

## ПОЛЗУЧЕСТЬ КРИВОГО СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

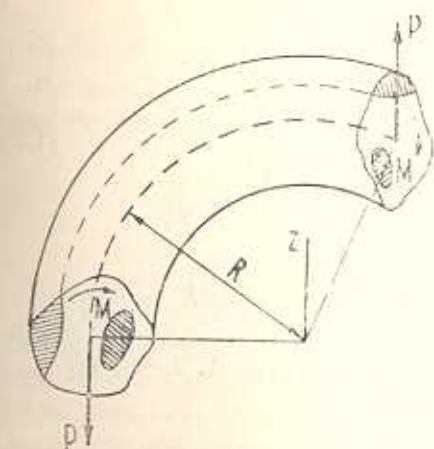
ЗАДОЯН М. А., ПОЛАДЯН Ф. М.

Рассматривается задача о кручении кривого составного стержня, поперечное сечение которого состоит из  $N$  различных областей, материалы которых обладают свойством наследственной ползучести [1] с различными мерами ползучести и модулем мгновенного сдвига.

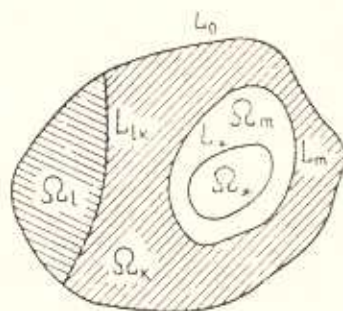
Пусть рассматриваемый стержень с постоянным поперечным сечением находится под воздействием перерезывающих сил  $P$  и крутящих моментов  $PR$  ( $R$  — радиус оси стержня), приложенных на торцевых сечениях (фиг. 1).

Задачи кручения призматических упругих стержней, составленных из различных материалов, исследованы в [2—6]. Библиографию работ, посвященных решению этой задачи, можно найти в монографии [6]. Кручение однородных кривых стержней из упрочняющегося материала рассмотрено в [7—11]. Пластическое кручение кривого стержня, состав-

ленного из различных материалов, исследовано в [12]. Кручение призматических стержней, составленных из различных материалов, при учете ползучести материала впервые решена в работе [13]. В нашей работе [14] рассмотрено кручение однородных кривых стержней при нелинейной ползучести.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

ленного из различных материалов, исследовано в [12].

Кручение призматических стержней, составленных из различных материалов, при учете ползучести материала впервые решена в работе [13]. В нашей работе [14] рассмотрено кручение однородных кривых стержней при нелинейной ползучести.

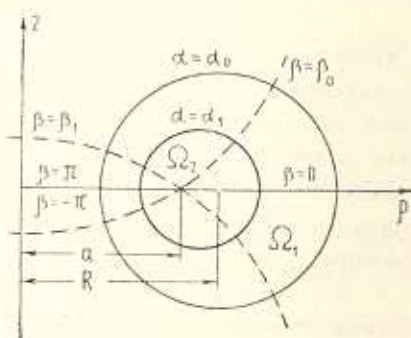
§ 1. Основные уравнения задачи. Обозначим через  $L_0$  внешний контур области всего поперечного сечения стержня, через  $L_m$  — контур области  $\Omega_m$ , а через  $L_k$  — линию раздела смежных областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (фиг. 2).

Принимаем, что в области  $\Omega_m$  имеют место соотношения наследственной теории ползучести Маслова-Арутюняна [1]

$$2 G_m \varepsilon_{ij}^{(m)} = s_{ij}^{(m)} - \int_{\tau_0}^t s_{ij}^{(m)} K_m(t, \tau) d\tau \quad (1.1)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

где  $G_m = E_m/3$ , а  $E_m$  принимается постоянным,  $s_{ij}^{(m)} = \sigma_{ij}^{(m)} - \delta_{ij} \sigma^{(m)}$ ,  $\delta_{ij}$ —символ Кронекера,  $\sigma^{(m)}$ —среднее давление,  $K_m(t, \tau) = 3G_m \frac{\partial C_m(t, \tau)}{\partial \tau}$ .



Фиг. 3.

Здесь  $G_m$ —модуль сдвига, а  $C_m(t, \tau)$ —мера ползучести в области  $\Omega_m$ .

Воспользуемся тороидальными координатами  $\alpha, \beta, \gamma$ :  $x = \rho \cos \gamma$ ,  $y = \rho \sin \gamma$ ,  $z = H \sin \beta$ , где  $\rho = a \operatorname{sh} \alpha \times (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$ ,  $H = a (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-1}$  здесь  $0 \leq \alpha \leq \infty$ ,  $-\pi \leq \beta \leq \pi$ ,  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$  (фиг. 3).

Для компонентов деформации будем иметь [15]:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_\alpha^{(m)}}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u_3^{(m)}}{H} \right)$$

$$2 \varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)} = \frac{H}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u_\alpha^{(m)}}{H} \right) + \frac{\rho}{H} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u_\gamma^{(m)}}{H} \right) \Big|_{(\alpha, \beta)}$$

$$\varepsilon_{\alpha z}^{(m)} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u_\alpha^{(m)}}{H} \right) + \frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial H}{\partial z} u_\alpha^{(m)} + \frac{\partial H}{\partial \beta} u_\beta^{(m)} \right) \Big|_{(\alpha, \beta)}$$

$$\varepsilon_{\gamma\gamma}^{(m)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} (u_\gamma^{(m)}) + \frac{1}{H\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} u_\alpha^{(m)} + \frac{\partial \rho}{\partial \beta} u_\beta^{(m)} \right)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

Из (1.2) перемещения представим в виде

$$u_\alpha^{(m)} = u_{\alpha 0}^{(m)} + \int F_\alpha^{(m)} d\gamma \Big|_{(\alpha, \beta)}, \quad F_\alpha^{(m)} = 2 \rho \varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)} - \frac{\rho^2}{H^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u_\gamma^{(m)}}{\rho} \right) \Big|_{(\alpha, \beta)}$$

$$u_\gamma^{(m)} = u_{\gamma 0}^{(m)} + \int \left( \rho \varepsilon_{\gamma\gamma}^{(m)} - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial z} u_\alpha^{(m)} - \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} u_\beta^{(m)} \right) d\gamma$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

где  $u_{\alpha 0}^{(m)}, u_{\beta 0}^{(m)}, u_{\gamma 0}^{(m)}$ —произвольные функции от  $\alpha, \beta$  и  $t$ .

Положим далее, как и при кручении однородных стержней [6], что все компоненты напряжения, за исключением  $\sigma_{\alpha\alpha}^{(m)}$  и  $\sigma_{\gamma\gamma}^{(m)}$  ( $m=1, 2, \dots, N$ ),

в любой момент времени  $t$  равны нулю, тогда из уравнений равновесия [15] остается

$$\frac{\partial}{\partial x} (H \rho^2 \varepsilon_{\beta\gamma}^{(m)}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H \rho^2 \varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)}) = 0 \quad (1.4)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

а из остальных уравнений следует, что напряженное состояние стержня не зависит от  $\gamma$ , следовательно, тензор деформации также не зависит от  $\gamma$ .

Подставляя (1.3) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, получим

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(m)} = \frac{1}{H} \frac{\partial u_{\alpha 0}^{(m)}}{\partial x} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H}{\partial \beta} u_{\beta 0}^{(m)} \Big|_{(\alpha, \beta)} \quad (1.5)$$

$$2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_{\beta 0}^{(m)}}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_{\alpha 0}^{(m)}}{H} \right)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

а относительно  $F_{\alpha}^{(m)}$ ,  $F_{\beta}^{(m)}$  приходим к системе трех дифференциальных уравнений, решение которой будет

$$F_{\alpha}^{(m)} = (D_0 + D_1 z) \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial x} + (D - D_1 \rho) \frac{1}{H} \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(\alpha, \beta)} \quad (1.6)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

где  $D_0$ ,  $D_1$ ,  $D$  — произвольные функции от  $t$ .

Исключая из (1.3)  $u_{\gamma}^{(m)}$  и используя (1.6), получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H}{\rho} \varepsilon_{\beta\gamma}^{(m)} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{H}{\rho} \varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)} \right) = D \frac{H^2}{\rho^3} \quad (1.7)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформаций, кроме  $\varepsilon_{\alpha\gamma}^{(m)}$  и  $\varepsilon_{\beta\gamma}^{(m)}$ , получаем систему относительно  $u_{\alpha 0}^{(m)}$ ,  $u_{\beta 0}^{(m)}$ . Решая полученную систему уравнений, находим выражения  $u_{\alpha 0}^{(m)}$  и  $u_{\beta 0}^{(m)}$ . После подстановки этих величин из (1.6) в (1.3) получим выражения для перемещений  $u_{\alpha}^{(m)}$ ,  $u_{\beta}^{(m)}$ ,  $u_{\gamma}^{(m)}$ .

Вводя функцию напряжений

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(m)} = - \frac{1}{H \rho^2} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \beta}, \quad \sigma_{\beta\gamma}^{(m)} = \frac{1}{H \rho^2} \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \quad (1.8)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N)$$

из (1.1) и (1.7) приходим к основным уравнениям задачи

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \beta} \right) - \int_{t_1}^t \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \beta} \right) \Big] K_m(t, \tau) d\tau = DG_m \frac{H^2}{\rho^3} \quad (1.9)$$

( $m=1, 2, \dots, N$ )

Пользуясь условием, что боковая поверхность стержня свободна от внешних сил, получим

$$\Phi_m(\alpha, \beta, t) = \bar{C}_0(t) \text{ на } L_0 \quad (1.10)$$

где  $\bar{C}_0(t)$  — произвольная функция, зависящая только от времени  $t$ .

Пользуясь условием равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности линии раздела  $L_{ik}$  смежных областей  $\Omega_i$  и  $\Omega_k$ , получим

$$\Phi_i(\alpha, \beta, t) = \Phi_k(\alpha, \beta, t) + \bar{C}_{ik}(t) \text{ на } L_{ik} \quad (1.11)$$

где  $\bar{C}_{ik}(t)$  — произвольная функция от  $t$ .

Не нарушая общности, произвольные функции  $\bar{C}_0(t)$  и  $\bar{C}_{ik}(t)$  можно принять равными нулю [6].

Приближаясь к линии раздела  $L_{ik}$  со стороны областей  $\Omega_i$  и  $\Omega_k$ , пользуясь (1.1)–(1.3), (1.6), (1.9) и принимая во внимание непрерывность перемещения  $u_{\tau}^{(m)}$ , находим условия, которым должны удовлетворять нормальные производные функции напряжений  $\Phi(\alpha, \beta, t)$  на линиях раздела  $L_{ik}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \frac{\partial C_i(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ = \frac{1}{G_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $n$  — нормаль к  $L_{ik}$ .

Крутящий момент выражается формулой

$$M = \sum_{m=1}^N \int_{\Omega_m} [(\rho - R) \sigma_{\tau\tau}^{(m)} - z \sigma_{\rho\tau}^{(m)}] d\Omega \quad (1.13)$$

где  $d\Omega = H^2 d\alpha d\beta = d\rho dz$ .

Переходя от  $\sigma_{\rho\tau}^{(m)}$ ,  $\sigma_{\tau\tau}^{(m)}$  к  $\sigma_{\tau\tau}^{(m)}$ ,  $\sigma_{\rho\tau}^{(m)}$  и подставляя в (1.13), после применения формулы Грина—Остроградского получим

$$M = 2R \sum_{m=1}^N \int_{\Omega_m} \int \frac{\Phi_m}{\rho^3} d\Omega \quad (1.14)$$

§ 2. Пусть  $L_*$  — замкнутая кривая, целиком лежащая в одной из областей  $\Omega_m$  ( $m=1, 2, \dots, N$ ) поперечного сечения скручиваемого стержня. Область, ограниченную этим контуром, обозначим  $\Omega_*$  (фиг. 2). Интегри-

руя обе части уравнения (1.9) в области  $\Omega_*$  и переходя к контурному интегралу, получим

$$\int_{L_*} \frac{1}{\rho^3} \left[ \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} - \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} K_m(t, \tau) d\tau \right] ds = - \frac{DG_m}{2} \int_{L_*} \frac{dz}{\rho^2} \quad (2.1)$$

где  $n$  — направление внешней нормали к контуру  $L_*$ , а  $s$  — дуга этого контура. Интегральное уравнение (2.1) обобщает теорему Бредта о циркуляции касательных напряжений при кручении составного кривого стержня с учетом ползучести.

Можно доказать [6] верность формулы (2.1), когда контур проходит через несколько областей  $\Omega_m$  ( $m = 1, 2, \dots, s \leq N$ ), пересекая их линии раздела  $L_{ik}$ .

§ 3. Решение уравнения (1.9). Уравнения (1.9) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial \beta^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \beta} = H^2 f_m(t) \quad (3.1)$$

$(m = 1, 2, \dots, N)$

где

$$f_m(t) = G_m \left[ D(t) + \int_{\tau_1}^t D(\tau) R_m(t, \tau) d\tau \right] \quad (3.2)$$

$(m = 1, 2, \dots, N)$

а  $R_m(t, \tau)$  — резольвента ядра  $K_m(t, \tau)$ . При

$$C_m(t, \tau) = \varphi_m(\tau) [1 - \exp(-\gamma_m(t - \tau))]$$

имеем

$$R_m(t, \tau) = \gamma_m - \gamma'_m(\tau) + [\gamma''_m(\tau) + \gamma''_m(\tau) - \gamma'_m \gamma'_m(\tau)] \times \\ \times \exp(\gamma_m(\tau)) \int_{\tau}^t \exp(-\gamma(x)) dx \\ \gamma_m(\tau) = \gamma_m \int_{\tau_1}^{\tau} [1 + 3 G_m \varphi_m(\tau)] d\tau$$

здесь  $\varphi_m(\tau) = C_{0,m} + A_{1,m}/\tau$ , где  $A_{1,m}$ ,  $C_{0,m}$ ,  $\gamma_m$  — постоянные, характеризующие свойство ползучести материала.

Вводя новую функцию  $\Psi_m(\alpha, \beta, t)$  при помощи соотношения  $\Phi_m(\alpha, \beta, t) = (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-3/2} \operatorname{sh}^2 \alpha \Psi_m(\alpha, \beta, t)$ , из (3.1) получим уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi_m}{\partial \beta^2} + \operatorname{cth} \alpha \frac{\partial \Psi_m}{\partial \alpha} + \left( \frac{1}{4} - \frac{4}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \right) \Psi_m = H^2 A^{-1} f_m(t) \quad (3.3)$$

$(m = 1, 2, \dots, N)$

где

$$A = A(\alpha, \beta) = \operatorname{sh}^2 \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{-3/2}$$

Пользуясь (1.10)—(1.12), получим

$$\begin{aligned} \Psi_m(\alpha, \beta, t) &= 0 \quad \text{на } L_0 \\ \Psi_l(\alpha, \beta, t) &= \Psi_k(\alpha, \beta, t) \quad \text{на } L_{lk} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_l} \frac{\partial(A\Psi_l)}{\partial n} - \int_{z_1}^t \frac{\partial(A\Psi_l)}{\partial n} \frac{\partial C_l(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ = \frac{1}{G_k} \frac{\partial(A\Psi_k)}{\partial n} - \int_{z_1}^t \frac{\partial(A\Psi_k)}{\partial n} \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \text{на } L_{lk} \end{aligned}$$

§ 4. Рассмотрим задачу о кручении составного кривого стержня, поперечное сечение которого состоит из двух областей, ограниченных неконцентрическими окружностями  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\alpha = \alpha_1$  (фиг. 3). Пусть в области  $\Omega_1$  материал обладает свойством ползучести, а в области  $\Omega_2$  справедлив закон Гука. На основании вышеизложенного, функции  $\Psi_1(\alpha, \beta, t)$  и  $\Psi_2(\alpha, \beta, t)$  в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  должны удовлетворять уравнению (3.3) при  $m = 1, 2$ . Здесь значения  $f_m(t)$  определяются из (3.2), которые в данном случае примут следующий вид:

$$f_1(t) = G_1 \left[ D(t) + \int_{z_1}^t D(\tau) R_1(t, \tau) d\tau \right], \quad f_2(t) = G_2 D(t) \quad (4.1)$$

а из условия (3.4) имеем

$$\Psi_1(\alpha_0, \beta, t) = 0, \quad \Psi_1(\alpha_1, \beta, t) = \Psi_2(\alpha_1, \beta, t) \quad (4.2)$$

$$\frac{G_1}{G_2} \frac{\partial(A\Psi_2)}{\partial \alpha} = \frac{\partial(A\Psi_1)}{\partial \alpha} - \int_{z_1}^t \frac{\partial(A\Psi_1)}{\partial \alpha} K_1(t, \tau) d\tau \quad \text{при } \alpha = \alpha_1$$

Предварительно введем функции

$$\begin{aligned} Z_n^m(\alpha, \beta) &= P_n^m(\text{ch } \alpha) Q_n^m(\text{ch } \beta) - P_n^m(\text{ch } \beta) Q_n^m(\text{ch } \alpha) \\ Z_n^{ms}(\alpha, \beta) &= P_n^m(\text{ch } \alpha) Q_n^s(\text{ch } \beta) - P_n^s(\text{ch } \beta) Q_n^m(\text{ch } \alpha) \end{aligned}$$

где  $P_n^m(x)$  и  $Q_n^m(x)$  — присоединенные сферические функции соответственно первого и второго рода  $m$ -го порядка  $n$ -го индекса.

Вводя новую функцию  $F_l(\alpha, \beta, t)$  при помощи соотношений

$$\Psi_l(\alpha, \beta, t) = F_l(\alpha, \beta, t) + f_l(t)(2A)^{-1} z^2 \quad (i=1, 2) \quad (4.3)$$

для  $F_l(\alpha, \beta, t)$  на основании (3.3) приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 F_l}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F_l}{\partial \beta^2} + \text{cth } \alpha \frac{\partial F_l}{\partial \alpha} + \left( \frac{1}{4} - \frac{4}{\text{sh}^2 \alpha} \right) F_l = 0 \quad (4.4)$$

( $i=1, 2$ )

На основании краевых условий (4.2) из (4.3) находим

$$F_1(x_0, \beta, t) = -f_1(t) a^2 \sin^2 \beta [2 \operatorname{sh}^2 x_0 (\operatorname{ch} x_0 - \cos \beta)]^{1/2} \quad (4.5)$$

$$F_1(x_1, \beta, t) - F_2(x_1, \beta, t) = [f_2(t) - f_1(t)] a^2 [2 \operatorname{sh}^2 x_1 (\operatorname{ch} x_1 - \cos \beta)]^{1/2} \quad (4.6)$$

$$\frac{G_1}{G_2} \frac{\partial (AF_2)}{\partial x} = \frac{\partial (AF_1)}{\partial x} - \int_{x_1}^x \frac{\partial (AF_1)}{\partial x} K_1(t, z) dz \quad (4.6)$$

при  $x = x_1$

Решение систем уравнений (4.4) при граничных условиях (4.5) можно представить в виде

$$F_1(x, \beta, t) = \frac{a_0(t)}{2} \frac{Z_{-1/2}^2(x_0, x)}{Z_{-1/2}^2(x_0, x_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{Z_{n-1/2}^2(x_0, x)}{Z_{n-1/2}^2(x_0, x_1)} \cos n\beta + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \alpha_n^1(t) \frac{Z_{n-1/2}^2(x, x_1)}{Z_{n-1/2}^2(x_0, x_1)} + \beta_n^1(t) \frac{Z_{n-1/2}^2(x_0, x)}{Z_{n-1/2}^2(x_0, x_1)} \right] \cos n\beta \quad (4.7)$$

$$F_2(x, \beta, t) = \frac{a_0(t)}{2} \frac{Q_{-1/2}^2(\operatorname{ch} x)}{Q_{-1/2}^2(\operatorname{ch} x_1)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \frac{Q_{n-1/2}^2(\operatorname{ch} x)}{Q_{n-1/2}^2(\operatorname{ch} x_1)} \cos n\beta$$

где

$$\alpha_0^1(t) = -\frac{f_1(t) a^2}{2 \pi \operatorname{sh}^2 x_0} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} x_0 - \cos \beta)^{1/2}} d\beta$$

$$\alpha_n^1(t) = -\frac{f_1(t) a^2}{\pi \operatorname{sh}^2 x_0} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} x_0 - \cos \beta)^{1/2}} \cos n\beta d\beta \\ (n=1, 2, \dots)$$

$$\beta_0^1(t) = \frac{f_2(t) - f_1(t)}{2 \operatorname{sh}^2 x_1} a^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} x_1 - \cos \beta)^{1/2}} d\beta$$

$$\beta_n^1(t) = \frac{f_2(t) - f_1(t)}{\operatorname{sh}^2 x_1} a^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} x_1 - \cos \beta)^{1/2}} \cos n\beta d\beta \\ (n=1, 2, \dots)$$

Используя условие (4.6), из (4.7) приходим к бесконечной системе интегральных уравнений относительно  $a_n(t)$

$$B_{00} a_0(t) + 2B_{01} a_1(t) - \int_{x_1}^x [B_{00}^* a_0(\tau) + 2B_{01}^* a_1(\tau)] K_1(t, \tau) d\tau = 2h_0(t)$$

$$\sum_{i=n-1}^{n+1} \left[ B_{ni} a_i(t) - \int_{\tau_1}^t B_{ni}^* a_i(\tau) K_1(t, \tau) d\tau \right] = h_n(t) \quad (4.8)$$

(n = 1, 2, \dots)

Коэффициенты и свободные члены определяются по следующим формулам:

$$B_{ni} = (i^2 - 9/4) \frac{G_1}{G_2} \frac{Z_{i-1/2}^{2i}(a_0, a_1)}{Z_{i-1/2}^2(a_0, a_1)} \operatorname{sh} a_1 - B_{ni}^* \quad (4.9)$$

$$B_{ni}^* = (i^2 - 9/4) \operatorname{sh} a_1 \frac{Q_{i-1/2}^1(\operatorname{ch} a_1)}{Q_{i-1/2}^2(\operatorname{ch} a_1)} \quad \left( \begin{array}{l} i = n-1, n+1 \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

$$B_{nn} = \frac{G_1}{G_2} \left[ -3 \operatorname{sh}^2 a_1 + \operatorname{sh} 2a_1 (n^2 - 9/4) \frac{Z_{n-1/2}^{2n}(a_0, a_1)}{Z_{n-1/2}^2(a_0, a_1)} \right] - B_{nn}^*$$

$$B_{nn}^* = -3 \operatorname{sh}^2 a_1 + \operatorname{sh} 2a_1 (n^2 - 9/4) \frac{Q_{n-1/2}^1(\operatorname{ch} a_1)}{Q_{n-1/2}^2(\operatorname{ch} a_1)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$2h_0(t) = H_0(t) - G_1 G_2^{-1} [-3 \operatorname{sh}^2 a_1 \beta_0^1(t) + \operatorname{sh} 2a_1 c_0(t) - 2 \operatorname{sh} a_1 c_1(t)]$$

$$h_n(t) = -G_1 G_2^{-1} [-3 \operatorname{sh}^2 a_1 \beta_n^1(t) + \operatorname{sh} 2a_1 c_n(t) - \operatorname{sh} a_1 \cdot c_{n-1}(t) - \operatorname{sh} a_1 c_{n+1}(t)] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$c_n(t) = \frac{n^2 - 9/4}{Z_{n-1/2}^2(a_0, a_1)} [Z_{n-1/2}^{2n}(a_1, a_1) \cdot x_n^1(t) - Z_{n-1/2}^{2n}(a_1, a_0) \beta_n^1(t)]$$

Из соотношений (1.14), (4.3) и (4.7) определяем значение неизвестной функции  $D(t)$ .

§ 5. Исследование бесконечной системы интегральных уравнений (4.8). Пользуясь асимптотическим разложением присоединенных функций Лежандра [16]  $P_n^m(\operatorname{ch} a)$ ,  $Q_n^m(\operatorname{ch} a)$  при больших значениях  $n$

$$\frac{\Gamma(n+1-m)}{\Gamma(n+1)} P_n^m(\operatorname{ch} a) = \frac{\exp\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)a\right)}{(2\pi n \operatorname{sh} a)^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{8n}\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1-4m^2}{4n} \frac{\exp(-2a)}{1 - \exp(-2a)}\right) \quad (5.1)$$

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+m+1)} Q_n^m(\operatorname{ch} a) = \exp(\pi mi) \left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/2} \frac{\exp(-(n+1/2)a)}{(2 \operatorname{sh} a)^{1/2}}$$

где  $\Gamma(p)$  — гамма-функция, а  $i$  — мнимая единица, покажем квазивполную регулярность системы (4.8) при  $t = \tau_1$ ,  $t = \infty$  и в случае  $K_1(t, \tau) = K(t - \tau)$ .

Систему уравнений (4.8) при  $t = \tau_1$  представим в виде

$$a_0(\tau_1) = -\frac{2B_{01}}{B_{00}} a_1(\tau_1) + \frac{2h_0(\tau_1)}{B_{00}} \quad (5.2)$$



$$a_n(\tau_1) = -\frac{B_{n,n-1}}{B_{nn}} a_{n-1}(\tau_1) - \frac{B_{n,n+1}}{B_{nn}} a_{n+1}(\tau_1) + \frac{h_n(\tau_1)}{B_{nn}} \quad (n=1, 2, \dots)$$

Пользуясь формулами (4.9) и оценками (5.1), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left| \frac{B_{n,n-1}}{B_{nn}} \right| + \left| \frac{B_{n,n+1}}{B_{nn}} \right| \right] = (\text{ch } a_1)^{-1} \quad (5.3)$$

Таким образом, система (5.2) квазивполне регулярна.

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n^i(\tau_1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\beta_n^1(\tau_1)] = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n^2 - 9/4}{n} \cdot \frac{Z_{n-1/2}^{21}(a_0, a_1)}{Z_{n-1,2}^{21}(a_0, a_1)} \right] = -1$$

то имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{h_n(\tau_1)}{B_{nn}} \right] = 0$ , то есть совокупность свободных членов системы (5.2) не только ограничена, но и стремится к нулю.

Обозначим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [a_n(t)] = a_n^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [h_n(t)] = h_n^*$$

и переходя к пределу в (4.8) при  $t \rightarrow \infty$ , получим

$$a_0^* = 2\gamma_{01}^* a_1^* + 2\tilde{h}_0^*$$

$$a_n^* = \gamma_{n,n-1}^* a_{n-1}^* + \gamma_{n,n+1}^* a_{n+1}^* + \tilde{h}_n^* \quad (n=1, 2, \dots) \quad (5.4)$$

здесь

$$\gamma_{ni}^* = \frac{B_{ni} - 3G_1 C_{0,1} B_{ni}^*}{3G_1 C_{0,1} B_{nn}^* - B_{nn}^*} \quad (i=n-1, n+1), \quad \tilde{h}_n^* = \frac{h_n^*}{B_{nn} - 3G_1 C_{0,1} B_{nn}^*} \quad (n=0, 1, \dots)$$

Исходя из формул (4.9) и оценок для сумм модулей коэффициентов при неизвестных  $a_n^*$  в системе (5.4), можно получить аналогичные (5.3) оценки.

Рассмотрим случай  $K_i(t, \tau) = K(t-\tau)$ , то есть когда в области  $\Omega$  имеем старый материал. Тогда применив к обеим частям системы уравнений (4.8) преобразование Лапласа, получим

$$B_{00} X_0(p) + 2B_{01} X_1(p) - [B_{00}^* X_0(p) + 2B_{01}^* X_1(p)] \tilde{K}(p) = 2\tilde{H}_0(p) \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=n-1}^{n+1} [B_{ni} - B_{ni}^* \tilde{K}(p)] X_i(p) = \tilde{H}_n(p)$$

$$(n=1, 2, \dots)$$

где

$$a(t) \doteq X_n(p), \quad h_n(t) \doteq \tilde{H}_n(p), \quad K(t) \doteq \tilde{K}(p)$$

Нетрудно проверить, что система (5.5) квазиполне регулярна. Решая систему (5.5), найдем  $X_i(\rho)$ , оригиналы для которых и будут решением исходной системы интегральных уравнений (4.8).

### ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ ԿՈՐ ՉՈՂԻ ՍՈՂՔԸ ՈՒՈՐՄԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ

Մ. Ա. ՉԱԳՈՅԱՆ, Ֆ. Մ. ՓՈԼԱԴԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Ուսումնասիրվում է ժառանգական սողքի հատկությամբ օժտված սողքի տարրեր շափեր ունեցող նյութերից կազմված կոր ձողի ոլորման խնդիրը:

Օգտվելով թորական կոորդինատային համակարգից խնդիրը յուրաքանչյուր ափսոսված բերվում է ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը խառը եզրային պայմաններով:

Ուսումնասիրվում է այն դեպքը, երբ ուղղահայաց հատույթը սահմանափակված է ոչ համակենտրոն շրջանագծերով: Այն դեպքում լուծումները ներկայացված են եռանկյունաշափական շարքերի միջոցով, որոնց գործակիցների համար ստացված է ինտեգրալ հավասարումների անվերջ համակարգ:

Մի քանի մասնավոր դեպքերի համար ցույց է տրվում ստացված համակարգի կվադրիտիվին սեպուլյարուիթյունը և ազատ անդամների սահմանափակումներ:

### THE CREEP OF THE CURVE OF THE COMPOUND BAR UNDER TORSION

M. A. ZADOYAN, F. M. POLADIAN

#### S u m m a r y

The problem refers to the torsion of the curved bar composed of materials possessing hereditary creep properties with different measurements.

By using the toroidal coordinate system the problem leads to integration in every interval of the integrodifferential equations with maxed boundary conditions.

The case is considered when the cross section is limited by non-concentric circles. In this case the solution is represented by means of the geometrical series for the coefficients of which an infinite system of integral equations is obtained.

For some partial cases the quasi-quite regularity and the limit of the free members of this system is shown.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ардгунян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: ГИТТЛ, 1952.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд. АН СССР, 1954.
3. Веква И. Н., Рухадзе А. К. Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем.—Изв. АН СССР, 1933, № 3.

4. Чобанян К. С. Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов.—Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат., ест. и тех. наук, 1955, т. 8, № 2.
5. Лехницкий С. Г. Кручение многослойного стержня прямоугольного сечения.—Инж. сборник АН СССР, 1956, № 23.
6. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
7. Задоян М. А. Пластическое кручение неполного тора.—Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
8. Задоян М. А. Пластическое кручение сектора кольца.—Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
9. Галпчян П. В., Задоян М. А. Пластическое кручение кругового стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1979, т. 32, № 1.
10. Freiburger W. The uniform of a perfectly plastic circular ring. Commonwealth of Australia. Aeronautical Research Laboratories, Report ARLSM 2B, 1953.
11. Wang A. J., Prager W. Plastic twisting of a circular ring sector.—J. Mech. and Phys. Solids, 1955, vol. 3, p. 169—175.
12. Галпчян П. В. Пластическое кручение кривого стержня, составленного из различных материалов.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1980, т. 33, № 4.
13. Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С. О кручении призматических стержней, составленных из различных материалов с учетом ползучести.—Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 6.
14. Задоян М. А., Поладян Ф. М. Задача нелинейной ползучести кривого стержня при кручении.—Докл. АН Арм.ССР, 1980, т. 71, № 3.
15. Новожилов В. В. Теория упругости. М.—Л.: Судстройиздат, 1962.
16. Гобсон Е. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952.

Институт механики АН Армянской ССР

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила в редакцию  
27. VII. 1981