вдоль стержня переменного предела упругости.— Уч. запис. Томск. Ун-та, 1955, № 25.
5. *Peshina P.* Propagation of elastic-plastic Waves in a non-homogeneous medium. Arch. Mech. Stos 1959, № 5.
6. *Пежина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Изд-во Мир, 1968.
7. *Gutowski R., Koliski S., Osiecki J.* Propagation of the unloading plane wave in a non-homogeneous soil. Biuletyn WAT, 1959, № 2.
8. *Кукуджанов В. Н., Никитин Л. В.* Распространение волн в стержнях из неоднородного упруго-вязко-пластического материала.— Изв. АН СССР, отд. мех. и мат., 1960, № 4.
9. *Задоян М. А.* Распространение пластической зоны в неоднородной трубе при динамическом воздействии давления.— Изв. АН Арм. ССР, сер. физ. мат. н., 1960, т.13, № 3.
10. *Рахматулин Х. А., Шапиро Г. С.* Распространение возмущений в нелинейно-упругой и неупругой среде.— Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2.
11. *Cristescu N.* "Proc. Sec. Symposium", Pergamon Press, New-York, 1960.
12. *Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В.* Теория пластичности неоднородных тел. М.: Изд-во Мир, 1964.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
5. II. 1982