

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХ РАЗНОРОДНЫХ  
ПЛАСТИН В ПРОЦЕССЕ ИХ СОЕДИНЕНИЯ ДВИЖУЩИМСЯ  
ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

САРГСЯН А. М.

Изучение напряженно-деформированного состояния в процессе и после соединения однородных и разнородных материалов (сварка, пайка, склеивание) необходимо для обеспечения заданной точности изготовления и прочности неразъемных соединений как в процессе соединения, так и после приложения эксплуатационных нагрузок [1].

Многие вопросы термоупругости и термопластичности в процессе соединения однородных материалов изучены достаточно хорошо [1, 2, 3].

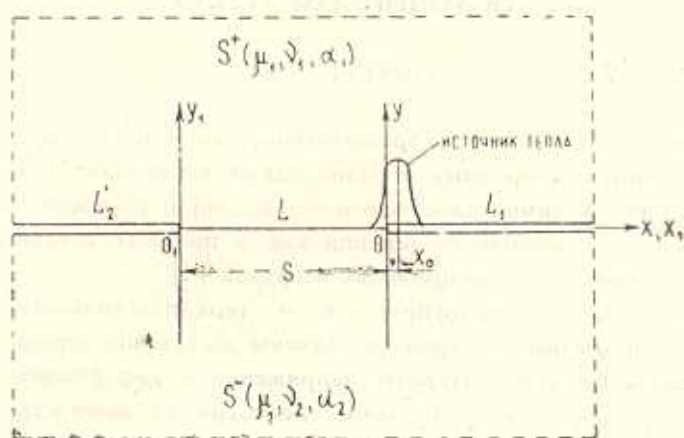
Исследованию температурных напряжений и деформаций в процессе соединения разнородных материалов, несмотря на важность, посвящено очень мало работ. В работах [2, 4], относящихся к сварке разнородных металлов, рассмотрены осесимметричные задачи термопластичности для составных оболочек (труб) в предположении одновременного выполнения сварного шва. Установлено, что в некоторых таких соединениях напряженное состояние после сварки существенно отличается от соответствующего состояния соединений однородных металлов и что разнородность часто играет основную роль в образовании остаточных напряжений.

В работе [5] при изучении остаточных напряжений в составной бесконечной пластине предполагалось, что в процессе соединения разнородные пластины поддерживались при одинаковой постоянной температуре. В линейной термоупругой постановке определены остаточные напряжения, возникающие вследствие разницы между рабочей температурой и температурой соединения.

В настоящей работе в рамках линейной несвязанной термоупругости рассматривается квазистатическая задача о соединении встык двух тонких разнородных полубесконечных пластин движущимся источником тепла.

Пусть две пластины с термоупругими характеристиками  $\nu_j, \nu_j, \alpha_j$  ( $j = 1, 2$ ) занимают соответственно верхнюю и нижнюю полуплоскости  $S^+$  и  $S^-$  (фиг. 1), где  $\nu_j$  — модуль сдвига,  $\nu_j$  и  $\alpha_j$  — коэффициенты Пуассона и линейного теплового расширения соединяемых материалов. Пусть, далее, источник тепла постоянной мощности  $q$  движется со скоростью  $v$  вдоль границы раздела соединяемых пластин. За источником тепла, начиная с некоторой точки границы раздела, координаты которой по отношению к движущемуся источнику тепла определяются физико-механическими свойствами пластин, температурным полем и другими факторами, меж-

ду пластинами по мере движения источника тепла возникает увеличивающийся по закону  $s = vt$  ( $\tau$  — время соединения) участок полного механического контакта  $L$ . Соединение происходит при некоторой разнице продольных деформаций границ пластин, зависящей от параметров задачи и определяемой в ходе ее решения. Остальная часть границы раздела представляется в виде свободных от внешнего воздействия трещин  $L' = L'_1 + L'_2$ .



Фиг. 1

В действительности, в зависимости от физико-механических свойств пластины, способа соединения (сварка, пайка, склеивание) в некоторой окрестности зоны соединения в той или иной мере проявляются свойства пластичности и ползучести. В принятой модели влияние этих свойств на процесс соединения учитывается положением точки соединения относительно источника тепла и условием для определения разницы продольных деформаций.

Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной пластины с двумя полубесконечными трещинами  $L' = L'_1 + L'_2$  вдоль границы раздела при заранее неизвестной разнице продольных деформаций на участке контакта  $L$ .

Граничные условия задачи в подвижной системе координат  $xOy$  можно сформулировать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{y1}^*(x, 0) = \sigma_{y2}^*(x, 0), \quad \tau_{xy1}^*(x, 0) = \tau_{xy2}^*(x, 0) \quad \text{на } L \\ u_1^*(x, 0) = u_2^*(x, 0) + F(x), \quad v_1^*(x, 0) = v_2^*(x, 0) \quad \text{на } L \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{yj}^*(x, 0) = \tau_{xyj}^*(x, 0) = 0 \quad \text{на } L' \quad (1.2)$$

где  $F(x)$  — неизвестная пока функция, определяющая разность продольных смещений на участке  $L$ .

Решение задачи выражается через функции напряжений  $\Phi_j^*$ , которые в соответствующих областях удовлетворяют уравнению [6]

$$\Delta \Delta \Phi_j^* = -\alpha_j E_j \Delta T_j \quad (1.3)$$

где  $\Phi_j^* = U_j - 2\nu_j V_j$ ,  $U_j$  — бигармонические функции, а  $V_j$  — термоупругие потенциалы перемещений, являющиеся частным решением уравнения

$$\Delta V_j = \alpha_j (1 + \nu_j) T_j \quad (1.4)$$

где  $T_j$  — разность температур пластин и среды.

Выражения компонентов напряжений и перемещений через функции  $\Phi_j^*$  имеют вид

$$\varepsilon_{xj}^* = \frac{\partial^2 \Phi_j^*}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{yj}^* = \frac{\partial^2 \Phi_j^*}{\partial x^2}, \quad -\varepsilon_{xyj}^* = \frac{\partial^2 \Phi_j^*}{\partial x \partial y} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} u_j^* &= \frac{1}{E_j} \int \frac{\partial^2 \Phi_j^*}{\partial y^2} dx - \frac{\nu_j}{E_j} \frac{\partial \Phi_j^*}{\partial x} + \alpha_j \int T_j dx \\ v_j^* &= \frac{1}{E_j} \int \frac{\partial^2 \Phi_j^*}{\partial x^2} dy - \frac{\nu_j}{E_j} \frac{\partial \Phi_j^*}{\partial y} + \alpha_j \int T_j dy \end{aligned} \quad (1.6)$$

Температурное поле от движущегося распределенного источника тепла в системе координат  $xOy$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta T_j + p_j \frac{\partial T_j}{\partial x} - m_j^2 T_j = 0 \quad (1.7)$$

При идеальном тепловом контакте на границе раздела  $y = 0$

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{q}{h} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \exp(-k(x - x_0)^2) \quad (1.8)$$

Исчезающее на бесконечности температурное поле определяется формулой [7]

$$T_j = \frac{q}{2\pi h \lambda_1} \int_{-\infty}^{\infty} C(u) \exp(-|y| k_j(u)) \exp(-iux) du \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} C(u) &= \frac{\exp(-u^2/4k)}{k_1(u) + ik_2(u)} \exp(iux_0), \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\ k_j(u) &= \sqrt{u^2 + iup_j + m_j^2}, \quad \text{Re } k_j(u) > 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $p_j = \nu_j \alpha_j$ ,  $\lambda_j$ ,  $\alpha_j$  — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности,  $k$  — коэффициент сосредоточенности теплового потока источника тепла,  $h$  — толщина пластин,  $x_0$  — смещение центра распределения источника от начала подвижной системы координат,  $m_j^2 = 2\beta_j/h\lambda_j$ ,  $\beta_j$  — коэффициент теплоотдачи.

При других тепловых условиях на границе раздела выражение для  $C(u)$  принимает другой вид [8, 9].

Если частное решение уравнения (1.4) искать в виде

$$V_j = \int_{-\infty}^{\infty} C_j(u) \exp(-|y|k_l(u)) \exp(-iux) du \quad (1.11)$$

то для  $C_j(u)$  получается следующее выражение:

$$C_j(u) = \frac{q\alpha_j(1+\nu_j)}{2\pi h\lambda_1} \frac{C(u)}{m_j^2 + iup_j} \quad (1.12)$$

С целью приведения рассматриваемой задачи термоупругости к первой основной задаче плоской теории упругости представим функции  $U_j$  в виде разности двух бигармонических функций

$$U_j = H_j - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2} [A_j(u) + yB_j(u)] \exp(-|y||u|) \exp(-iux) du \quad (1.13)$$

где  $A_j(u)$  и  $B_j(u)$  — неизвестные функции,

$$\Delta\Delta H_j = 0 \quad (1.14)$$

Из требования удовлетворения функции  $H_j$  граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1}{E_1} \int \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} dx - \frac{\nu_1}{E_1} \frac{\partial H_1}{\partial x} &= \frac{1}{E_2} \int \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} dx - \frac{\nu_2}{E_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} + F(x) \quad (1.15) \\ \frac{1}{E_1} \int \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} dy - \frac{\nu_1}{E_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} &= \frac{1}{E_2} \int \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} dy - \frac{\nu_2}{E_2} \frac{\partial H_2}{\partial y} \end{aligned}$$

на  $L$  для определения неизвестных функций  $A_j(u)$  и  $B_j(u)$  с помощью (1.1), (1.3), (1.5), (1.6), (1.13) получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_1(u) - A_2(u) &= \frac{qC(u)}{2\pi h\lambda_1} \left[ \frac{\alpha_2 E_2}{m_2^2 + iup_2} - \frac{\alpha_1 E_1}{m_1^2 + iup_1} \right] u^2 \\ -|u|A_1(u) + B_1(u) - |u|A_2(u) - B_2(u) &= \\ &= \frac{qC(u)}{2\pi h\lambda_1} \left[ \frac{\alpha_2 E_2 k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} + \frac{\alpha_1 E_1 k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} \right] u^2 \quad (1.16) \\ -\frac{1+\nu_1}{E_1} u^2 A_1(u) + \frac{2}{E_1} |u| B_1(u) + \frac{1+\nu_2}{E_2} u^2 A_2(u) + \frac{2}{E_2} |u| B_2(u) &= \\ &= -\frac{qC(u)}{2\pi h\lambda_1} \left[ \frac{\alpha_2(1+\nu_2)}{m_2^2 + iup_2} - \frac{\alpha_1(1+\nu_1)}{m_1^2 + iup_1} \right] u^4 \end{aligned}$$

$$\frac{1+\nu_1}{E_1}|u|A_1(u) + \frac{1-\nu_1}{E_1}B_1(u) + \frac{1+\nu_2}{E_2}|u|A_2(u) - \frac{1-\nu_2}{E_2}B_2(u) =$$

$$= -\frac{qC(u)}{2\pi h\lambda_1} \left[ \frac{\alpha_2(1+\nu_2)k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} + \frac{\alpha_1(1+\nu_1)k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} \right] u^2$$

Решение этой системы имеет вид

$$A_1(u) = \frac{qC(u)}{2\pi h\lambda_1} \left[ \mu_{12}\alpha_1 \frac{(2-d_2)u^2 - 2|u|k_2(u)}{m_1^2 + iup_1} + \right.$$

$$\left. + 2\mu_{21}\alpha_2 \frac{u^2 - |u|k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} \right] \quad (1.17)$$

$$A_2(u) = A_1(u) - \frac{qC(u)}{2\pi h\lambda_1} \left[ \frac{\alpha_2 E_2}{m_2^2 + iup_2} - \frac{\alpha_1 E_1}{m_1^2 + iup_1} \right] u^2$$

$$B_1(u) = \frac{qC(u)}{2\pi h\lambda_1} \mu_{12}\alpha_1 (4-d_2) \frac{|u| - k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} u^2$$

$$B_2(u) = \frac{qC(u)}{2\pi h\lambda_1} \frac{\mu_{12}\alpha_2 E_2}{E_1(4-d_2)^{-1}} \frac{|u| - k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} u^2$$

где

$$\mu_{12} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2\nu_1}, \quad \mu_{21} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_2 + \mu_1\nu_2}, \quad \nu_j = \frac{3-\nu_j}{1+\nu_j}, \quad d_2 = \frac{E_1}{\mu_{12}} \quad (1.18)$$

Граничные условия (1.2) с учетом (1.13) принимают вид

$$\frac{\partial^2 H_j}{\partial x^2} = \frac{q\mu_{12}\alpha_1}{\pi h\lambda_1} p(x), \quad \frac{\partial^2 H_j}{\partial x \partial y} = \frac{q\mu_{21}\alpha_2}{\pi h\lambda_1} q(x) \quad \text{на } L' \quad (1.19)$$

где

$$p(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} C(u) \left[ \mu_* \frac{|u| - k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} + \alpha \frac{|u| - k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} \right] |u| \exp(-iux) du$$

$$q(x) = -i \int_{-\infty}^{\infty} C(u) \left[ \mu_* \frac{|u| - k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} + \alpha \frac{|u| - k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} \right] u \exp(-iux) du \quad (1.20)$$

$$\mu_* = \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}} = \frac{\mu_2 + \mu_1\nu_2}{\mu_1 + \mu_2\nu_1}, \quad \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Таким образом, нахождение функций напряжения  $\Phi_j^*$  для рассматриваемой задачи термоупругости приведено к определению функций напряжения  $H_j$ , соответствующей первой основной задаче плоской теории упругости, которые определяются из (1.14), (1.15) и (1.19). Несколько задач такого типа были рассмотрены Вильямсом [10], Черепановым [11], Эрдоганом [4, 12] и другими авторами.

Краевая задача (1.14), (1.15) и (1.19) решается методом Колосова-Мусхелишвили. Напряжения и перемещения записываются через комплексные функции напряжений в виде [13]

$$\begin{aligned}\sigma_{xj} + \sigma_{yj} &= 4 \operatorname{Re} \Phi_j(z) \\ \sigma_{yj} - i\tau_{xyj} &= \Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)} + z\overline{\Phi_j'(z)} + \overline{\Psi_j(z)} \\ 2\mu_j(u_j + iv_j) &= x_j\varphi_j(z) - z\overline{\varphi_j'(z)} - \overline{\psi_j(z)} \\ \Phi_j(z) &= \varphi_j'(z), \quad \Psi_j(z) = \psi_j'(z)\end{aligned}\quad (1.21)$$

В уравнениях (1.21) голоморфные функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  определены в  $S^+$ , а  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  в  $S^-$ . При аналитическом продолжении  $\Phi_1(z)$  в  $S^-$ , а  $\Phi_2(z)$  в  $S^+$  через ненагруженные части границы можно положить [13]

$$\Psi_j(z) = -\Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - z\overline{\Phi_j'(z)} \quad (1.22)$$

Из уравнений (1.21) и (1.22) можно теперь получить

$$\sigma_{yj} - i\tau_{xyj} = \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)} \quad (1.23)$$

$$2\mu_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} + i \frac{\partial v_j}{\partial x} \right) = x_j \Phi_j(z) + \Phi_j(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)} \quad (1.24)$$

Граничные условия (1.15) и (1.19) запишутся в виде

$$\sigma_{y1}^- - i\tau_{xy1}^+ = \sigma_{y2}^- - i\tau_{xy2}^- \quad \text{на } L + L' \quad (1.25)$$

$$\sigma_{y1}^+ - i\tau_{xy1}^- = \sigma_{y2}^- - i\tau_{xy2}^- = \frac{q_1^+ \lambda_1 \alpha_1}{\pi h \lambda_1} [p(x) - iq(x)] \quad \text{на } L' \quad (1.26)$$

$$u_1^+ + iv_1^+ = u_2^- + iv_2^- + F(x) + i\omega x \quad \text{на } L \quad (1.27)$$

где  $\omega$  — неизвестный параметр, соответствующий жесткому повороту на бесконечности.

На основании (1.23) и (1.25) на всей действительной оси можно записать

$$\Phi_1^+(x) + \Phi_2^+(x) = \Phi_1^-(x) + \Phi_2^-(x) \quad \text{на } L + L' \quad (1.28)$$

Уравнение (1.28) показывает, что функция  $\Phi_1(z) + \Phi_2(z)$  голоморфна во всей плоскости, включая действительную ось. Так как напряжения исчезают на бесконечности, то при больших значениях  $|z|$  получается

$$\Phi_j(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (1.29)$$

Из уравнения (1.29) видно, что функции  $\Phi_j(z)$  исчезают на бесконечности, поэтому во всей плоскости

$$\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = 0 \quad (1.30)$$

Дифференцируя уравнение (1.27) и используя (1.24), можно получить

$$\frac{x_1}{2\mu_1} \Phi_1^+(x) + \frac{1}{2\mu_1} \Phi_1^-(x) = \frac{x_2}{2\mu_2} \Phi_2^-(x) + \frac{1}{2\mu_2} \Phi_2^+(x) + f(x) + i\omega \text{ на } L \quad (1.31)$$

где  $f(x) = F'(x)$ . (1.32)

Условие (1.26) на основании (1.28) принимает следующий вид:

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = \frac{q\mu_{21}^2\alpha_1}{\pi h\lambda_1} [p(x) - iq(x)] \text{ на } L' \quad (1.33)$$

С помощью уравнения (1.30) условия (1.31) и (1.33) запишутся в виде

$$\Phi_1^+(x) + \mu_* \Phi_1^-(x) = \mu_{12} [f(x) + i\omega] \text{ на } L \quad (1.34)$$

$$\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = \frac{q\mu_{21}^2\alpha_1}{\pi h\lambda_1} [p(x) - iq(x)] \text{ на } L'$$

Следовательно, задача сводится к решению неоднородной задачи Гильберта, которая подробно рассмотрена в [13].

Общее решение задачи (1.34) имеет следующий вид:

$$\frac{\Phi_1(z)}{X_0(z)} = \frac{\mu_{12}}{2\pi i} \int_L \frac{f(x) + i\omega}{X_0^+(x)(x-z)} dx + \frac{q\mu_{21}^2\alpha_1}{2\pi^2 h\lambda_1 i} \int_{L'} \frac{p(x) - iq(x)}{X_0^+(x)(x-z)} dx \quad (1.35)$$

где

$$X_0(z) = \frac{1}{V} \frac{z+s}{z(z+s)} \left( \frac{z+s}{z} \right)^{i\gamma}, \quad 2\pi\gamma = \ln \mu_* \quad (1.36)$$

Параметр  $\omega$  определяется из условия равенства нулю моментов всех сил, приложенных к границе одной из пластин, относительно начала координат

$$\begin{aligned} \int_L \sigma_{yj}^*(x, 0) x dx &= \int_L \left[ \frac{1 + \mu_*}{\mu_*} \operatorname{Re} \Phi_1^+(x) - \mu_{21} f(x) \right] x dx = \\ &= - \frac{q\mu_{21}^2\alpha_1}{\pi h\lambda_1} \int_{L'} p(x) x dx \end{aligned} \quad (1.37)$$

Условие для определения  $f(x)$  можно получить, исходя из следующих соображений. Разность продольных деформаций, при которой происходит соединение, зависит от теплофизических и упругих свойств соединяемых материалов, напряженно-деформированного состояния всей системы, от процессов, происходящих в некотором участке в зоне соединения, где имеет место неполный механический контакт и т. д. В самом общем случае эту

разность можно представить в виде функционала, зависящего от упомянутых свойств и параметров

$$f(0) = \int_{S^+ + S^-} \Omega(\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*, T_j, E_j, \nu_j, \dots) dx dy \quad (1.38)$$

Таким образом, при известном виде функции  $\Omega$  система уравнений (1.21), (1.35)–(1.38) полностью определяет напряженно-деформированное состояние составной пластины.

$$\begin{aligned} \sigma_{xj}^* &= \sigma_{xj} - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [(-1)^j 2|u| B_j(u) - u^2 \langle A_j(u) + y B_j(u) \rangle] \times \right. \\ &\times \frac{\exp(-|y||u|)}{u^2} + \frac{q x_j E_j}{2\pi h \lambda_1} \frac{C(u) k_j(u)}{m_j^2 + i u p_j} \exp(-|y| k_j(u)) \left. \right\} \exp(-i u x) du \\ \tau_{xyj}^* &= \tau_{xyj} - i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [B_j(u) + (-1)^j |u| \langle A_j(u) + y B_j(u) \rangle] \times \right. \\ &\times \frac{\exp(-|y||u|)}{u} + (-1)^j \frac{q x_j E_j}{2\pi h \lambda_1} \frac{C(u) u k_j(u)}{m_j^2 + i u p_j} \times \\ &\times \exp(-|y| k_j(u)) \left. \right\} \exp(-i u x) du \\ \sigma_{yj}^* &= \tau_{yj} + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [A_j(u) + y B_j(u)] \exp(-|y||u|) + \right. \\ &+ \frac{q x_j E_j}{2\pi h \lambda_1} \frac{C(u) u^2}{m_j^2 + i u p_j} \exp(-|y| k_j(u)) \left. \right\} \exp(-i u x) du \end{aligned} \quad (1.39)$$

Явное выражение для функции  $\Omega$  в общем случае написать трудно. Однако, в зависимости от способа соединения, функция  $\Omega$  может принимать достаточно простой вид. Например, в процессе пайки  $f(0)$  можно определить как разность средних продольных деформаций границ пластин в участке неполного механического контакта

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} [\varepsilon_{x1}^*(x, 0) - \varepsilon_{x2}^*(x, 0)] dx = \\ &= \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{1}{\nu_{21}} + \frac{1}{\nu_{12}} \right) \operatorname{Re} \Phi_1^+(x) - \frac{\rho(x)}{\nu_{21}} \right] dx \end{aligned} \quad (1.40)$$



где величина  $\delta$  зависит от вышеуказанных факторов и может быть определена, в частности, экспериментально.

Для этого же процесса можно использовать и более простое условие

$$f(0) = [\varepsilon_{x_1}^*(x, 0) - \varepsilon_{x_2}^*(x, 0)]|_{x=x_0} \quad (1.41)$$

В обоих случаях (1.40) и (1.41) с учетом (1.37) в системе координат  $x, 0, y, (x_1 = x + s, y_1 = y)$  получается интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно  $f(x)$ .

Например, из условий (1.37) и (1.41) получается

$$f_1(s) - \frac{1 + \mu_*}{2\pi\mu_*} \int_0^s K(s, x_1) f_1(x_1) dx_1 = M(s) \quad (1.42)$$

где

$$K(s, x_1) = N_1(s, x_1) \cos \tau_2 + \frac{N_2(s)}{2} [(\mu_* - 1)^2 (x_1 - s) + 2\sqrt{\mu_* x_1 (s - x_1)}] \quad (1.43)$$

$$f_1(x_1) = \frac{\pi^2 h_1^2 \mu_*}{q a_1 (1 + \mu_*)} f(x_1 - s), \quad f(x_1 - s) = f(x)$$

$$N_1(s, x_1) = \frac{\sqrt{\mu_* x_1 (s - x_1)}}{(x_1 - s - x_0) \sqrt{x_0 (x_0 + s)}}, \quad \tau_2 = \gamma \ln \frac{x_0 x_1}{(x_0 + s)(s - x_1)}$$

$$N_2(s) = \frac{(x_0 + s/2) \sin[\gamma \ln(1 + s/x_0)] - \gamma s \cos[\gamma \ln(1 + s/x_0)]}{0,125 \cdot s^2 (1 + 4\gamma^2) \sqrt{x_0 (x_0 + s)}}$$

$$M(s) = M_1(s) - M_2(s) + M_3(s) - M_4(s) + M_5(s) - M_6(s)$$

$$2M_1(s) = \int_{-\infty}^{-s} [N_2(s, x) \sin \tau_1 - N_2(s) (x + \sqrt{x(x+s)} \cos \tau_1)] p(x) dx$$

$$2M_2(s) = \int_0^{\infty} [N_2(s, x) \sin \tau_1 + N_2(s) (x - \sqrt{x(x+s)} \cos \tau_1)] p(x) dx$$

$$2M_3(s) = \int_{-\infty}^{-s} [N_3(s, x) \cos \tau_1 + N_2(s) \sqrt{x(x+s)} \sin \tau_1] q(x) dx$$

$$2M_4(s) = \int_0^{\infty} [N_3(s, x) \cos \tau_1 + N_2(s) \sqrt{x(x+s)} \sin \tau_1] q(x) dx$$

$$2M_5(s) = \frac{1 - \mu_*}{1 + \mu_*} \pi p(x_0)$$

$$2M_e(s) = \int_{-\infty}^{\infty} W(u) [1 - \exp(-isu)(1-isu)] \frac{du}{u^2}$$

$$N_3(s) = \frac{\sqrt{x(x+s)}}{(x-x_0)\sqrt{x_0(x_0+s)}}, \quad \tau_1 = \gamma \ln \frac{x_0(x+s)}{x(x_0+s)}$$

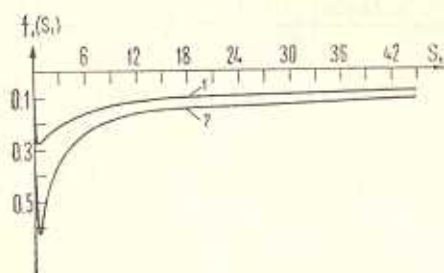
$$W(u) = C(u) \left[ \frac{|u| - k_1(u)}{m_1^2 + iup_1} + \alpha \frac{|u| - k_2(u)}{m_2^2 + iup_2} \right] |u|$$

В случае соединения пластин с одинаковыми теплофизическими и упругими свойствами из уравнения (1.42) получается  $f_1(s) = 0$ . Решение уравнения (1.42) при  $s \rightarrow 0$  имеет вид  $f_1(s) = \varepsilon_x^{(1)}(x_0, 0) - \varepsilon_x^{(2)}(x_0, 0)$ , где  $\varepsilon_x^{(j)}(x_0, 0)$  — продольные деформации границ несоединенных пластин.

Легко видеть, что ядро интегрального уравнения и свободный член — непрерывные функции своих аргументов. Поэтому уравнение (1.42) имеет единственное решение в классе непрерывных функций [14].

Для приближенного решения уравнения (1.42) был применен метод прямой замены интеграла, входящего в левую часть уравнения, конечной суммой [15]. Расчеты проводились с относительной точностью  $\varepsilon = 0,001$ .

Результаты численных расчетов представлены в виде графиков. На фиг. 2 приведены графики  $f_1(s_1)$  в зависимости от  $s_1 = s/x_0$ . Кривая 1



Фиг. 2

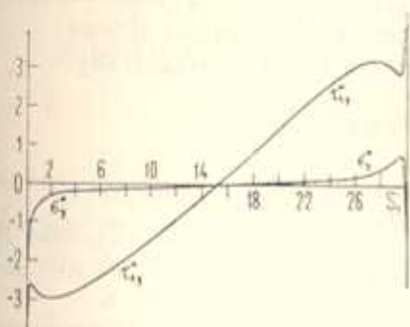
соответствует случаю соединения пластин из сталей, отличающихся только коэффициентами линейного теплового расширения ( $\alpha = \alpha_2/\alpha_1 = 2$ ). Для соединения сталь-алюминий получена кривая 2.

Кривые распределения контактных напряжений  $\sigma_y^*$  и  $\tau_{xy}^*$  при тех же сочетаниях соединяемых материалов показаны на фиг. 3 и 4 соответственно.

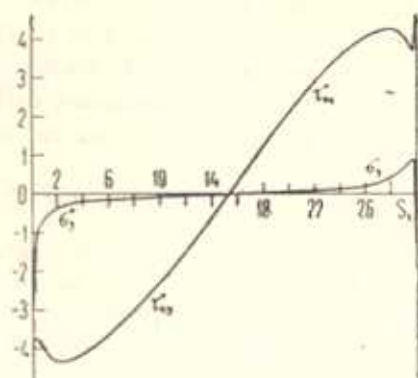
$$\sigma_y^* = A \sigma_{y1}^* \left( \frac{x_1 - s}{x_0}, 0 \right), \quad \tau_{xy}^* = A \tau_{xy1}^* \left( \frac{x_1 - s}{x_0}, 0 \right), \quad A = \frac{\pi^2 h_1^3 \mu_*}{q \alpha_1 (1 + \nu_*)^2 \mu_1}$$

Из приведенных кривых видно, что при прочих равных условиях различие в тепловых и упругих свойствах указанных материалов приводит к

повышению общего уровня  $f_1(s_1)$ ,  $\sigma_y^*$  и  $\tau_{xy}^*$ , но изменения в качественной картине при этом не обнаружено.



Фиг. 3



Фиг. 4

Автор благодарит А. С. Хачикяна за полезное обсуждение при постановке задачи и ее решении.

ԵՐԿՈՒ ՏԱՐԱՍԵՌ ԹԻՔԵՂՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱՑԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ ՇԱՐՃՎՈՂ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԱՂՐՅՈՒՐՈՎ ԵՐԱՆՑ ՄԻԱՑՄԱՆ ՓՐՈՑԵՍՈՒՄ

Ա. Մ. ՍԱՐԳՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Գծային շկապակցված ջերմատառձգականության տեսությունն սահմաններում դիտարկված է երկու տարասեռ թիթեղների միացման փազիստատիկ խընդիրը ջերմային աղբյուրը շարժվում է թիթեղների բաժանման գծի երկարությամբ: Աղբյուրից հետո թիթեղների միջև առաջանում է լրիվ մեխանիկական կոնտակտի մեծացող տեղամաս թիթեղների եզրերի ընդերկայնական դեֆորմացիաների նախապես անհայտ տարրերությամբ, որի որոշման համար ստացված է Վոյտերրի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարում:

Իերված են կոնտակտային լարումների բաշխման գրաֆիկները:

## STRESS STATE OF TWO DISSIMILAR PLATES DURING THEIR JOINING BY MOVING HEAT SOURCE

A. S. SARGSIAN

S u m m a r y

Within the bounds of linear unconnected thermoelasticity the quasi-static problem on the joining of two thin dissimilar plates by moving heat source is considered. The heat source moves along the

boundary of division of joining materials. Beyond the heat source beginning from some point of the boundary of division the zone of full mechanic contact appears between the plates when the difference of boundary longitudinal strains of the plates is unknown beforehand.

The second type of Walter integral equation is obtained for the determination of the unknown difference of longitudinal strains.

The distribution of contact stresses are shown graphically.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Махненко В. И.* Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. Киев: Наукова думка, 1976.
2. *Винокуров В. А.* Сварочные деформации и напряжения. М.: Машиностроение, 1968.
3. *Kamtekar A. G.* The calculation of welding residual stresses in thin steel plates. International Journal of mechanical sciences, 1978, vol. 20, No. 4.
4. *Киселев С. Н.* Соединение труб из разнородных металлов. М.: Машиностроение, 1981.
5. *Эрдоган Ф.* Распределение напряжений в связанных разнородных материалах с трещинами. ПМ (Tr. ASME, ser. E), 1965, № 2.
6. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.
7. *Сарисян А. М.* Температурное поле при сварке встык разнородных пластин в условиях теплоотдачи. Физика и химия обработки материалов, 1975, № 5.
8. *Хачикян А. С., Сарисян А. М.* К расчету температурного поля в свариваемых встык разнородных пластинках сдвинутым источником тепла при неидеальном тепловом контакте между ними. Физика и химия обработки материалов, 1979, № 2.
9. *Чобанян К. С., Сарисян А. М., Хачикян А. С.* Температурное поле в свариваемых встык разнородных пластинках при отсутствии теплового контакта впереди источника. Физика и химия обработки материалов, 1981, № 5.
10. *Williams M. L.* The stresses around Fault or Crack in dissimilar media. Bulletin of the Seismological Society of America, 1959, vol. 49, p. 199.
11. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, 1962, № 1.
12. *Эрдоган Ф.* Распределение напряжений в неоднородной упругой плоскости, имеющей трещину. ПМ (Tr. ASME, ser. E), 1963, № 2.
13. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
14. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
15. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений, т. 2. М.: Физматгиз, 1962.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
7. VI. 1982