ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 4, 1983 Механика

ВХОД ТЕЛА В ВОДУ ЧЕРЕЗ СЛОЙ ЛЬДА

САГОМОНЯН А. Я., ГАЕВСКАЯ И. С.

Пусть тело имеет форму тонкого конуса с углом раствора 2γ, переходящего на высоте h в цилиндр. Рассмотрим вертикальное проникание такого тела в полупространство, заполненное водой, на поверхности которой лежит слой льда толщиной l. До начала проникания лед и вода неподвижны, начальная скорость проникания V_0 перпендикулярна свободной поверхности льда. Будем считать, что скорость V_0 меньше скорости звука в воде.

При движении тонкого тела во льду возникает присоединенная ударная волна, на фронте которой происходит разрушение льда. Плавления льда на фронте волны не будет, так как в работе [1] экспериментально показано, что плавление льда на фронте волны наблюдается только при интенсивности волны большей $22\cdot 10^9$ Па. В нашей задаче на рассматриваемом диапазоне скоростей удара такое давление не достигается. Перед фронтом разрушения распространяются акустические волны, под действием которых напряжения в среде достигают предела прочности P_0, составляющего для льда $2\div 5\cdot 10^6$ Па. При прохождении ударной волны по льду за ее фронтом происходят необратимые объемные деформации, связанные с разрушением материала, в том числе пор, содержащих пузырьки воздуха, поэтому лед за ударной волной можно рассматривать как пластически сжимаемую среду. Сделаем допущение о том, что плотность льда меняется только на ударной волне и определяется интенсивностью волны, а тензор напряжения в среде за фронтом волны шаровой.

Для расчета движения тела во льду воспользуемся моделью, предложенной в работе [2] для решения задачи о проникании тонкого тела в пластически сжимаемую среду. В модели предполагается, что при описании движения среды вблизи тела можно применять гипотезу плоских сечений.

Задачу будем рассматривать в цилиндрической системе координат r, z, ось z направлена по оси тела вниз (фиг. 1). Пусть в момент времени t вершина конуса находится на глубине $H(t)$, а его скорость равна $\dot{H}(t)$. Исследуем движение среды в некотором произвольном сечении z. В момент, когда вершина конуса коснулась плоскости z, в плоскости в соответствии с используемой гипотезой плоских сечений возникла цилиндрическая ударная волна. В последующие моменты времени область возмущенного движения среды в плоскости z будет заключена между двумя окружностями: радиус внешней окружности равен координате фронта ударной волны $r = r^*$, внутренней границей области будет окружность радиуса

$R(t)$, являющаяся линией пересечения поверхности тела с рассматриваемой плоскостью z

$$R(t) = [H(t) - z]\gamma$$

Уравнения движения и неразрывности среды в сечении z имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\rho_0 r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (r + u)\frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(r + u)^2 = \frac{\rho_0}{\rho} r\end{gathered} \tag{1.1}$$

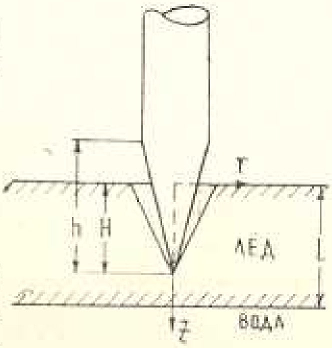
где r — координата Лагранжа, u — перемещение частицы, ρ_0, ρ — начальная и текущая плотность льда, P — давление.

Законы сохранения массы и импульса на фронте ударной волны при $r = r^*$ в сечении z запишутся в виде:

$$\rho_0 D = \rho(D - \dot{u}^*)$$

$$\rho_0 D\dot{u}^* = P^* - P_0$$

здесь D — скорость ударной волны, $\dot{u}^*$ — скорость частиц на ударной волне, P_0 — давление перед фронтом волны, P^* — давление на ударной волне.



Фиг. 1.

Граничные условия для системы (1.1) будут следующие:

при $r = 0$ $$u(0, t) = R(t)$$

при $r = r^*$ $$P = P^*, \quad u = \dot{u}^*, \quad u = 0$$

Решая полученную систему уравнений, найдем давление $P_s(z)$, действующее на коническую поверхность проникающего тела

$$P_s(z) = \frac{\rho_0}{2b}\left(\ln\frac{1}{1-b}\right)(H - z)\ddot{H}\gamma^2 + \frac{\rho_0}{2b}\left(\ln\frac{1}{1-b} + b\right)\dot{H}^2\gamma^2 + P_0$$

Параметр $b = \rho_0/\rho$ определяется по значению плотности за ударной волной в начальный момент проникания. В этот момент давление на фронте волны равно

$$P^* = P_0 + \rho_0 v_0^2\gamma^2$$

Из динамической кривой сжатия льда по вычисленному значению P^* находят значение плотности ρ. Экспериментальная динамическая кривая сжатия льда с начальной плотностью $\rho_0 = 920$ кг/м^3 приведена в работе [1].

Определим силу сопротивления, действующую в вертикальном направлении на коническую часть тела, расположенную выше линии раздела лед-вода.

При глубине проникания $H < h$ сила сопротивления равна

$$F_\lambda = 2\pi\gamma^2 \int\limits_0^H (H - z)\, P_\lambda(z)\, dz = \lambda_\lambda H^3 \ddot{H} + \alpha_\lambda H^2 \dot{H}^2 + \beta H^2$$

$$\lambda_\lambda = \pi\gamma^4 \frac{\rho_0}{3b} \ln \frac{1}{1-b}; \quad \alpha_\lambda = \pi\gamma^4 \frac{\rho_0}{2b} \left(\ln \frac{1}{1-b} + b \right); \quad \beta = \pi\gamma^2 P_0/2$$

При дальнейшем проникании, когда H становится больше длины конической части проникающего тела h, происходит отрыв среды от боковой поверхности в точке $z = H - h$, и поверхность контакта конуса со льдом не меняется до того момента, пока вершина тела не коснется линии раздела лед-вода. Сила сопротивления на этом участке определяется по формуле

$$F_\lambda = 2\pi\gamma^2 \int\limits_{H-h}^{H} (H - z)\, P_\lambda(z)\, dz = \lambda_\lambda h^3 \ddot{H} + \alpha_\lambda h^2 \dot{H}^2 + \beta h^2$$

При глубине проникания $H > l$ сила сопротивления со стороны льда действует только на ту часть конуса, которая находится выше линии раздела, на нижнюю часть конуса действует сила сопротивления воды. Сила F_λ будет равна

$$F_\lambda = 2\pi\gamma^2 \int\limits_{H-h}^{l} (H - z)\, P_\lambda(z)\, dz =$$

$$= \lambda_\lambda [h^3 - (H - l)^3] \ddot{H} + \alpha_\lambda [h^2 - (H - l)^2] \dot{H}^2 + \beta [h^2 - (H - l)^2]$$

Перейдем к рассмотрению движения тела в воде и определим силу сопротивления воды. Как показывают исследования, влиянием сжимаемости воды при проникании тонких тел в первом приближении можно пренебречь, поэтому будем в качестве модели воды использовать модель идеальной несжимаемой жидкости.

Пусть в момент времени t_l, когда вершина конуса достигла линии раздела лед-вода, скорость тела равна V_l. До момента $t = t_l$ жидкость покоилась. Движение, возникшее в жидкости при $t > t_l$ будет потенциальным. Потенциал скорости $\varphi(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

Поскольку для модели проникания тела в лед была принята гипотеза плоских сечений, то граничное условие на поверхности раздела $z = l$ для любого момента времени будет иметь вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

Граничное условие на поверхности тела в силу малости угла γ запишется так

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\begin{cases}\dot H\gamma, & \eta\leqslant z<\widetilde H\\ 0, & 0<z<\eta\end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $\widetilde H = H - l$, а функция η задается в виде

$$\eta=\begin{cases}0, & \widetilde H\leqslant h\\ \widetilde H-h, & \widetilde H>h\end{cases}$$

Продолжим потенциал скорости на основании принципа симметрии четным образом на верхнюю полуплоскость и представим его в виде

$$\varphi=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\widetilde H}^{\widetilde H}\frac{q(\xi)}{\sqrt{(\xi-z)^2+r^2}} \tag{1.3}$$

Задача свелась к определению функции $q(\xi)$. В работе [3] показано, что на образующей тонкого тела справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r\to0}\to\frac{1}{2\pi}\,\frac{q(z)}{r}$$

Используя граничные условия (1.2) в рамках линейного приближения можно записать

$$q(z)=\begin{cases}0, & z>H\\ 2\pi\gamma^2(H-z)\dot H, & \eta\leqslant z\leqslant H\\ 0, & -\eta<z<\eta\\ 2\pi\gamma^2(H+z)\dot H, & -H\leqslant z\leqslant-\eta\\ 0, & z<-H\end{cases} \tag{1.4}$$

Для упрощения знак «$\sim$» над величиной H временно опустим.

На основании (1.4) потенциал скорости (1.3) представится формулой

$$\varphi=-\frac{1}{2}\gamma^2\dot H\left\{\int\limits_{\eta}^{H}\frac{(H-\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\xi-z)^2+r^2}}+\int\limits_{-H}^{-\eta}\frac{(H+\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\xi-z)^2+r^2}}\right\}$$

Из линеаризованного уравнения Коши-Лагранжа определим давление, действующее на коническую поверхность тела

$$P_{\text{в}}(z)=-\rho_{\text{в}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Рассмотрим два случая в зависимости от глубины проникания тела в воду.

а) глубина проникания в воду меньше h, то есть в воде находится только коническая часть тела. В этом случае давление и сила сопротивления соответственно равны

$$P_в(z) = \frac{1}{2}\rho_в\gamma^2\ddot{H}\Big[(H-z)\Big(\ln\frac{4}{\gamma^2}-2\Big)+H\ln\frac{H+z}{H-z}+$$

$$+z\ln\frac{H^2-z^2}{z^2}\Big]+\frac{1}{2}\rho_в\gamma^2\dot{H}^2\Big(\ln\frac{L}{\gamma^2}+\ln\frac{H+z}{H-z}\Big)$$

$$F_в = 2\pi\gamma^2\int\limits_0^H (H-z)\,P_в(z)\,dz = \lambda_в H^3\ddot{H}+\alpha_в H^2\dot{H}^2$$

$$\lambda_в = \pi\gamma^4\rho_в\Big(-\frac{2}{3}\ln\gamma+2\ln 2-1\Big)$$

$$\alpha_в = \pi\gamma^4\rho_в\,(-\ln\gamma+3\ln 2-1)$$

б) глубина проникания в воду больше h

$$P_в(z) = \frac{1}{2}\rho_в\gamma^2\ddot{H}\Big[(H-z)\Big(\ln\frac{4}{\gamma^2}-2\Big)+H\ln\frac{H+z}{H-z}\,\frac{z-\eta}{z+\eta}+$$

$$+z\ln\frac{H^2-z^2}{z^2-\eta^2}\Big]+\frac{1}{2}\rho_в\gamma^2\dot{H}^2\Big[\ln\frac{4}{\gamma^2}+\ln\frac{H+z}{H-z}\,\frac{z-\eta}{z+\eta}-$$

$$-\frac{h}{\sqrt{(z-\eta)^2+(H-z)^2\gamma^2}}-\frac{h}{\sqrt{(z+\eta)^2+(H-z)^2\gamma^2}}\Big]$$

Следует отметить, что вершина тела и линия стыка конической части с цилиндрической являются особыми точками. Около вершины конуса давление стремится к бесконечности, а вблизи линии стыка возникает область разрежения. Нижнюю границу области разрежения можно определить из решения уравнения

$$P_в(z) = 0 \tag{1.5}$$

Расчеты показывают, что основной вклад в величину давления составляет член, пропорциональный $\dot{H}^2$, поэтому членом $\ddot{H}$ можно пренебречь, и тогда уравнение (1.5) сводится к виду

$$\ln\frac{4}{\gamma^2}+\ln\frac{H+z}{H-z}\,\frac{z-\eta}{z+\eta}-\frac{h}{\sqrt{(z-\eta)^2+(H-z)^2\gamma^2}}-$$

$$-\frac{h}{\sqrt{(z+\eta)^2+(H-z)^2\gamma^2}}=0$$

Сила сопротивления, действующая на тело, определяется по формуле

$$F_в = 2\pi\gamma^2\int\limits_\eta^H (H-z)\,P_в(z)\,dz = \ddot{H}f(H,\alpha)+\dot{H}^2 g(H,\alpha)$$

$$g(H,\alpha)=(H-\alpha)^2\ln\frac{2}{\gamma}+\frac{(H-\alpha)^2}{2}\ln\frac{H+\alpha}{H-\alpha}\,\frac{\alpha-\eta}{\alpha+\eta}+$$

$$+2H^2\ln\frac{2H}{H+\alpha}+\frac{1}{2}h^2\ln\frac{h}{\alpha-\eta}-(H+\eta)\left(H+\frac{h}{2}\right)\ln\frac{H+\eta}{\alpha+\eta}+$$

$$+h^2-h^2\ln\frac{2h}{\alpha-\eta+\sqrt{(\alpha-\eta)^2+(H-\alpha)^2\gamma^2}}$$

$$f(H,\alpha)=\frac{2}{3}(H-\alpha)^3\left(\ln\frac{2}{\gamma}-1\right)+H\Big|-h(H-\alpha)+$$

$$+\frac{(H-\alpha)^2}{2}\ln\frac{H+\alpha}{H-\alpha}\,\frac{\alpha-\eta}{\alpha+\eta}-\frac{1}{2}(H+\eta)^2\ln\frac{H+\eta}{\alpha+\eta}+$$

$$+h^2\ln\frac{h}{\alpha-\eta}+2H^2\ln\frac{2H}{H+\alpha}\Big|+$$

$$+\frac{1}{3}\left[H^3\ln\frac{H^2-\eta^2}{4H^2}\,\frac{H+\alpha}{H-\alpha}+\eta^3\ln\frac{H+\eta}{H-\eta}\,\frac{\alpha-\eta}{\alpha+\eta}-\right.$$

$$\left.-\alpha^3\ln\frac{\alpha^2-\eta^2}{H^2-\alpha^2}+2(H^2-\eta^2)(H-\alpha)\right]+$$

$$+\frac{H}{2}\left[H^2\ln\frac{H^2-\alpha^2}{H^2-\eta^2}+(\alpha^2-\eta^2)\ln\frac{\alpha^2-\eta^2}{H^2-\alpha^2}\right]$$

α — нижняя граница области разрежения.

Объединим полученные решения и найдем зависимость между скоростью тела и глубиной проникания. Закон движения тела массы m будет

$$m\ddot{H}=-(F_{\lambda}+F_{в})$$

Выделим в процессе проникания четыре этапа в зависимости от глубины проникания (фиг. 2).

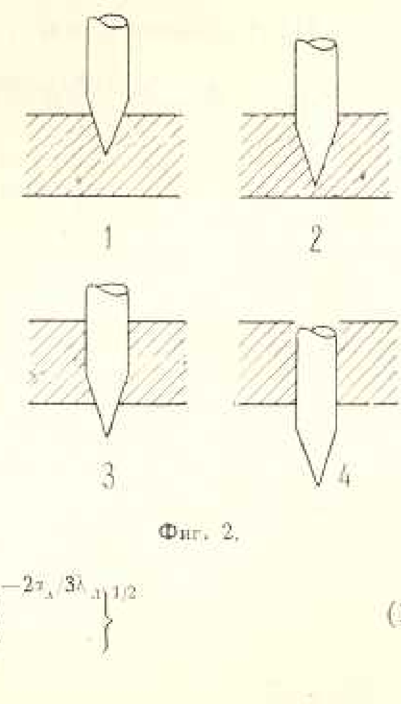
1. Глубина проникания $H\leqslant h$

Уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{H}=-(\lambda_{\lambda}H^3\ddot{H}+\alpha_{\lambda}H^2\dot{H}^2+\beta H^2)$$

$$\dot{H}(0)=V_0$$

Решение этого уравнения представляется формулой



Фиг. 2.

$$\dot{H}=\left\{-\frac{\beta}{\alpha_{\lambda}}+\left(V_0^2+\frac{\beta}{\alpha_{\lambda}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{\lambda_{\lambda}}{m}H^3\right)^{-2\alpha_{\lambda}/3\lambda_{\lambda}}\right\}^{1/2} \qquad (1.6)$$

2. Глубина $h < H \leqslant l$

$$m\ddot{H} = -(\lambda_\text{л} h^3 H + \alpha_\text{л} h^2 \dot{H}^2 + \beta h^2)$$

$$\dot{H}(h) = V_h$$

V_h — значение скорости тела на глубине $H = h$, вычисленное по формуле (1.6).

Решение уравнения:

$$\dot{H} = \left\{-\frac{\beta}{\alpha_\text{л}} + \left(V_h^2 + \frac{\beta}{\alpha_\text{л}}\right)\exp\left[-\frac{2\alpha_\text{л} h^2}{m + \lambda_\text{л} h^3}(H - h)\right]\right\}^{1/2} \qquad (1.7)$$

3. Глубина $l < H \leqslant l + h$

В этом случае на нижнюю часть конуса действует сила сопротивления со стороны жидкости, а на верхнюю — сила сопротивления льда. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{H} = -[\lambda_\text{л}(h^3 - \widetilde{H}^3)\ddot{H} + \dot{H}^2\alpha_\text{л}(h^2 - \widetilde{H}^2) + \beta(h^2 - \widetilde{H}^2) +$$

$$+ \lambda_\text{в}\widetilde{H}^3\ddot{H} + \alpha_\text{в}\widetilde{H}^2\dot{H}^2]$$

$$\dot{H}(l) = V_l, \quad \widetilde{H} = H - l$$

V_l — значение скорости, найденное по формуле (1.7) для $H = l$. В общем случае уравнение не имеет аналитического решения. Если скорость проникания достаточно велика, то, как показали расчеты, вклад члена, пропорционального величине β, мал на всех этапах и этим членом можно пренебречь. В этом случае уравнение имеет аналитическое решение:

$$\dot{H} = V_l \exp[-Q(\widetilde{H})]$$

Функция $Q(x)$ задается в виде

$$Q(x) = \frac{\alpha_\text{л} - \alpha_\text{в}}{\lambda_\text{л} - \lambda_\text{в}}\left[\frac{1}{3}\ln\frac{a^3 - x^3}{a^3} - \frac{b}{6a^2}\ln\frac{(a - x)^2}{a^2 + ax + x^2} +\right.$$

$$\left.+ \frac{b}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x + a}{a\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$a^3 = \frac{m + \lambda_\text{л} h^3}{\lambda_\text{л} - \lambda_\text{в}}; \qquad b = \frac{\alpha_\text{л} h^2}{\alpha_\text{л} - \alpha_\text{в}}$$

4. Глубина проникания $H > l + h$

$$m\ddot{H} = -[\ddot{H} f(\widetilde{H}, \alpha) + \dot{H}^2 g(\widetilde{H}, \alpha)]$$

$$\dot{H}(l + h) = v_{l+h}$$

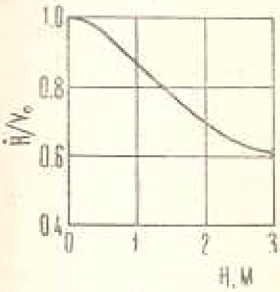
Решение уравнения

$$\dot{H} = v_{l+h}\exp\left(-\int_h^{\widetilde{H}}\frac{g(\widetilde{H}, \alpha)}{m + f(\widetilde{H}, \alpha)}\,d\widetilde{H}\right)$$

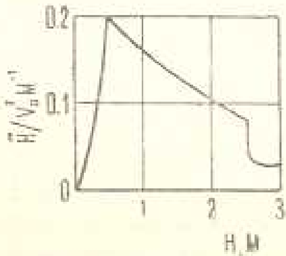
Расчеты показали, что величина $f(\tilde{H}, \alpha)$ значительно меньше массы тела m, а значения функции $g(\tilde{H}, \alpha)$ мало меняются при увеличении H. Полагая $g(\tilde{H}, \alpha) = \mathrm{const} = G$ формулу можно упростить

$$\dot{H} = V_{l+h} \exp\left[-\frac{G}{m}(\tilde{H} - h)\right]$$

Результаты расчетов для тела массы 10 кг, с углом полураствора $\gamma = 10^\circ$, высотой конической части $h = 0{,}5$ м и значением l, равным $4h$, представлены на графиках. На фиг. 3 показана зависимость скорости тела от глубины проникания. На фиг. 4 показано изменение ускорения тела



Фиг. 3.



Фиг. 4.

в процессе движения. Следует отметить, что максимальная величина ускорения достигается на глубине $H = h$, далее наблюдается монотонный спад ускорения до глубины $H = l + h$, после начала входа в воду цилиндрической части ускорение резко падает.

ՍԱՌՈՒՅՑԻ ՇԵՐՏԻ ՄԻՋՈՎ ՄԱՐՄՆԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ

Ա. ՅԱ. ՍԱՂՈՄՈՆՅԱՆ, Ի. Ա. ԳԱԼԵՎԱԿՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է վերջավոր հաստության սառույցի շերտի միջով պինդ, նեղ կոնի ներթափանցումը իդեալական անսեղմելի հեղուկի մեջ, որը զբաղեցնում է կիսատարածությունը։ Մարմնի ուժերը արհամարհվում են։ Ենթադրվում է, որ սառույցի մեջ ներթափանցման պրոցեսը տեղի է ունենում քայքայման մակերևույթի (ալիքի) առաջացումով, սառույցի հալում տեղի չի ունենում։ Վերջին ենթադրությունը հիմնված է գրականության ցանկի [1] աշխատանքի արդյունքների վրա։ Ստացված է ներթափանցման օրենքը որոշող անալիտիկ փակ բանաձևեր։

THE PENETRATION OF A BODY INTO WATER THROUGH A LAYER OF ICE

A. Ja. SAGOMONIAN, I. S. GAEVSKAYA

Summary

In the paper the problem of vertical penetration of a rigid narrow cone through a layer of ice of finite thickness in ideal incompressible fluid occupying half the space is investigated. The gravitation forces are neglected. It is supposed that the process of penetration in a layer of ice is realized with the formation of the surface (wave) of fracture; the melting (thaw) of ice does not occur. The latter assumption is based on the results of paper [1] in the reference list. Closed analytical formulae, determining the law of penetration, are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schroeder R. C., Mc. Master W. H.* Shock compression freezing and melting of water and ice — J. Appl. Phys., 1973, 44, No. 6, p. 2591—2594.
2. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М.: Изд. МГУ, 1974.
3. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд. АН Арм.ССР, 1961.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
25. X. 1982