

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ  
 ВЯЗКОУПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ И ПОЛОГО ШАРА,  
 ПОДВЕРЖЕННЫХ НЕОДНОРОДНОМУ СТАРЕНИЮ

НАУМОВ В. Э.

Упруго-пластическое напряженно-деформированное состояние цилиндрической трубы и полого шара, находящихся под действием внутреннего давления, исследовалось многими авторами [1]. В [2—6] эти задачи рассматривались с учетом неоднородности распределения механических свойств материала по радиусу трубы или полого шара. В [7] определялись напряжения и перемещения в вязкоупруго-пластическом полом цилиндра. Общие вопросы механического поведения вязкоупруго-пластических нестареющих материалов обсуждались в [8]. Основные уравнения теории вязкоупругости для неоднородно стареющих тел даны в [9, 10].

В настоящей работе рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии вязкоупруго-пластического полого цилиндра и полого шара, материал которых подвержен неоднородному старению.

1. Осесимметричная задача о квазистатическом равновесии под действием внутреннего давления полого цилиндра может быть рассмотрена параллельно с аналогичной сферически симметричной задачей о полом шара. Для этого в основные соотношения, определяющие постановку этих задач, введем параметр  $n$ , который может принимать два значения:  $n = 1$ , что соответствует задаче о полом цилиндра, и  $n = 2$  — в задаче о полом шара. Полый цилиндр и полый шар в дальнейшем именуется одним словом «сосуд».

Будем предполагать, что толстостенная оболочка сосуда изготовлена из изотропного, несжимаемого и подверженного старению материала, механическое поведение которого зависит от уровня напряжений. При напряжениях, удовлетворяющих условию пластичности Мизеса

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - K^2 = 0$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $s_{ij}$  — компоненты тензора и девиатора напряжения соответственно, а  $K$  — предел текучести при чистом сдвиге, поведение материала описывается уравнением теории идеально пластического тела

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}, \quad \lambda = \begin{cases} 0, & f(\sigma_{ij}) < 0 \\ s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p / 2K^2 > 0, & f(\sigma_{ij}) = 0 \end{cases}$$

где  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  — компоненты скорости пластической деформации,  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности в ассоциированном законе течения. При напряжениях, удовлетворяющих неравенству  $f(\sigma_{ij}) < 0$ , поведение материала подчиняется реологическому уравнению линейной теории вязкоупругости

$$\varepsilon_{ij}^v(t) = \frac{s_{ij}(t)}{2G} - \int_{t_0}^t s_{ij}(\tau) Q(t, \tau) d\tau$$

где  $\varepsilon_{ij}^v$  — компоненты вязкоупругой деформации,  $G$  — модуль сдвига,  $Q(t, \tau)$  — ядро ползучести,  $t_0$  — момент приложения нагрузки,  $t$  — текущий момент времени.

Полная деформация в точке тела определяется как сумма вязкоупругой и пластической деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^v + \varepsilon_{ij}^p$$

2. Представим, что сосуд с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$  был изготовлен «послойно», то есть таким образом, что его внешний радиус возрастал во времени по закону  $\rho^*(t)$ . Пусть изготовление сосуда было начато в момент времени  $t = 0$  и окончено в момент времени  $t_*$ , то есть  $\rho^*(0) = a$ ,  $\rho^*(t_*) = b$ . Предположим далее, что в момент времени  $t_0 \geq t_*$  к сосуду было приложено внутреннее давление  $p_0$ , которое в дальнейшем непрерывно изменяется по закону  $p(t)$ ,  $p(t_0) = p_0$ . Внешнее давление принимается равным нулю. Обозначим через  $\tau^*(r)$  момент изготовления (зарождения) элементарного слоя радиуса  $r$ . В частности, будем иметь  $\tau^*(a) = 0$ ,  $\tau^*(b) = t_*$ . Функцию  $\tau^*(r)$ , определяющую скорость и последовательность изготовления сосуда, будем в условиях данной задачи считать непрерывной, монотонной и ограниченной. При этом функции  $\rho^*(t)$  и  $\tau^*(r)$  являются взаимно обратными

$$\rho^*(\tau^*(r)) \equiv r, \quad \tau^*(\rho^*(t)) \equiv t$$

Допустим, что модуль сдвига и предел текучести на сдвиг материала изменяются во времени соответственно по законам

$$G = G(t), \quad K = K(t), \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

Если сосуд был изготовлен за промежуток времени достаточно большой для заметного изменения материальных характеристик, то при решении задачи необходимо учитывать тот факт, что модуль сдвига и предел текучести являются функциями не только времени, но и пространственных координат, то есть стенки сосуда являются неоднородными относительно этих характеристик по толщине. Иначе говоря, величины  $G$  и  $K$  будут изменяться в различных точках стенки сосуда по одному и тому же временному закону (2.1), но с тем или иным запаздыванием, обусловленным различием во времени изготовления отдельных слоев

$$G(t, r) = G(t - \tau^*(r)), \quad K(t, r) = K(t - \tau^*(r))$$

Зависимости такого вида с запаздывающим временным аргументом, характерные для тел, находящихся в условиях специфической возрастной неоднородности, введены в [9, 10] при описании ползучести неоднородно стареющих сред.

Далее допустим, что под действием давления в начальный момент времени  $t_0$  внутренняя часть стенки сосуда перешла в пластическое состояние. Обозначим через  $c$  радиус поверхности, ограничивающей область пластического состояния материала (при  $n = 1$  эта поверхность будет поверхностью кругового цилиндра, при  $n = 2$  — сферой). Очевидно, что этот радиус будет функцией времени  $c = c(t)$ .

Условие пластичности в рассматриваемом случае редуцируется к виду

$$\sigma_{\varphi}(t, r) - \sigma_r(t, r) = \zeta(n) K(t - \tau^*(r))$$

где  $\sigma_{\alpha}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ) — компоненты напряжения, а величина  $\zeta(n)$  определяется следующим образом:

$$\zeta(1) = 2, \quad \zeta(2) = \sqrt{3}$$

Обращение определяющего уравнения вязкоупругого поведения принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha}(t, r) = 2 \left[ G(t - \tau^*(r)) \varepsilon_{\alpha}^0(t, r) - \right. \\ \left. - \int_{t_0}^t \varepsilon_{\alpha}^0(\tau, r) R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) d\tau \right] \end{aligned}$$

где  $R(t, \tau)$  — ядро релаксации.

Предполагается, что материал ни в одной точке тела не переходит из пластического состояния в вязкоупругое, что в рамках данной задачи равносильно условию неубывания радиуса пластической зоны  $dc(t)/dt \geq 0$ . В этом случае полные деформации в зоне вязкоупругости ( $c(t) \leq r \leq b$ ) будут равны вязкоупругим деформациям. В пластической области ( $a \leq r \leq c(t)$ ), ввиду статической определенности задачи, полные деформации определяются из условий на границе раздела пластической и вязкоупругой областей.

3. Запишем основные соотношения, определяющие постановку задачи в области  $a \leq r \leq b$ :  
уравнение равновесия —

$$r \partial \sigma_r(t, r) / \partial r + n [\sigma_r(t, r) - \sigma_{\varphi}(t, r)] = 0 \quad (3.1)$$

условие несжимаемости —

$$\varepsilon_r(t, r) + n \varepsilon_{\varphi}(t, r) = 0 \quad (3.2)$$

соотношения Коши —

$$\varepsilon_r(t, r) = \partial u(t, r) / \partial r, \quad \varepsilon_{\varphi}(t, r) = u(t, r) / r \quad (3.3)$$

в области  $a \leq r \leq c(t)$ :  
условие пластичности —

$$\sigma_{\varphi}(t, r) - \sigma_r(t, r) = \zeta(n) K(t - \tau^*(r)) \quad (3.4)$$

граничное условие —

$$\sigma_r(t, a) = -p(t) \quad (3.5)$$

в области  $c(t) \leq r \leq b$ :  
определяющее уравнение —

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}(t, r) - \sigma_r(t, r) = 2 \{ G(t - \tau^*(r)) [\varepsilon_{\varphi}(t, r) - \varepsilon_r(t, r)] - \\ - \int_{t_0}^t [\varepsilon_{\varphi}(\tau, r) - \varepsilon_r(\tau, r)] R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) d\tau \} \end{aligned} \quad (3.6)$$

граничное условие —

$$\sigma_r(t, b) = 0 \quad (3.7)$$

Кроме того, потребуем выполнения условий непрерывности напряжений на границе раздела вязкоупругой и пластической зон

$$\sigma_r^{(1)}(t, c(t)) = \sigma_r^{(2)}(t, c(t)) \quad (3.8)$$

$$\sigma_{\varphi}^{(1)}(t, c(t)) = \sigma_{\varphi}^{(2)}(t, c(t)) \quad (3.9)$$

В этих соотношениях  $t \geq t_0$ ;  $\varepsilon_a$  — компоненты полной деформации;  $u$  — радиальное перемещение; верхние индексы 1 и 2 означают принадлежность компоненты напряжения зоне пластичности и зоне вязкоупругости соответственно. Заметим, что для полого цилиндра ( $n = 1$ ) постановка задачи предусматривает случай плоской деформации, когда осевая компонента перемещения равна нулю, а осевая компонента напряжения определяется так

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_{\varphi})$$

Интегрируя уравнение несжимаемости (3.2), получим, что перемещение в областях пластического и вязкоупругого поведения материала определяется единым выражением

$$u(t, r) = A(t)/r^n \quad (3.10)$$

где  $A(t)$  — функция времени, подлежащая определению.

4. Напряжения в пластической области ( $a \leq r \leq c(t)$ ) находятся из уравнения равновесия (3.1) и условия пластичности (3.4) с учетом граничного условия (3.5)

$$\sigma_r^{(1)}(t, r) = -p(t) + n\zeta(n)[k(t, r) - k(t, a)] \quad (4.1)$$

$$\sigma_{\varphi}^{(1)}(t, r) = -p(t) + \zeta(n)[K(t - \tau^*(r)) + n(k(t, r) - k(t, a))] \quad (4.2)$$

где

$$k(t, r) \equiv \int r^{-1} K(t - \tau^*(r)) dr$$

Определим напряжения в вязкоупругой области ( $c(t) \leq r \leq b$ ). Подставляя (3.10) в (3.6), затем в (3.1) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(t, r) = & 2n(n+1) \{ A(t) [g(t, r) - g(t, b)] - \\ & - \int_a^t A(\tau) [\rho(t, \tau, r) - \rho(t, \tau, b)] d\tau \} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\tau^{(2)}(t, r) = & 2(n+1) \{ A(t) [r^{-n-1} G(t - \tau^*(r)) + n(g(t, r) - g(t, b))] - \\ & - \int_a^t A(\tau) [r^{-n-1} R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) + n(\rho(t, \tau, r) - \rho(t, \tau, b))] d\tau \} \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} g(t, r) & \equiv \int r^{-n-2} G(t - \tau^*(r)) dr \\ \rho(t, \tau, r) & \equiv \int r^{-n-2} R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) dr \end{aligned}$$

Используя условия непрерывности напряжений (3.8), (3.9), будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & 2(n+1) [c(t)]^{-n-1} \{ A(t) G(t - \theta^*) - \\ & - \int_a^t A(\tau) R(t - \theta^*, \tau - \theta^*) d\tau \} = \tau^*(n) K(t - \theta^*) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & 2n(n+1) \{ A(t) [g(t, b) - g(t, c(t))] - \int_a^t A(\tau) [\rho(t, \tau, b) - \\ & - \rho(t, \tau, c(t))] d\tau \} + n^2(n) [k(t, c(t)) - k(t, a)] = p(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь обозначено  $\theta^* = \tau^*(c(t))$ .

При заданных зависимостях для внутреннего давления  $p(t)$ , упруго-мгновенного модуля сдвига  $G(t)$ , предела текучести  $K(t)$ , ядра релаксации  $R(t, \tau)$  и функции  $\tau^*(r)$ , определяющей скорость и последовательность изготовления сосуда, соотношения (4.5), (4.6) образуют замкнутую систему уравнений для определения двух неизвестных функций  $A(t)$  и  $c(t)$ . Аналитическое решение этой системы может быть получено лишь в некоторых частных случаях. В общем случае для решения системы уравнений (4.5), (4.6) могут быть использованы численные методы, например,

метод, основанный на дискретизации по времени, после чего радиус пластической зоны на каждом временном шаге определяется из решения некоторого трансцендентного уравнения. Ядро релаксации при этом, следуя [11], можно принять в виде

$$R(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} [G(\tau) - \varphi(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})] \quad (4.7)$$

где  $\varphi(\tau)$  — функция старения [12],  $\gamma$  — некоторая константа.

Если в (4.5), (4.6) положить  $c(t) = c = \text{const}$  ( $a \leq c \leq b$ ), то из этих уравнений с учетом (4.7) легко получить выражение для давления  $p_c(t)$ , при действии которого радиус пластической зоны не изменяет во времени своего значения. Действительно, пользуясь соотношением (4.7) и дифференцируя (4.5) по  $t$ , после некоторых преобразований получим задачу Коши для определения функции  $A(t)$

$$A''(t)G(t - \tau^*(c)) + A'(t)[G'(t - \tau^*(c)) + \gamma G(t - \tau^*(c)) - \gamma \varphi(t - \tau^*(c))] = m[\gamma K'(t - \tau^*(c)) + K''(t - \tau^*(c))]$$

$$A(t_0) = mK(t_0 - \tau^*(c))/G(t_0 - \tau^*(c))$$

$$A'(t_0) = m[\gamma \varphi(t_0 - \tau^*(c))K(t_0 - \tau^*(c))/G(t_0 - \tau^*(c)) + K'(t_0 - \tau^*(c))]$$

где штрих означает дифференцирование по  $t$  и для краткости введено обозначение

$$m = \frac{1}{2} c^{n+1} \zeta(n)(n+1)^{-1}$$

Решение этой задачи есть

$$A(t) = A(t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ A'(t_0) \gamma(t_0) + \int_{t_0}^0 H(\tau) \gamma(\tau) d\tau \right\} \frac{d\theta}{\tau(\theta)} \quad (4.8)$$

где введены обозначения

$$H(s) = m[\gamma K'(s - \tau^*(c)) + K''(s - \tau^*(c))]/G(s - \tau^*(c))$$

$$\gamma(s) = \exp \left\{ \int [\gamma + (G'(s - \tau^*(c)) - \gamma \varphi(s - \tau^*(c)))/G(s - \tau^*(c))] ds \right\}$$

Подставляя (4.8) в (4.6), где нужно положить  $c(t) = c = \text{const}$ , получим явное выражение для  $p_c(t)$ , которое из-за его громоздкости здесь не приводится. Представляет интерес выражение для давления  $p_*(t)$ , под действием которого сосуд находится в условиях начала образования пластической зоны. Для его определения достаточно положить  $c = a$  в выражении для  $p_c(t)$ . Величина минимального давления  $p^*$ , которое в момент приложения обуславливает переход оболочки сосуда в чисто пластическое состояние, определяется из уравнения (4.6) при  $t = t_0$  и  $c(t_0) = b$

$$p^* = n \zeta(n) [k(t_0, b) - k(t_0, a)]$$

Заметим, что сделанное предположение о том, что пластическая область начинает развиваться с внутренней части стенки сосуда, налагает определенные ограничения на зависимости  $G(t)$ ,  $K(t)$ ,  $\tau^*(r)$ . Действительно, достаточным условием этого будет монотонное убывание по радиусу при каждом  $t$  функции

$$\omega(t, r) = [J_2(t, r)]^{1/2} / K(t - \tau^*(r))$$

где  $J_2$  — второй инвариант девиатора вязкоупругих напряжений. Таким образом, выше рассмотрен случай, когда при  $t \geq t_0$ ,  $a \leq c(t) \leq r \leq b$  выполняется неравенство  $\partial \omega(t, r) / \partial r < 0$ . В случае, когда  $\partial \omega(t, r) / \partial r > 0$ , может произойти образование пластической зоны на части стенки сосуда, примыкающей к внешней свободной от нагрузки поверхности. Когда  $\partial \omega(t, r) / \partial r = 0$ , стенка сосуда может перейти в пластическое состояние только по всей толщине сразу.

Соотношения, определяющие решение задачи, сохраняют силу и для случая монотонно убывающей функции  $\tau^*(r)$ , что соответствует последовательному изготовлению сосуда, начиная от внешних поверхностных слоев и кончая внутренней граничной поверхностью.

При постоянных  $G(\tau)$ ,  $K(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  соотношения (4.1)—(4.7) дают, в качестве частного случая, решение задачи для вязкоупруго-пластического нестареющего материала. При этом в момент приложения нагрузки имеем решение классической упруго-пластической задачи о напряженно-деформированном состоянии однородного сосуда, изготовленного из несжимаемого материала.

5. При проведении численных расчетов для модулей  $G$  и  $K$  примем зависимости

$$G(t) = G_\infty (1 - \beta e^{-\alpha t}) \quad (5.1)$$

$$K(t) = K_\infty (1 - \xi e^{-\mu t}) \quad (5.2)$$

которые отражают «затвердевание» материала с увеличением его возраста ( $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\xi$ ,  $\mu$  — положительные константы).

Зависимость (5.1), предложенная в [12] для модуля упруго-мгновенной деформации стареющих материалов, и зависимость (5.2) для напряжения течения качественно описывают изменение этих механических характеристик в зависимости от времени физического старения для широкого класса полимерных материалов. В частности, для акриловых волокон зависимость (5.1) экспериментально подтверждена в [13]. Данные об изменении напряжения течения с возрастом для твердого поливинилхлорида приведены в [14].

Далее, функцию старения определим следующим образом:

$$\varphi(\tau) = G(0) (\psi + \chi e^{-\kappa \tau})$$

где  $\psi$ ,  $\chi$ ,  $\kappa$  — константы, определяемые из опытных данных по ползучести стареющего материала.

Ограничимся случаем, когда функция  $\tau^*(r)$  является линейной и задается одним из выражений

$$\tau^*(r) = t_* (r - a)/(b - a) \quad (5.3)$$

$$\tau^*(r) = t_* (b - r)/(b - a) \quad (5.4)$$

Выражение (5.3) соответствует увеличению радиуса сосуда с постоянной скоростью от величины  $a$  до величины  $b$  за промежуток времени  $t_*$ . Задание функции  $\tau^*(r)$  в виде (5.4) соответствует изменению радиуса сосуда от величины  $b$  до  $a$  в процессе изготовления.

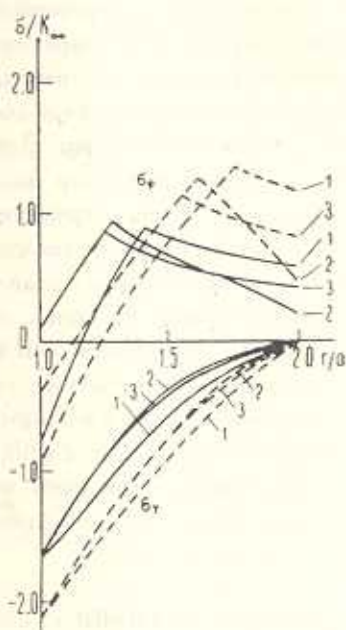
Наконец, для внутреннего давления примем выражение

$$p(t) = p_0 + q(t - t_0) \quad (5.5)$$

При расчетах величины, имеющие размерность длины и давления, отнесены к внутреннему радиусу сосуда  $a$  и предельному значению напряжения течения  $K_\infty$ , соответственно.

Расчеты по формулам (4.1)–(4.6) были проведены для полого шара ( $n = 2$ ) при следующих значениях констант:  $t_* = t_0 = 100$  час;  $b = 2$ ;  $G_\infty = 100$ ;  $p_0 = 1,6458$ ;  $\Psi = 0,05$ ;  $q = \alpha = \mu = \kappa = 0,05$  час<sup>-1</sup>;  $\gamma = 0,1$  час<sup>-1</sup>.

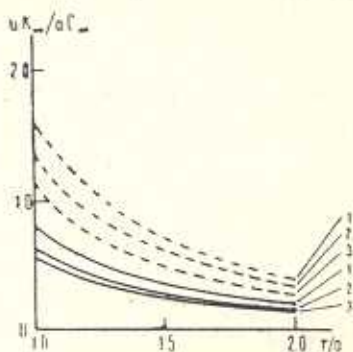
На фиг. 1 приведены эпюры напряжений для трех характерных случаев нагружения полого шара внутренним давлением, изменяющимся во времени по одному и тому же закону (5.5). Цифрой 1 обозначены эпюры для случая, когда  $\tau^*(r)$  определяется выражением (5.4), а  $G(t) = G_\infty = \text{const}$  ( $\xi = 0,5$ ;  $\beta = 0$ ;  $\lambda = 0,45$ ). Цифрой 2 отмечены эпюры, когда  $\tau^*(r)$  задается выражением (5.3), а  $K(t) = K_\infty = \text{const}$  ( $\xi = 0$ ;  $\beta = 0,5$ ;  $\lambda = 0,45$ ). Наконец, для сопоставления приведены эпюры, отмеченные цифрой 3, для полого шара, изготовленного из нестареющего материала с предельными значениями модулей  $G_\infty$  и  $K_\infty$  ( $\xi = \beta = \lambda = 0$ ). При этом сплошные кривые линии относятся к мгновенному упруго-пластическому состоянию, возникающему в момент приложения нагрузки, а штриховые — к моменту спустя 10 часов после приложения нагрузки. На фиг. 2 приведены соответствующие эпюры перемещений. Принцип маркировки линий тот же, что и на фиг. 1. На фиг. 3 приведены графики, показывающие изменение со временем радиуса пластической зоны для трех названных выше случаев. Как видно из фиг. 1, неоднородность стенки сферического сосуда



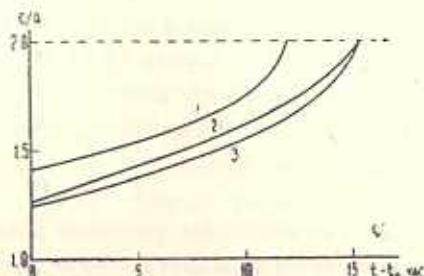
Фиг. 1. Распределение по толщине стенки полого шара окружного (вверху) и радиального (внизу) напряжений



да относительно предела текучести особенно сильно сказывается, когда внутренняя часть стенки заполнена наиболее «молодым» материалом, то есть когда предел текучести в этой части стенки еще не достиг своего предельного возрастного значения, которое при расчете иллюстративного примера взято в два раза большим исходного значения в момент зарождения. Из



Фиг. 2. Распределение радиального перемещения по радиусу полого шара



Фиг. 3. Распространение радиуса пластической области

сравнения эпюр 1 и 3 в начальный момент времени (сплошные кривые) видно, что окружное напряжение на внутренней полости по сравнению со случаем однородного нестарееющего материала изменяет знак, а по абсолютной величине возрастает в несколько раз. Максимальное отличие радиального напряжения в этом случае составляет несколько более 30%. Из сопоставления кривых 1 и 3 на фиг. 2 и 3 следует, что учет неоднородности распределения предела текучести по радиусу полого шара приводит к увеличению в начальный момент времени и последующему ускоренному росту радиуса пластической зоны, а также к существенному увеличению перемещений. Если, наоборот, шар изготавливался «изнутри», то есть вблизи полости находится «старый» материал, то существенное влияние на напряженно-деформированное состояние в зоне вязкоупругости оказывает неоднородность распределения в стенке полого шара вязкоупругих характеристик материала. Из сравнения эпюр 2 и 3 при  $t = 10$  часов (штриховые линии) следует, что окружные напряжения в этих двух случаях в вязкоупругой зоне существенно различаются. При учете неоднородности на границе пластической зоны оно больше, чем в однородном случае, а на внешней поверхности почти в два раза меньше.

ԱՆՀԱՄՄԱՍԵՌԻ ԾԵՐԱՑՄԱՆ ԵՆԹԱՐԿՎԱՅ ԱՌԱՉԳԱՄԱՌՈՒՅԻՎ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ԵՎ ՍՆԱՄԵՋ ԳԵԴԻ ԼԱՐՎԱՍԱՅԻՆ-ԳԵՅՈՐԲՄԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Է. ՆԱՌԻՄՈՎ

Ա. Վ. Փ. Ո. Փ. Ո. Վ. Մ.

Աշխատանքում որոշված է հավասարաչափ բաշխման ներքին ճնշման ազդեցությամբ հատուկ «հասակային» անհամասեռության պայմաններում

զանվող սնամեջ գլանի պատի մեջ լարումների և տեղափոխումների պաշարը նյութը, որից պատրաստված է սնամեջ գլանը, համարվում է իզոտրոպ, անսեղմելի և ենթակա է ձերացման, որի մեխանիկական վարքը նկարագրվում է անհամասեռ ձերացող միջավայրի առաձգամածուցիկ-պլաստիկության տեսության սեղմողիկան հավասարումներով: Զուգահեռ դիտարկված է սնամեջ գնդի անալոգ խնդիրը: Խնդիրը բերված է պլաստիկական գոտու փոփոխական շտոպիկի և ժամանակից ինչ որ օժանդակ ֆունկցիայի նկատմամբ երկու ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Մնամեջ գնդի խնդրի համար բերված են թվային հետազոտությունների արդյունքներ:

## ON THE STRESS-STRAIN STATE IN A VISCOELASTIC-PLASTIC TUBE AND A HOLLOW BALL SUBJECTED TO NONHOMOGENEOUS AGEING

V. E. NAUMOV

### S u m m a r y

The stresses and displacements in the wall of a cylindrical tube subjected to a uniformly distributed internal pressure under conditions of specific age-nhomogeneity are obtained in this paper. An isotropic, incompressible and aging material is considered. The mechanical behavior of the material is described by constitutive equations of the theory of viscoelastic-plastic nonhomogeneously aging solids. Simultaneously a similar problem for a hollow ball is considered. The problem is reduced to the solution of a system of two integral equations for time-dependent radius of plastic area and auxiliary time function. The results of a numerical investigation are given.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Соболевский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. Илюшин А. А., Огибалов П. М. Упруго-пластические деформации полых цилиндров. М.: Изд-во МГУ, 1960. 227 с.
3. Olszak W., Urbanowski W. Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej.— Arch. mech. stos., 1955, v. 7, No. 3, pp. 315—336.
4. Olszak W., Urbanowski W. Sprężysto-plastyczna grubościenna powłoka kulista z materiału niejednorodnego, poddana działaniu ciśnienia wewnętrznego i zewnętrznego.— Rozpr. inż., 1956, v. 4, No. 1, pp. 23—41.
5. Задоян М. А. Распространение пластической зоны в неоднородной трубе при динамическом воздействии давления.— Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. н., 1960, т. 13, № 3, с. 89—95.
6. Makhopadhyay J. Effect of non-homogeneity on yield stress in a thick-walled cylindrical tube under pressure.— Lett. Appl. and Eng. Sci., 1982, v. 20, No. 8, pp. 963—968.

7. *Shtnozuka M.* Stresses in a incompressible viscoelastic-plastic thick-walled cylinder.—*AIAA Journal*, 1964, v. 2, No. 10, pp. 1800—1804.
8. *Naghdi P. M., Murch S. A.* On the mechanical behavior of viscoelastic-plastic solids.—*Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 1963, v. 30, No. 3, pp. 321—328.
9. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.—*Изв. АН СССР, МТТ*, 1976, № 3, с. 153—164.
10. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.—*ПММ*, 1977, т. 41, вып. 5, с. 783—789.
11. *Арутюнян Н. Х., Меглов В. В.* Некоторые задачи теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению.—*Изв. АН АрмССР, Механика*, 1982, т. 35, № 3, с. 13—30.
12. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: Гостехиздат, 1952. 323 с.
13. *Takaku A., Kobayashi T., Terui S., Okui N., Shimizu J.* Changes of tensile modulus and contractive stress of acrylic fibres during thermal stabilisation for carbon fibre production.—*Fibre Sci. and Technol.*, 1981, v. 15, No. 2, pp. 87—98.
14. *Struik L. C. E.* Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam: Elsevier, 1978. 229 p.

Институт проблем механики АН СССР

Поступила в редакцию  
30. VII. 1982