ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 5, 1983 Механика

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В МИКРОПОЛЯРНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

БАГДОЕВ А. Г., ПЕТРОСЯН Л. Г.

Уравнения двумерных, нестационарных коротких волн* для газовой динамики были получены в работе [1]. Учет вязкости для классических (симметричных) жидкостей был сделан в [2]. Исследованию волновых фронтов в линейной постановке для широкого круга сред посвящены работы [3, 4]. Распространение волн в электропроводящей жидкости в магнитном поле для классических жидкостей рассмотрено в [5]. Построению общего вида уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений посвящены работы [6, 7].

Как показано в [6, 7], в несимметричных жидкостях в уравнениях, описывающих окрестность волны, члены, соответствующие вращательной и моментным вязкостям, выпадают из окончательных уравнений.

Представляет интерес обобщение полученных ранее результатов на более сложные среды, а именно, электропроводящую жидкость в магнитном поле с несимметричным тензором напряжений и содержащей газовые пузырьки, с целью выяснения роли моментных эффектов и газовых пузырьков на форму упрощенных нелинейных уравнений, описывающих окрестность волн в слабодиссипативных диспергирующих средах.

Примером рассматриваемой среды является электропроводящая жидкость, образующаяся, например, при электрическом разряде в жидкости, содержащей пузырьки газа и являющейся микрополярной.

В настоящей работе дается построение общего вида уравнений коротких волн, описывающих изменения параметров произвольной нелинейной слабо диссипативной среды в окрестности волн малой интенсивности для электропроводящей жидкости, содержащей пузырьки газа, с несимметричным тензором напряжений (моментная теория) в магнитном поле. Получены уравнения медленно меняющихся амплитуд и фаз квазимонохроматических волн. Дается упрощение уравнений модуляций для типично дифракционной задачи, в которой определяющими являются производные вдоль волны. Исследуются решения полученных уравнений на устойчивость. Решена задача об узких пучках.

1. *Уравнения коротких волн для задачи магнитной газодинамики несимметричных жидкостей.* Уравнения несимметричной магнитной гидродинамики в отсутствие внешних сил и моментов имеют вид [8, 9]

* Термин «короткие волны» был введен в работе [1] для выделения областей в окрестности волны, где параметры движения резко изменяются.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\right)\rho+\rho\nabla\cdot\vec{v}=0 \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v}-\mu_e(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}=-\nabla\left(p+\frac{\mu_e\vec{H}^2}{2}\right)+$$

$$+(\mu_0+\mu-\mu_r)\nabla\nabla\cdot\vec{v}+(\mu+\mu_r)\nabla^2\vec{v}+2\mu_r\nabla\times\vec{\omega} \tag{1.2}$$

$$\rho I\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{\omega}=(c_0+c_d-c_a)\nabla\nabla\cdot\vec{\omega}+(c_d+c_a)\nabla^2\vec{\omega}+$$

$$+2\mu_r(\nabla\times\vec{v}-2\vec{\omega}) \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{H}-(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{v}+\vec{H}(\nabla\cdot\vec{v})=\nu_H\nabla^2\vec{H} \tag{1.4}$$

Здесь ρ — массовая плотность; p — давление; I — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы; $\vec{v}$ — вектор скорости точки; $\vec{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума; ∇ — пространственный градиент; μ_0 — объемная вязкость; μ — динамическая ньютоновская вязкость; μ_r — динамическая вращательная вязкость; c_0, c_d, c_a — динамические моментные вязкости; $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; μ_e — магнитная постоянная; $\nu_H=1/\sigma\mu_e$ — коэффициент магнитной вязкости; σ — электропроводность среды.

Ниже рассматривается гомогенная электропроводящая жидкость, представляющая собой простейшую модель жидкости с пузырьками газа, в которой пренебрегают всеми эффектами, связанными с пузырьковой структурой газо-содержания, за исключением сжимаемости [10].

Обозначим величины, относящиеся к газовой фазе, индексом g, а жидкости — индексом f; например, ρ_f и ρ_g означают плотности жидкости и газа соответственно. Определим β как объем газа в единице объема смеси, тогда для плотности газа имеем [10]

$$\rho=\rho_f(1-\beta)+\rho_g\beta \tag{1.5}$$

Если допустить, что газ и жидкость движутся с одинаковой скоростью, то массу газа в единице массы смеси можно считать постоянной [10]

$$\rho_g\beta/\rho_f(1-\beta)=\text{const} \tag{1.6}$$

В континуальной теории вкладом газа в массовую плотность обычно пренебрегают, тогда взамен (1.5) запишем [10]

$$\rho=\rho_f(1-\beta) \tag{1.7}$$

Учитывая, что при постоянной температуре T (изотермический процесс) давление в газе p_g пропорционально ρ_g, равенство (1.6) можно получить в виде [10]

$$\rho_g \beta/(1-\beta) = \mathrm{const} \tag{1.8}$$

Пользуясь условием непрерывности напряжений на границе пузырька, в том числе и вязких напряжений, и предполагая отсутствие фазовых превращений на границе раздела жидкость-пар, можно получить для давления в жидкости на стенке пузырька следующее выражение [10]:

$$p_g - p = \rho_f R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_f \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \tag{1.9}$$

где R — радиус пузырька. Заметим, что уравнение (1.9) сохраняет свой вид и в случае несимметричных жидкостей.

Здесь допускается, что соотношение (1.9) между p и p_g существует и в смеси.

Уравнение состояния совершенного изотермического газа для пузырька имеет вид

$$p_g R^3 = \mathrm{const} \tag{1.10}$$

Для решений задачи имеем систему уравнений (1.1)—(1.4), (1.7)—(1.9).

Получим условия совместности (обобщенные) на волнах.

Условия совместности получаются следующей заменой [11] в уравнениях (1.1)—(1.4):

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\lambda\delta, \ \nabla \to \vec{n}\delta, \ \lambda = -\frac{\partial F}{\partial t}, \ \vec{n} = \nabla F \tag{1.11}$$

Здесь $\delta = \dfrac{\partial}{\partial F}$ — производная по нормали к волне; λ — нормальная скорость волны; $\vec{n}$—единичный вектор нормали к волне; $F = F(x, y, z, t) = 0$— уравнение поверхности волны. Как показано в [6], при определении слагаемых, соответствующих малым диссипативным членам, следует оставлять только производные по нормали к волне. Предположено, что производные по касательной намного меньше производных по нормали.

Обычно соотношение (1.11) используется для гиперболических уравнений [11], однако, как показано в [6, 7, 12], их можно использовать при записи обобщенных условий совместности, в результате применения которых диссипативные члены формально включаются в формулу для нормальной скорости волны.

Из (1.1)—(1.4), (1.7)—(1.9) имеем

$$c_n \delta\rho - \rho\delta V_n = 0 \tag{1.12}$$

$$-\rho c_n \delta \vec{v} = -\vec{n}\delta p + (\mu_0 + \mu - \mu_r)\vec{n}\delta[\delta(\vec{n}\cdot\vec{v})] + (\mu+\mu_r)\delta^2\vec{v} + 2\mu_r \vec{n}\delta \times \vec{\omega} + \mu_e(\vec{H}\cdot\vec{n})\delta\vec{H} - \mu_e \vec{n}\delta\frac{\vec{H}^2}{2} \tag{1.13}$$

$$-\rho I c_n \delta\vec{\omega} = (c_* + c_d + c_a)\vec{n}\delta[\delta(\vec{n}\cdot\vec{\omega})] + (c_d + c_a)\delta^2\vec{\omega} + 2\mu_r \vec{n}\delta \times \vec{v} - 4\mu_r\vec{\omega} \tag{1.14}$$

$$-c_n\delta\vec{H} - H_n\delta\vec{v} + \vec{H}\delta V_n = \nu_H\delta^2\vec{H} \tag{1.15}$$

$$\delta p_g = -\frac{p_g}{\beta}\frac{\delta\beta}{1-\beta}, \quad \delta\rho = -\rho_f\delta\beta \qquad (1.16),\ (1.17)$$

$$\delta R = -\frac{R}{3p_g}\delta p_g, \quad \delta p_g - \delta p = \rho_f R c_n^2\delta^2 R - \frac{4\mu}{R}c_n\delta^2 R \qquad (1.18),\ (1.19)$$

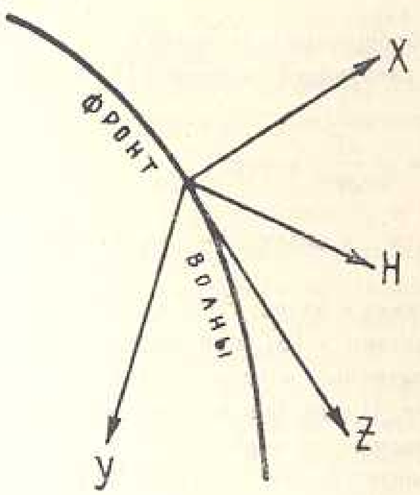
где c_n — нормальная скорость волны относительно частицы, V_n — проекция скорости частицы на нормаль к волне.

Отметим, что $\frac{d^2R}{dt^2} = c_n^2\delta^2 R.$

Уравнения (1.16), (1.18) и (1.19) получены после взятия производной от (1.8), (1.9) и (1.10), при этом в (1.19) отброшены малые высшего порядка.

Выберем ось x по нормали к волне, а y и z — по касательной к ней, причем начальное магнитное поле $\vec{H}$ находится в плоскости x, y (фиг. 1).

Запишем уравнения (1.2)—(1.15) в проекциях



Фиг. 1.

$$c_n\delta\rho - \rho\delta V_x = 0 \tag{1.20}$$

$$-\rho c_n\delta V_x = -\delta p + (\mu_0 + 2\mu)\delta^2 V_x - \mu_e H_y\delta H_y \tag{1.21}$$

$$-\rho c_n\delta V_y = (\mu + \mu_r)\delta^2 V_y - 2\mu_r\delta\omega_z + \mu_e H_x\delta H_y \tag{1.22}$$

$$-\rho I c_n\delta\omega_z = (c_d + c_a)\delta^2\omega_z + 2\mu_r\delta V_y - 4\mu_r\omega_z \tag{1.23}$$

$$-c_n\delta H_x = \nu_H\delta^2 H_x, \quad -c_n\delta H_y - H_x\delta V_y + H_y\delta V_x = \nu_H\delta^2 H_y \qquad (1.24),\ (1.25)$$

Для рассматриваемых здесь быстрых и медленных магнитозвуковых волн $\delta V_z = \delta H_z = 0$.

Заметим, что уравнению (1.24) удовлетворяет решение $\delta H_x = 0$, тогда взамен (1.24) будем иметь

$$\delta H_x = 0$$

Из уравнений (1.16) и (1.17) получим

$$\delta p_g = a_*^2\delta\rho, \quad a_*^2 = \frac{p}{\rho_f}\frac{1}{(1-\beta)\beta} \tag{1.26}$$

где a_* — скорость звука в жидкости с пузырьками.

Из этого выражения следует вывод о том, что скорость звука в жидкости с пузырьками газа намного меньше скорости звука в чистом газе, если величина β не очень близка к единице или нулю (при $\beta = 0{,}5$ имеем минимальное значение для скорости звука в смеси).

Из соотношения (1.18), считая $R/3p_g$ медленно меняющимся, вычисляя приближенные значения $\delta^2 R$ и $\delta^3 R$ и подставляя в (1.19), получим

$$\delta p = \delta p_g + \rho_f \frac{R^2}{3p_g} c_n^2 \delta^3 p_g - \frac{4\mu}{2p_g} c_n \delta^2 p_g \tag{1.27}$$

Из (1.26), вычисляя приближенные значения $\delta^2 p_g$ и $\delta^3 p_g$ и подставляя в (1.27), получим

$$\delta p = a_*^2 \delta \rho - \frac{4\mu}{3p_g} c_n a_*^2 \delta^2 \rho + \frac{\rho_f R^2 c_n^2}{3p_g} a_*^2 \delta^3 \rho \tag{1.28}$$

Подставляя из (1.20) значение δV_x и из уравнения (1.28) значение δp в уравнения (1.21) и (1.25), получим

$$-c_n^2 \delta \rho = -a_*^2 \delta \rho + \frac{4\mu}{3p_g} c_n a_*^2 \delta^2 \rho - \frac{\rho_f R^2 c_n^2}{3p_g} a_*^2 \delta^3 \rho +$$

$$+ (\mu_0 + 2\mu) \frac{c_n}{\rho} \delta^2 \rho - \mu_e H_y \delta H_y \tag{1.29}$$

$$-c_n \delta H_y - H_x \delta H_y + H_y \frac{c_n}{\rho} \delta \rho = \nu_H \delta^2 H_y \tag{1.30}$$

Отбросив в уравнениях (1.22), (1.23), (1.29) и (1.30) малые члены (в том числе вязкостные члены), получим

$$c^2 \delta \rho = a_*^2 \delta \rho + \mu_e H_y \delta H_y, \quad -\rho c \delta V_y = \mu_e H_x \delta H_y$$

$$-c \delta H_y - H_x \delta V_y + H_y \frac{c}{\rho} \delta \rho = 0 \quad (c_n = c) \tag{1.31}$$

Из этих уравнений в линейном приближении находим для c известную формулу [11]

$$c^4 - c^2 \left[a_*^2 + \frac{\mu_e}{\rho} (H_x^2 + H_y^2) \right] + \frac{\mu_e a_*^2}{\rho} H_x^2 = 0$$

В уравнении (1.23) можно считать члены, содержащие I и $(c_a + c_d)$ малыми и получить $\omega_z \approx \frac{1}{2} \delta V_y$; затем подставляя в вышеуказанное уравнение, получим

$$\omega_z = \frac{1}{2} \delta V_y + \frac{\rho I c_n}{8\mu_r} \delta^2 V_y + \frac{c_a + c_d}{8\mu_r} \delta^3 V_y$$

Полученное значение ω_z подставим в уравнение (1.22), при этом получим

$$-\rho c_n \delta V_y = \mu \delta^2 V_y - \frac{\rho I c_n}{4} \delta^3 V_y - \frac{c_a + c_d}{4} \delta^4 V_y + \mu_e H_x \delta H_y \tag{1.32}$$

Для решения задачи имеем уравнения (1.29), (1.30) и (1.32).

Из первого и второго уравнений системы (1.31) находим

$$\delta V_y = -\frac{c^2 - a_*^2}{\rho c} \frac{H_x}{H_y} \delta\rho \tag{1.33}$$

Полученное значение δV_y подставим в малые члены уравнения (1.32), тогда получим

$$-\rho c_n \delta V_y = -\frac{\mu (c^2 - a_*^2)}{\rho c} \frac{H_x}{H_y} \delta^2\rho + \frac{I (c^2 - a_*^2)}{4} \delta^3\rho \frac{H_x}{H_y} + \\ + \frac{(c_a + c_d)(c^2 - a_*^2)}{4\rho c} \frac{H_x}{H_y} \delta^4\rho + \mu_e H_x \delta H_y \tag{1.34}$$

Здесь в малых членах c_n заменено на c.

Подставляя из первого уравнения системы (1.31) значение δH_y в малые члены (1.30), будем иметь

$$-c_n \delta H_y - H_x \delta V_y + H_y \frac{c_n}{\rho} \delta\rho = \frac{\nu_H (c^2 - a_*^2)}{\mu_e H_y} \delta^2\rho \tag{1.35}$$

Из уравнений (1.29), исключая δV_y и δH_y при помощи уравнений (1.31) и (1.35), получим

$$c_n^4 - c_n^2 \left[a_*^2 + \frac{\mu_e}{\rho} (H_x^2 + H_y^2) \right] + a_*^2 \frac{\mu_e}{\rho} H_x^2 + \left\{ \left[\frac{4\mu}{3 p_g} c a_*^2 + \right.\right. \\ \left. + (\mu_0 + 2\mu) \frac{c}{\rho} \right] \left(c^2 - \frac{\mu_e}{\rho} H_x^2 \right) + \frac{\mu\mu_e (c^2 - a_*^2)}{\rho^2 c} H_x^2 + \left. \nu_H c (c^2 - a_*^2) \right\} \frac{\delta^2\rho}{\delta\rho} - \\ - \left[\frac{\rho_f R^2 c^2 a_*^2}{3 p_g} \left(c^2 - \frac{\mu_e}{\rho} H_x^2 \right) + \frac{\mu_e I (c^2 - a_*^2)}{4\rho} H_x^2 \right] \frac{\delta^3\rho}{\delta\rho} - \\ - \frac{\mu_e (c_a + c_d)(c^2 - a_*^2)}{4\rho^2 c} H_x \frac{\delta^4\rho}{\delta\rho} = 0 \tag{1.36}$$

При получении (1.36) в малых членах c_n заменено на c.

В нелинейной диссипативной задаче можно записать

$$c_n = c + \gamma V_x + D' \frac{\delta^2 V_x}{\delta V_x} + E' \frac{\delta^3 V_x}{\delta V_x} + G' \frac{\delta^4 V_x}{\delta V_x} \tag{1.37}$$

Нетрудно показать, что [5]

$$\gamma + 1 = -\alpha^0 \frac{c^2 - a_1^2}{a_{*0}^2 + a_1^2 - 2c^2} + \frac{3}{2} \frac{a_{*0}^2 - c^2}{a_{*0}^2 + a_1^2 - 2c^2} \tag{1.38}$$

где

$$a_1^2 = \frac{\mu_e}{\rho_0} (H_{x0}^2 + H_{y0}^2), \quad \alpha^0 = \left[\frac{\partial (\rho a_*)}{a_* \partial\rho} \right]_{\rho = \rho_0, \ a_* = a_{*0}}$$

Из (1.6), (1.7), (1.9), (1.10) и (1.27), полагая $\beta = \beta_0 + \beta'$ и т. д., получим $\alpha^0 = 1/\beta_0$.

Здесь $H_x = H_{x0} + H'_x$, $H_y = H_{y0} + H'_y$, причем H_{x0}, H_{y0}, ρ_0, a_{*0} — значения функций невозмущенной среды.

Из соотношения (1.37), подставляя значение c_0 в равенство (1.36), находим для D', E', G' следующие выражения:

$$D' = -M\left\{\left[\frac{4\mu}{3p_g} ca_*^2 + (\mu_0 + 2\mu)\frac{c}{\rho}\right]\left(c^2 - \frac{\mu_e}{\rho}H_x^2\right) + \frac{\mu\mu_e(c^2 - a_*^2)}{\rho^2 c}H_x^2 + \right.$$

$$\left. + \nu_H c(c^2 - a_*^2)\right\}, \quad E' = M\left[\frac{\rho_f R^2 c^2 a_*^2}{3p_g}\left(c^2 - \frac{\mu_e}{\rho}H_x^2\right) + \frac{\mu_e I(c^2 - a_*^2)}{4\rho}H_x^2\right] \quad (1.39)\ (1.40)$$

$$G' = M\frac{\mu_e(c_a + c_d)(c^2 - a_*^2)}{4\rho^2 c}H_x^2, \quad M = \frac{1}{2c[2c^2 - (a_*^2 + a_1^2)]} \quad (1.41)$$

Уравнения коротких волн несимметричных электропроводящих жидкостей запишутся в виде [6, 7]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2}L(u) - \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \ln \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + D\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \right.$$

$$\left. + E\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + G\frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4}\right]$$

$$L = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\alpha_k \Delta_{\alpha_k}}\left[\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_3^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\right] \quad (1.42)$$

Здесь $dx = H_1 d\tau$; $H_1 = c + V_n$ — нормальная скорость волны линейной задачи; α_1, α_2, α_3 — компоненты волнового вектора в системе координат x, y, z; $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ — дисперсионное соотношение в линейной задаче; Φ — амплитуда u для лучевого решения; $u = V'_x$ $(\Gamma = \gamma + 1)$;

$$\delta = \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad D = \frac{D'}{H_1}, \quad E = \frac{E'}{H_1^2}; \quad G = \frac{G'}{H_1^3}$$

Для определения коэффициентов при производных от u по y и z следует использовать соотношения [5]

$$\alpha_1 V_{x0} + \alpha_2 V_{y0} + \alpha_3 V_{z0} + c\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = 1$$

$$c^4 - c^2(a_{*0}^2 + a_1^2) + \alpha_{*0}^2\frac{(H_{x0}\alpha_1 + H_{y0}\alpha_2)^2}{\rho(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)} = 0$$

где $\vec{V}_0 = \vec{V}_0(V_{x0}, V_{y0}, V_{z0})$ — вектор скорости частиц в невозмущенном движении.

В случае подвижной системы координат, связанной с волной, $\alpha_2 \approx 0$, $\alpha_3 \approx 0$. Тогда скорость волны будет [6]

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \approx \frac{1}{\alpha_1}, \text{ а } \frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_k \Delta_{\alpha_k}} \approx \frac{1}{\alpha_1} \quad (1.43),\ (1.44)$$

Учитывая малость α_2, α_3 вблизи оси x_1 при $H_{y0} \approx 0$, можно получить

$$\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}=\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_3^2}=-\frac{c^3}{2c^2-a_0^2-a_1^2},\quad \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3}=0 \tag{1.45}$$

2. *Уравнение для медленно меняющихся амплитуд и фаз квазимонохроматических волн.* Для простоты рассмотрим однородную среду и плоскую волну, для которых лучевое решение $\Phi=\text{const}$.

Ищем решение уравнения (1.42) в виде волн

$$u=U_0+\frac{1}{2}\left(U_1\exp(i\theta-\nu\alpha^2t)+\overline{U}_1\exp(-i\theta-\nu\alpha^2t)+\right.$$

$$\left.+U_2\exp(2i\theta-2\nu\alpha^2t)+\overline{U}_2\exp(-2i\theta-2\nu\alpha^2t)\right) \tag{2.1}$$

где $\theta=\alpha\tau-\omega t$; $\alpha=\alpha_1\omega_0H_1$; ω_0 — частота в неподвижной системе координат; ν — коэффициент затухания; U_0, U_1, U_2 — медленно меняющиеся амплитуды; $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ — комплексно сопряженные функции.

Подставляя значение u из (2.1) в уравнение (1.42) и приравнивая слагаемые при e^0, $e^{i\theta}$, $e^{2i\theta}$, получим

$$\frac{\partial^2U_0}{\partial t\partial\tau}-\frac{1}{2}L(U_0)=-\frac{1}{H_1}\left|\Gamma\frac{\partial}{\partial\tau}\left(U_0\frac{\partial U_0}{\partial\tau}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\Gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(U_1\overline{U}_1)\exp(-2\nu\alpha t^2)+D\frac{\partial^3U_0}{\partial\tau^3}+E\frac{\partial^4U_0}{\partial\tau^4}+G\frac{\partial^5U_0}{\partial\tau^5}\right| \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2U_1}{\partial t\partial\tau}-\frac{\partial U_1}{\partial\tau}(i\omega+\nu\alpha^2)+i\alpha\frac{\partial U_1}{\partial t}+\omega\alpha U_1-i\alpha^3\nu U_1-\frac{1}{2}L(U_1)=$$

$$=-\frac{1}{H_1}\left|-\Gamma\alpha^2U_0U_1-\Gamma\frac{1}{2}\alpha^2\overline{U}_1U_2\exp(-2\nu\alpha^2t)+3Di\alpha\frac{\partial^2U_1}{\partial\tau^2}-\right.$$

$$-3D\alpha^2\frac{\partial U_1}{\partial\tau}-Di\alpha^3U_1-6E\alpha^2\frac{\partial^2U_1}{\partial\tau^2}-4Ei\alpha^3\frac{\partial U_1}{\partial\tau}+\alpha^4EU_1-$$

$$\left.-10Gi\alpha^3\frac{\partial^2U_1}{\partial\tau^2}+5\alpha^4G\frac{\partial U_1}{\partial\tau}+Gi\alpha^5U_1\right| \tag{2.3}$$

$$4\alpha\omega U_2-4i\alpha^3\nu U_2=-\frac{1}{H_1}[-\alpha^2U_1^2\Gamma-8i\alpha^3U_2D+16\alpha^4U_2E+32\alpha^5iU_2G] \tag{2.4}$$

При написании (2.4) опущены слагаемые $2i\alpha\frac{\partial U_2}{\partial t}-\frac{1}{2}L(U_2)$, что допустимо при $E\alpha^3\gg1$, и отброшены производные U_2.

Приравнивая в (2.3) члены, содержащие U_1, получим линейное дисперсионное соотношение и коэффициент затухания

$$\omega=-\frac{1}{H_1}E\alpha^3,\quad \nu=-\frac{1}{H_1}D+\frac{1}{H_1}G\alpha^2 \tag{2.5), (2.6}$$

Из уравнения (2.4), с учетом (2.5) и (2.6), можно получить $U_2\sim\varepsilon^2$ (ε — малая величина порядка U_1). Уравнение (2.3) после подстановки (2.5), (2.6) примет вид

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t \partial \tau} + i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial \tau}\left[-\frac{3}{H_1} Ei\alpha^3 - \frac{2}{H_1} D\alpha^2 + \frac{4}{H_1} \alpha^4 G \right] +$$
$$+ \frac{1}{H_1}(3\,Di\alpha - 6\,E\alpha^2 - 10\,Gi\alpha^3)\frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} = \frac{1}{H_1}\Big(\Gamma\alpha^2 U_0 U_1 +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2\alpha^2\, \overline{U}_1 U_1^2 \exp(-2\,\nu\alpha^2 t)}{-4\,Di\alpha + 12\,E\alpha^2 + 28\,Gi\alpha^3}\Big) + \frac{1}{2} L(U_1) \qquad (2.7)$$

В неоднородной среде в (2.7) добавится член $i\alpha U_1 \dfrac{\partial \ln \Phi}{\partial t}$

3. *Уравнения для амплитуд в задаче стационарной дифракции.* Предположим, что размеры области по y и z имеют порядок $\sqrt{\varepsilon}$, что является типичным для задач дифракции узких пучков, тогда из уравнения (2.2) можно получить $U_0 \sim \varepsilon^3$ и соответствующий член U_0 в уравнении (2.3) можно отбросить. Поскольку задача стационарная и имеет место $\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial t}\right)_\tau = \left(\dfrac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{x_k} + \dfrac{\partial U_1}{\partial \tau_1}$, что следует из $\tau = \tau_1(x_k) - t$, где x_k — исходная система координат, то $\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{x_k} = 0$, причем $\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial t}\right)_\tau = \dfrac{\partial U_1}{\partial \tau_1}$. Для дифракционных задач $\partial^2 U_1/\partial \tau_1^2$ можно отбросить по сравнению с $\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}$, следовательно, уравнение (2.7) примет вид (в дальнейшем индекс при τ опущен)

$$i\alpha \frac{\partial U_1}{\partial \tau}\left(1 - \frac{3}{H_1} E\alpha^2 + \frac{2}{H_1} D\alpha i - \frac{4}{H_1} G\alpha^3 i\right) =$$
$$= \frac{1}{2\,H_1}\,\frac{\Gamma^2\alpha^2 U_1 |U_1|^2 \exp(-2\,\nu\alpha^2 t)}{-4\,D\alpha i + 12\,E\alpha^2 + 28\,G\alpha^3 i} + \frac{1}{2\,\alpha_1}\left[\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_3^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + 2\,\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3}\,\frac{\partial^2 U_1}{\partial y \partial z}\right] \qquad (3.1)$$

Положим

$$U_1 = a e^{i\varphi} \qquad (3.2)$$

где a — амплитуда, φ — фаза.

Рассмотрим плоскую задачу, зависящую от (τ, y), тогда из (3.1) получим для действительной части

$$-a\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\left(1 - \frac{3}{H_1} E\alpha^2\right) - \frac{\partial a}{\partial \tau}\left(\frac{2}{H_1} D\alpha - \frac{4}{H_1} G\alpha^3\right) = \varkappa_1 a^3 +$$
$$+ \frac{1}{2\,\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] \qquad (3.3)$$

а для мнимой —

$$\frac{\partial a}{\partial \tau}\left(1 - \frac{3}{H_1} E\alpha^2\right) - a\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\left(\frac{2}{H_1} D\alpha - \frac{4}{H_1} G\alpha^3\right) = \varkappa_2 a^3 +$$
$$+ \frac{1}{2\,\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}\left[a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] \qquad (3.4)$$

Здесь

$$\varkappa_1 = 3\,E\alpha^2\zeta,\quad \varkappa_2 = (D\alpha - 7\,G\alpha^3)\,\zeta,\quad \zeta = \frac{1}{8}\,\frac{\Gamma^2 \exp(-2\,\nu\alpha^2 t)}{9\,E^2\alpha^2 + (D - 7\,G\alpha^2)^2} \tag{3.5}$$

4. *Поперечная устойчивость плоских нестационарных волн.* Исследуем решение уравнений нестационарного движения (2.2) и (2.7) на устойчивость.

Будем рассматривать типичные задачи дифракции, в которых производные по y и z значительно превосходят производные по t, τ. Тогда $U_0 \sim \varepsilon^3$ и слагаемые U_0 в уравнении (2.7) можно отбросить. При исследовании на поперечную устойчивость производные по τ следует отбросить.

Для простоты рассматриваем плоскую задачу по t, y.

Уравнение (2.7) для амплитуды, записанное в переменных t, y, после отбрасывания членов, содержащих U_0 и производных по τ и после отделения действительной и мнимой частей, примет вид

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,a = \varkappa_1 + \frac{1}{2\,\alpha\alpha_1}\,\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] \tag{4.1}$$

для действительной части,

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \varkappa_2 a^3 + \frac{1}{2\,\alpha\alpha_1}\,\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left[a\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial a}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] \tag{4.2}$$

для мнимой части. Здесь было использовано выражение (3.2) для U_1.

Дадим малые возмущения амплитуде a и фазе φ

$$a = a_0 + a',\quad \varphi = \varphi_0 + \varphi' \tag{4.3}$$

В нестационарной задаче a_0, φ_0 для основного состояния являются функцией t : $a_0 = a_0(t)$, $\varphi_0 = \varphi_0(t)$.

В задаче поперечной устойчивости волн нестационарного движения следует полагать

$$a' = A\exp(i(\omega' t - \beta' y)),\quad \varphi' = \Phi\exp(i(\omega' t - \beta' y)) \tag{4.4}$$

то есть зависимостью от τ пренебрегаем. Здесь A и Φ — амплитуды, которые считаются постоянными величинами, ω' и β' — частота и волновое число возмущенной волны.

Таким образом, рассматриваются поперечные возмущения, распространяющиеся вдоль волны.

Подставляя в уравнения (4.1) и (4.2) значения a и φ из (4.3), получим

$$-\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}\,a_0 = \varkappa_1 a_0^3,\quad \frac{\partial a_0}{\partial t} = \varkappa_2 a_0^3 \qquad (4.5),\ (4.6)$$

$$-\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\,a_0 = 2\,a_0^2 a'\varkappa_1 + \frac{1}{2\,\alpha\alpha_1}\,\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\,\frac{\partial^2 a'}{\partial y^2} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial a'}{\partial t} = 3\,a_0^2\,a'\varkappa_2 + \frac{1}{2\,\alpha\alpha_1}\,\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\,a_0\,\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} \tag{4.8}$$

Подставляя значения возмущенных величин a' и φ' из (4.4) в (4.7) и (4.8), получим систему однородных уравнений для Φ, A, откуда получим

$$\omega' = -i\frac{3a_0^2\varkappa_2}{2} \pm$$

$$\pm\sqrt{-\left(\frac{3a_0^2\varkappa_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}(\beta')^2\left[2a_0^2\varkappa_1 - \frac{1}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}(\beta')^2\right]} \qquad (4.9)$$

Решение устойчиво при $\operatorname{Im}\omega' > 0$. Так как $\varkappa_2 < 0$, при $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} < 0$ знак мнимой части определяется первым членом в правой части выражения (4.9) для ω', и решение устойчиво. Таким образом, для выпуклых волн волна в поперечном направлении устойчива. При $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} > 0$ и $2a_0^2\varkappa_1 - \frac{1}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}(\beta')^2 < 0$, то есть для незначительных амплитуд, решение снова устойчиво. При $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} > 0$ и $2a_0^2\varkappa_1 - \frac{1}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}(\beta')^2 > 0$ решение неустойчиво.

Итак, для вогнутых участков волн решение может быть устойчивым только для небольших амплитуд.

Полученный вывод позволяет сказать, что при распространении волн, выпуклые волны должны дефокусироваться, поскольку они устойчивы в поперечном к волновому вектору направлении. Вогнутые участки медленной магнитозвуковой волны в случае небольших амплитуд будут дефокусироваться, а в случае конечных амплитуд будут фокусироваться. Полученные выводы согласуются с решением для узких пучков, которое приводится ниже.

5. *Решение задачи об узких пучках.* Если считать, что магнитное поле направлено по оси x и указанная ось является осью симметрии пучка, то для осесимметричной задачи уравнения (3.3) и (3.4) запишутся в виде

$$-a\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\left(1-\frac{3}{H_1}E\alpha^2\right) - \frac{\partial a}{\partial\tau}\left(\frac{2}{H_1}D\alpha - \frac{4}{H_1}G\alpha^3\right) =$$

$$= \varkappa_1 a^3 + \frac{1}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial a}{\partial y} - a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] \qquad (5.1)$$

$$\frac{\partial a}{\partial\tau}\left(1-\frac{3}{H_1}E\alpha^2\right) - a\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\left(\frac{2}{H_1}D\alpha - \frac{4}{H_1}G\alpha^3\right) =$$

$$= \varkappa_2 a^3 + \frac{1}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left[a\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{y}a\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] \qquad (5.2)$$

Решение (5.1), (5.2) ищем в виде

$$a = \frac{K}{f}e^{-\frac{y^2}{y_0^2 f^2}}, \quad \varphi = \sigma(\tau) + k\frac{y^2}{2} \qquad (5.3)$$

где $K=\mathrm{const}$, $f=f(\tau)$, $k=k(\tau)$, kH_1/α — кривизна волны, $y_0=\mathrm{const}$ — начальная ширина пучка.

Подставляя (5.3) в (5.1) и (5.2), получим

$$-\left[\varepsilon'(\tau)+k'(\tau)\frac{y^2}{2}\right]=\varkappa_1\frac{K^2}{f^2}\exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2f^2}\right)+\frac{1}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left|-\frac{4}{f^2y_0^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{f^4y_0^4}y^2-k^2y^2\right| \qquad (5.4)$$

$$-\frac{f'}{f}+\frac{2y^2f'}{y_0^2f^3}=\varkappa_2\frac{K^2}{f^2}\exp\left(-2\frac{y^2}{y_0^2f^2}\right)+\frac{1}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left|2k-4\frac{ky^2}{f^2y_0^2}\right| \qquad (5.5)$$

Здесь и далее штрих — производная по τ.

При получении уравнений (5.4) и (5.5) коэффициенты D, E, G предположены малыми по сравнению с единицей и соответствующие члены в левых частях (5.1) и (5.2) отброшены.

Считая, что пучки узкие, то есть $\frac{y}{y_0f}\ll 1$, $\exp\left(-2\frac{y^2}{y_0^2f^2}\right)$ разлагаем по степеням $\frac{y}{y_0f}$ и оставляем первые степени, приравниваем члены порядка единицы и y^2 в (5.4) и (5.5), тогда получим уравнения

$$-\varepsilon'(\tau)=\varkappa_1\frac{K^2}{f^2}-\frac{1}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{4}{y_0^2f^2} \qquad (5.6)$$

$$-\frac{k'(\tau)}{2}=-\varkappa_1\frac{K^2}{f^2}\frac{2}{f^2y_0^2}+\frac{1}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\left[\frac{4}{f^4y_0^2}-k^2\right] \qquad (5.7)$$

$$-\frac{f'}{f}=\varkappa_2\frac{K^2}{f^2}+\frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}k \qquad (5.8)$$

Подставляя значение k из (5.8) в (5.7), получим

$$(f')^2=-\frac{\xi}{f^2}+C \quad \text{или} \quad f'=-\sqrt{C-\frac{\xi}{f^2}} \qquad (5.9)$$

Предполагаем, что начальное условие для f' имеет вид $f'(0)<0$, что может выполняться при $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}k>0$.

Здесь

$$\xi=-\varkappa_2\frac{4}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\frac{K^2}{y_0^2}+\frac{16}{y_0^4}\left(\frac{1}{2\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}\right)^2 \qquad (5.10)$$

При получении (5.9), в силу малости $\varkappa_2$, член, содержащий $\varkappa_2^2$, отброшен. Постоянная интегрирования C определяется из граничных условий:

$$\text{при } \tau=0,\quad f=1,\quad k=\frac{1}{R_0}$$

Здесь $\frac{a}{H_1}R_0$ — начальный радиус кривизны фронта волны.

Из формулы (5.8) имеем, что при $\tau=0$

$$f = -\frac{1}{R_0}\frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} - \varkappa_2 K^2$$

Тогда

$$C = \left(\frac{1}{R_0}\frac{1}{\alpha\alpha_1}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2} + \varkappa_2 K^2\right)^2 + \xi$$

Из выражения (5.9) находим

$$-\tau = \frac{\sqrt{Cf^2-\xi}}{C} = \frac{\sqrt{C-\xi}}{C}$$

Значение τ для фокуса, в котором $f=0$, действительно при $\xi<0$, причем для $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}<0$, $\xi>0$. Таким образом, быстрые магнито-газодинамические волны не самофокусируются, а медленные волны, для которых $\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial\alpha_2^2}>0$, могут фокусироваться.

Согласно (1.40), (1.41) и (1.38) для быстрой волны, в которой $c=a_{*0}$, в коэффициенты D, E, G магнитное поле и микрополярность не входят, а для медленной волны $c=a_1$, $E=\frac{I}{8a_1}$ магнитное поле приводит к фокусированию, причем условие преобладания дисперсии над диссипацией $I\alpha \gg \nu$. Подставляя (5.3) в (5.1) и (5.2) и записывая условие малости диссипативных членов в левых частях, а также условие существенности влияния диссипации в (5.10), получим условия применимости решения $\frac{K\alpha}{E\alpha^2} \gg 1$. При $a_{*0}<a_1$ фокусируется волна $c=a_{*0}$.

Путем прямой подстановки решения (2.1) в исходные уравнения для обычной непроводящей жидкости можно получить уравнения модуляций, которые совпадают с уравнениями, получаемыми из (2.2), (2.7), и тем самым обосновать применимость уравнений коротких волн (1.42) для получения вышеуказанных уравнений.

ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՄԻԿՐՈՊՈԼՅԱՐ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Տրվում է մագնիսական դաշտում գտնվող ոչ սիմետրիկ լարման տենզորով (մոմենտային տեսություն) գազի պղպջակներ պարունակող, էլեկտրահաղորդիչ հեղուկի համար փոքր ինտենսիվության ալիքների շրջակայքում կամայական ոչ գծային թույլ դիսպերսիվ միջավայրի պարամետրերը փոփոխությունը նկարագրող կարճ ալիքների հավասարումների ընդհանուր տեսքի կառուցումը: Ստացված են քվազիմոնոքրոմատիկ ալիքների դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդների և ֆազերի հավասարումները: Տիպիկ դիֆրակցիոն խնդրի համար տրվում է մոդուլյացիայի հավասարումների պարզեցումը, որում որոշիչ են հանդիսանում բուն ալիքի երկարության ածանցյալները: Հետազոտված են ստացված հավասարումների լուծումները կայունության տեսակետից: Լուծված է նեղ փնջերի վերաբերյալ խնդիրը:

THE PROPAGATION OF WAVES IN MICROFOLAR ELECTROCONDUCTING FLUID

A. G. BAGDOEV, L. C. PETROSSIAN

S u m m a r y

The construction of the general form of equations of short waves describing the evolution of parameters of arbitrary nonlinear slowly dissipative medium in the vicinity of waves of small intensity for electroconducting fluid containing gas bubbles with asymmetrical stress tensor (moment theory) in magnetic field is performed. The equations of slow modulating amplitudes and phases of quasimonocromatic waves are obtained. The modulation equations are simplified for typical problem of diffraction in which the determining are the derivatives along the wave. The solution of the obtained equations is investigated on stability. The problem of narrow bundles is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн.— ПММ, 1958, т. 22, № 5, с. 586—599.
2. *Шефтер Г. М.* Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости.— ПММ, 1969, т. 33, № 1, с. 162—168.
3. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов для анизотропной упругой среды. Сб. вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: ЛГУ, 1961, № 5, с. 36—46.
4. *Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я.* Метод пограничного слоя в задачах дифракции.— Л.: ЛГУ, 1974, 124 с.
5. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке.— Журнал Выч. мат. и матем. физики, 1972, т. 12, № 6, с. 1512—1529.
6. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. I. Упрощенные уравнения коротких волн для произвольной нелинейной слабо диссипативной среды.— ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 12, с. 2504—2511.
7. *Багдоев А. Г., Петросян Л. Г.* Уравнения коротких волн для теплопроводящей жидкости с несимметричным тензором напряжений. II. Коэффициенты уравнений коротких волн для теплопроводящей жидкости с моментными напряжениями.— ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 12, с. 2512—2519.
8. *Петросян Л. Г.* К построению модели магнитной гидродинамики несимметричных жидкостей.— ПМ, 1976, т. 12, № 11, с. 103—109.
9. *Petrosjan L. G.* Zur Konstruktion eines Modells der Magnetohydrodynamik asymmetrischen Flüsigkeiten. Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete Mathematics Abstracts, 1978, Band 366, Berlin, Heidelberg, New York, p. 462—464.
10. *Ван Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкости с пузырьками газа.— Реология суспензий (сб. статей). М.: Мир, 1975, с. 68—103.
11. *Jeffrey A., Tanuiti T.* Nonlinaer wave propagation.—New York—London, Acad. Press, 1964, 369 p.
12. *Багдоев А. Г.* Уравнение нелинейной вязкотермомагнитной среды вблизи фронтов волн.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. 27, № 1, с. 63—77.

Институт механики АН Арм.ССР
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
31. V. 1982