ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 4, 1983 Механика

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ В ОБЛАСТИ С ДВУМЕРНОЙ ТРЕЩИНОЙ

НАЗАРОВ С. А., ШОЙХЕТ Б. А.

Эллиптические краевые задачи в областях с особенностями границы типа «ребра» изучались в [1—6] и др. В [2] сформулированы условия справедливости для таких задач теорем Нетера в пространствах с нормами

$$\left\{ \int\limits_G \sum_{|\alpha|\le q} r^{2(\beta-q+|\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^2\, dx \right\}^{1/2} \tag{0.1}$$

где r — расстояние до ребра. Основным из упомянутых условий является однозначная разрешимость в пространствах с нормами

$$\left\{ \int\limits_k \sum_{|\alpha|\le q} |y|^{2\beta} (1+|y|^{-2})^{q-|\alpha|} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2}}(y) \right|^2 dy_1 dy_2 \right\}^{1/2} \tag{0.2}$$

некоторой вспомогательной модельной задачи в линейном угле k соответствующего двугранного угла.

Работы [3, 4] посвящены выводу асимптотических формул для решений указанных задач, а [6] — коэрцитивным оценкам в классах L_p и Гельдера. В [5] рассмотрены особенности границы более общего вида, в частности, допускаются некасательные пересечения ребер различных размерностей.

В п. 1 настоящей работы приводится постановка задач теории упругости и теории ползучести трехмерного тела с двумерной трещиной M, край ∂M которой представляет собой одномерное ребро двугранного угла раствора 2π. В п. 2 изучается задача теории упругости. Старшие дифференциальные операторы соответствующей ей модельной задачи в линейном угле образуют систему уравнений плоской задачи теории упругости и задачи антиплоского сдвига. Так как рассматривается случай задания на границе тела напряжений, то модельная задача не является однозначно разрешимой в пространствах с нормами вида (0.2). Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим неэнергетическое решение u^* однородной задачи для плоскости с полубесконечной трещиной при заданной в ее вершине сосредоточенной силы. Известно, что u^* имеет вблизи вершины разреза порядок $O(|\log r|)$. Очевидно, для однозначной разрешимости задачи необходимо, чтобы u^* не принадлежало пространству с нормой (0.2), поэтому из рассмотрения слагаемого в (0.2), содержащего саму функцию

v $(\alpha = 0)$, следует, что $\beta \leqslant q - 1$. В то же время при таком выборе β смещения тела u^R как жесткого целого тоже обратят выражение (0.2) в бесконечность. Таким образом, u^R не попадает в это пространство, и, следовательно, модельная задача разрешима не при всех правых частях; для того, чтобы сделать ее однозначно разрешимой, необходим специальный подбор весовых множителей при различных производных D^α. Соответствующие изменения претерпевают и нормы (0.1).

В п. 3 коэрцитивные оценки решений задачи теории упругости распространяются на задачу теории ползучести неоднородно стареющего тела с трещиной.

Часть результатов статьи анонсирована в заметке [7].

1. *Постановка задач.* Пусть Ω_0—связная, с гладкой границей $\partial\Omega_0$ подобласть трехмерного пространства R^3; m—гладкая поверхность, а M—содержащееся в Ω_0 подмножество поверхности m, ограниченное связным гладким простым контуром ∂M. Множество M определяет двумерную трещину в Ω_0; ее берега обозначим через M^+ и M^-. Тело занимает область $\Omega = \Omega_0 \setminus M$. На берегах трещины заданы напряжения. Для определенности будем считать, что на внешней границе $\partial\Omega_0$ также действуют напряжения. Случай, когда к $\partial\Omega_0$ приложены смещения, рассматривается аналогично.

Уравнения краевой задачи ползучести неоднородно стареющих тел имеют вид [8]:

$$\varepsilon_{ij}(t, x) = \varepsilon_{ij}(u) \equiv (u_{i,j}(t, x) + u_{j,i}(t, x))/2, \quad i, j = 1, 2, 3 \qquad (1.1)$$

$$\sigma_{ij,j}(t, x) + f_i(t, x) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (1.2)$$

$$\frac{s_{ij}(t, x)}{2G(t + \varkappa(x), x)} = e_{ij}(t, x) - \int_0^t R_1(t + \varkappa(x), \tau + \varkappa(x), x)\, e_{ij}(\tau, x)\, dx$$

$$\frac{\sigma(t, x)}{E_*(t + \varkappa(x), x)} = e(t, x) - \int_0^t R_2(t + \varkappa(x), \tau + \varkappa(x), x)\, e(\tau, x)\, dx \qquad (1.3)$$

$$e \equiv \varepsilon_{ss}/3, \quad e_{ij} \equiv \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} e, \quad \sigma \equiv \sigma_{ss}/3, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma \qquad (1.4)$$

$$\sigma_{ij}(t, x)\, n_j^{\pm} = g_i^{\pm}(t, x) \text{ на } M^{\pm}, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (1.5)$$

$$\sigma_{ij}(t, x)\, n_j = g_i(t, x) \text{ на } \partial\Omega_0, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (1.6)$$

Здесь u_i, σ_{ij}, ε_{ij} — декартовы компоненты смещений, напряжений и деформаций соответственно; s_{ij}, e_{ij} — компоненты девиаторов напряжений и деформаций; σ, e — их шаровые части; $E_*(t, x)$, $R_2(t, \tau, x)$ — модуль объемного расширения и ядро релаксации при всестороннем расширении-сжатии; $G(t, x)$, $R_1(t, \tau, x)$ — модули сдвига и ядро релаксации при сдвиге; $\varkappa$ — функция неоднородного старения, характеризующая закон изменения возраста материала; f_i, $g_i^{\pm}$, g_i — объемные и поверхностные нагрузки, удовлетворяющие при всех t условиям равновесия

$$\int_{\Omega} f_i u_i^R dx + \int_{M^{\pm}} g_i u_i^R dS + \int_{\partial\Omega_0} g_i u_i^R dS = 0 \tag{1.7}$$

для всякого поля смещений u^R тела, как жесткого целого.

Уравнения краевой задачи упругости имеют вид (1.1)—(1.6), если все функции считать независящими от времени t, а в (1.3) положить $R_1 = R_2 = 0$:

$$s_{ij}(x) = 2G(x)\, e_{ij}(x), \quad \sigma(x) = E_*(x)\, e(x) \tag{1.8}$$

В дальнейшем будет удобно использовать матричную запись уравнений Ламэ и граничных условий однородной теории упругости

$$Lu + f = 0 \tag{1.9}$$

$$Bu = g \tag{1.10}$$

Здесь матричные операторы L и B имеют вид

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \left\{\delta_{ij}\mu\Delta + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,\, j = 1,\, 2,\, 3} \tag{1.11}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial x_s}$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \left\{\delta_{ij}\mu\frac{\partial}{\partial n} + \lambda n_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i,\, j = 1,\, 2,\, 3} \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \equiv n_s \frac{\partial}{\partial x_s}$$

λ, μ — коэффициенты Ламэ ($\mu = G$, $\lambda = (E_* - 2G)/3$).

Известно, что задача (1.9), (1.10) — эллиптическая в смысле А. Дуглиса, Л. Ниренберга [9].

2. *Задача теории упругости.* Введем в окрестности края ∂M трещины M криволинейные координаты (y_1, y_2, s), где s — длина дуги, измеренная вдоль ∂M от некоторой точки до проекции x на ∂M, (y_1, y_2) — ортогональные координаты в плоскости, проходящей через x и нормальной к ∂M, причем локально M задается соотношениями $y_1 \leqslant 0$, $y_2 = 0$.

Пусть v — векторное поле, компоненты которого имеют носители, сосредоточенные в малой окрестности D точки $P \in \partial M$. Положим $F = -Lv$; $G^{\pm} = Bv$ на $M^{\pm}$. Ясно, что v удовлетворяет задаче

$$Lv + F = 0 \text{ в } \Omega; \quad Bv = G^{\pm} \text{ на } M^{\pm}; \quad Bv = 0 \text{ на } \partial\Omega_0$$

Перейдем в ней к координатам (y_1, y_2, s). Тогда ввиду малости носителя v вектор (v_1, v_2, v_s) удовлетворяет системе уравнений в двугранном угле $K = R^3 \setminus \{s \in R^1, y_1 \leq 0, y_2 = 0\}$ раствора 2π:

$$L(\partial/\partial y, \partial/\partial s)v + l(y, s, \partial/\partial y, \partial/\partial s)v + F = 0 \text{ в } K \tag{2.1}$$

$$B(\partial/\partial y, \partial/\partial s)v + b(y, s, \partial/\partial y, \partial/\partial s)v = G^{\pm} \text{ на } \partial K^{\pm} \tag{2.2}$$

Здесь v_1, v_2, v_s — проекции вектора v на оси координат (y_1, y_2, s); l и b — матричные операторы порядков не выше второго и первого, соответственно; их коэффициенты суть гладкие функции, причем можно считать, что они имеют компактные носители (так как $v = 0$ вне D); кроме того, коэффициенты при старших производных обращаются в нуль при $|y| = 0$.

Для того, чтобы вывести оценки v через правые части F и $G^{\pm}$ задачи (2.1), (2.2), необходимо [2] рассмотреть вспомогательную краевую задачу с параметром $\omega = \pm i$ в двумерном угле $k = R^2 \setminus \{z_1 \leq 0, z_2 = 0\}$ раствора 2π:

$$L(\partial/\partial z, \omega)V + \Phi = 0 \text{ в } k; \quad B(\partial/\partial z, \omega)V = \Psi^{\pm} \text{ на } \partial k^{\pm} \tag{2.3}$$

Здесь $z = (z_1, z_2)$; операторы $L(\partial/\partial z, \omega)$ и $B(\partial/\partial z, \omega)$ получаются из $L(\partial/\partial z, \partial/\partial z_3)$ и $B(\partial/\partial z, \partial/\partial z_3)$ формальной заменой дифференцирования по z_3 умножением на ω.

Обозначим через $R^q_\beta(k)$ и $R^{q+2}_{\gamma,\beta}(k)$ пространства функций в k, наделенные нормами

$$\|\Phi, R^q_\beta(k)\| = \left\{ \int_k |z|^{2\beta} \sum_{0 \leq \alpha_1+\alpha_2 \leq q} (1+|z|^{-2})^{q-\alpha_1-\alpha_2} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2}} \Phi(z) \right|^2 dz \right\}^{1/2}$$

$$\|V; R^{q+2}_{\gamma,\beta}(k)\| = \left\{ \int_k |z|^{2\beta} \left[(1+|z|^{-2})^{\gamma} |V(z)|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{0 < \alpha_1+\alpha_2 \leq q+2} (1+|z|^{-2})^{q+2-\alpha_1-\alpha_2} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2}} V(z) \right|^2 \right] dz \right\}^{1/2}$$

где $\gamma \in (q+1, q+2)$. Пусть еще $R^{q+1/2}_\beta(\partial k^{\pm})$ — пространство следов на $\partial k^{\pm}$ функций из $R^{q+1}_\beta(k)$, наделенное [10] нормой

$$\left\{ \int_{\partial k^{\pm}} \sum_{s \leq q} |z_1|^{2\beta} (1+|z_1|^{-2})^{q+1/2-s} \left| \frac{\partial^s}{\partial z_1^s} \Psi^{\pm}(z_1) \right|^2 dz_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{\partial k^{\pm}} \int_{\partial k^{\pm}} \left| z_1^{\beta} \frac{\partial^q}{\partial z_1^q} \Psi^{\pm}(z_1) - \eta_1^{\beta} \frac{\partial^q}{\partial \eta_1^q} \Psi^{\pm}(\eta_1) \right|^2 \frac{dz_1 d\eta_1}{|z_1 - \eta_1|^2} \right\}^{1/2}$$

Лемма 1. *Если выполнены неравенства*

$$q+1/2<\beta<q+1\leqslant\gamma<\beta+1, \tag{2.4}$$

то справедливы следующие утверждения:

а) *Функции* $\chi(r)$, $r^{1/2}\alpha_1(\theta)\chi(r)$ *принадлежат пространству* $R^{q+2}_{\gamma,\beta}(k)$, а $[\alpha_2(\theta)\log r+\alpha_3(\theta)]\chi(r)\in R^{q+2}_{\gamma,\beta}(k)$;

б) *Для операторов* $N_j(z, D_z)$ *порядков* j *с гладкими ограниченными в* R^2 *коэффициентами справедливы включения* $N_1(z, D_z)w\in R^{q+1}_{\beta}(k)$, $N_2(z, D_z)w\in R^q_\beta(k)$, *где* $w\in R^{q+2}_{\gamma,\beta}(k)$.

Здесь (r, θ) — *полярные координаты,* χ — *срезка из* $C_0^\infty(R^2)$, *равная единице вблизи точки* $r=0$; $\alpha_p\in C^\infty([0, 2\pi])$, $p=1, 2, 3$.

Доказательство сформулированных свойств введенных пространств сводится к непосредственному вычислению указанных норм.

Всюду в дальнейшем пространства скалярных и векторнозначных функций не различаются в обозначениях.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi\in R^q_\beta(k)$, $\Psi^\pm\in R^{q+1/2}_\beta(\partial k^\pm)$ *и выполнены неравенства* (2.4). *Тогда существует и единственно решение* $V\in R^{q+2}_{\gamma,\beta}(k)$ *задачи* (2.3) *и для него справедливо неравенство*

$$\|V; R^{q+2}_{\gamma,\beta}(k)\|\leqslant\text{const}\,\{\|\Phi;\ R^q_\beta(k)\|+\|\Psi^\pm;\ R^{q+1/2}_\beta(\partial k^\pm)\|\} \tag{2.5}$$

Доказательство. Установим сначала отсутствие нетривиальных решений V^0 однородной ($\Phi=0$, $\Psi^\pm=0$) задачи (2.3). Можно проверить (используя лемму 1 и результаты работ [10—12]), что всякое такое решение принадлежит $W^1_2(k)$. Умножим скалярно однородную систему уравнений из (2.3) на $\overline{V^0}$ и проинтегрируем по частям в k с использованием граничных условий. После алгебраических преобразований получим, что

$$0=\int\limits_k\left\{2\left[\left|\frac{\partial V_1^0}{\partial z_1}\right|^2+\left|\frac{\partial V_2^0}{\partial z_2}\right|^2+|V_3^0|^2\right]+\frac{\lambda}{\mu}\left|\frac{\partial V_1^0}{\partial z_1}+\frac{\partial V_2^0}{\partial z_2}+\omega V_3^0\right|^2+\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\partial V_1^0}{\partial z_2}+\frac{\partial V_2^0}{\partial z_1}\right|^2+\left|\omega V_2^0+\frac{\partial V_3^0}{\partial z_2}\right|^2+\left|\omega V_1^0+\frac{\partial V_3^0}{\partial z_2}\right|^2\right\}dz$$

Отсюда находим, что $V^0=0$.

Докажем теперь разрешимость задачи (2.3). Рассмотрим сначала эту задачу в пространстве $R^{q+2}_\beta(k)$

$$\{L(\partial/\partial z, \omega),\ B(\partial/\partial z, \omega)\};\quad R^{q+2}_\beta(k)\to R^q_\beta(k)\times R^{q+1/2}_\beta(k) \tag{2.6}$$

Сопряженная краевая однородная задача имеет лишь три линейно независимых решения W^j, представимых в виде

$$W^j(z)=X^j(z)\chi(r)+W^{j,0}(z)$$

где $W^{j,0}$ — энергетические решения задач

$$L(\partial/\partial z, \omega)W^{j,0}+[L(\partial/\partial z, \omega), \chi]X^j=0 \text{ в } k$$

$$B(\partial/\partial z,\ \omega)\, W^{j,0} = -[B(\partial/\partial z,\ \omega),\ \chi]\, X^j \quad \text{на} \quad \partial k^{\pm}$$

$[A,\ B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B; $X^3 = (0,\ 0,\ (2\pi)^{-1} \log r^{-1})$; матрица $\|X^1,\ X^2\|$ имеет нулевую третью строку, а первые две составляют двумерный тензор Сомильяно в k, то есть они образованы решениями задачи о плоской деформации угла k сосредоточенными в вершине силами (1,0) и (0,1). Таким образом, оператор (2.6) обратим на подпространстве векторов $\{\Phi,\ \Psi^{\pm}\}$, для которых справедливы равенства

$$\int_k \Phi(z)\, W^j(z)\, dz + \int_{\partial k^{\pm}} \Psi^{\pm}(z)\, W^j(z_1)\, dz_1 = 0 \tag{2.7}$$

Так как W^j удовлетворяют (в смысле теории обобщенных функций) уравнениям

$$L(\partial/\partial z,\ \omega)\, W^j = \delta(0)\, e^j \quad \text{в} \quad \bar{k}, \quad B(\partial/\partial z,\ \omega)\, W^j = 0 \quad \text{на} \quad \partial k^{\pm}$$

где $\delta(0)$ — δ-функция Дирака, $e^1 = (1,\ 0,\ 0)$, $e^2 = (0,\ 1,\ 0)$, $e^3 = (0,\ 0,\ 1)$, то

$$\int_k \Phi^p(z)\, W^j(z)\, dz + \int_{\partial k^{\pm}} \Psi^{p\pm}(z)\, W^j(z)\, dz_1 = \delta_{pj}$$

(см. также [11]). Здесь $\Phi^p(z) = -L(\partial/\partial z, \omega)[e^p \chi(r)]$, $\Psi^{p\pm}(z) = B(\partial/\partial z,\ \omega)[e^p \chi(r)]$.

Итак, решение V задачи (2.3) представляется в виде

$$V(z) = V^1(z) + \sum_{j=1}^{3} M_j e^j \chi(r) \tag{2.8}$$

где V^1 — решение из $R^{q+2}_{\beta}(k)$ задачи (2.3) с правыми частями

$$\Phi + \sum_{j=1}^{3} M_j \Phi^j, \quad \Psi^{\pm} + \sum_{j=1}^{3} M_j \Psi^{j\pm}$$

а постоянные M_j находятся из условий разрешимости последней задачи и имеют вид

$$M_j = \int_k \Phi(z)\, W^j(z)\, dz + \int_{\partial k^{\pm}} \Psi^{\pm}(z)\, W^j(z)\, dz_1, \quad j = 1,\ 2,\ 3 \tag{2.9}$$

Оценка (2.5) вытекает из представления (2.8) решения $V \in R^{q+2}_{\gamma,\beta}(k)$, равенств (2.9) и ограниченности обратного оператора к (2.6) на векторах, подчиненных соотношениям (2.7). Теорема доказана.

Рассмотрим краевую задачу

$$L(\partial/\partial y,\ \partial/\partial s)\, U + \varphi = 0 \quad \text{в} \quad K, \quad B(\partial/\partial y,\ \partial/\partial s)\, U = \psi^{\pm} \quad \text{на} \quad \partial K^{\pm} \tag{2.10}$$

После преобразования Фурье T по переменной $s \in R^1$ система (2.10) переходит в следующую:

$$L(\partial/\partial y,\ i\xi)\, TU + T\varphi = 0 \ \text{в}\ k, \quad B(\partial/\partial y,\ i\xi)\, TU = T\psi^{\pm} \ \text{на}\ \partial k^{\pm} \qquad (2.11)$$

а после замены $y \to z = |\xi|\, y$ преобразуется к виду (2.3), где $V(z) = TU(|\xi|^{-1}z, \xi)$, $\Phi(z) = |\xi|^{-2}\, T\varphi(|\xi|^{-1}z, \xi)$, $\Psi^{\pm}(z_1) = |\xi|^{-1}\, T\psi^{\pm}(|\xi|^{-1}z_1, \xi)$, $\omega = i\xi|\xi|^{-1}$. Поэтому существует единственное решение $TU \in R^{q,2}_{\gamma,\beta}(k)$ задачи (2.11), и для него справедливо неравенство

$$\int_k |y|^{2\beta} \Big\{ |\xi|^{2q+4-2\gamma} (|\xi|^2 + |y|^{-2})^{2\gamma}\, |TU(y, \xi)|^2 +$$

$$+ \sum_{0 \le \alpha_1+\alpha_2 \le q+2} (|\xi|^2 + |y|^{-2})^{q+2-\alpha_1-\alpha_2} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2}}\, TU(y, \xi) \right|^2 \Big\}\, dy \le$$

$$\le c \Big\{ \int_k \sum_{0 \le \alpha_1+\alpha_2 \le q} |y|^{2\beta} (|\xi|^2 + |y|^{-2})^{q-\alpha_1-\alpha_2} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2}}\, T\varphi(y, \xi) \right|^2 dy +$$

$$+ \int_{\partial k^{\pm}} \sum_{0 \le \sigma \le q} |y_1|^{2\beta} (|\xi|^2 + |y_1|^{-2})^{q-\sigma+1/2} \left| \frac{\partial^{\sigma}}{\partial y_1^{\sigma}}\, T\psi^{\pm}(y_1, \xi) \right|^2 dy_1 +$$

$$+ \int_{\partial k^{\pm}} \int_{\partial k^{\pm}} \left| y_1^{\beta} \frac{\partial^q}{\partial y_1^q}\, T\psi^{\pm}(y_1, \xi) - \eta^{\beta} \frac{\partial^q}{\partial \eta^q}\, T\psi^{\pm}(\eta, \xi) \right|^2 \frac{dy_1\, d\eta}{|y_1 - \eta|^2} \Big\} \qquad (2.12)$$

где постоянная c не зависит от U, φ, $\psi^{\pm}$ и ξ.

После обратного преобразования Фурье по ξ из (2.12) получаем, что

$$\| U;\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(K) \| \le \mathrm{const}\, \{ \| \varphi;\ V^q_\beta(K) \| +$$

$$+ \| \psi^{\pm};\ V^{q+1/2}_\beta(\partial K^{\pm}) \| + \| |y|^{\beta} U;\ L_2(K) \| \} \qquad (2.13)$$

Здесь $V^q_\beta(K)$ и $V^{q+2}_{\gamma,\beta}(K)$ — пространства функций в K таких, что конечны следующие нормы (если $q + 1 = \gamma$, то в определении нормы отсутствует интеграл по $R^1 \times R^1 \times k$):

$$\| \varphi;\ V^q_\beta(K) \| = \Big\{ \int\!\!\int_K \sum_{|\alpha| \le q} |y|^{2(\beta+|\alpha|-q)} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \partial s^{\alpha_3}}\, \varphi(y, s) \right|^2 dy\, ds \Big\}^{1/2}$$

$$\| U;\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(K) \| = \Big\{ \int\!\!\int_K \Big[|y|^{2(\beta-\gamma)}\, |U(y, s)|^2 +$$

$$+ \sum_{0 \le |\alpha| \le q+2} |y|^{2(\beta+|\alpha|-q-2)} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \partial s^{\alpha_3}}\, U(y, s) \right|^2 \Big]\, dy\, ds +$$

$$+ \int_k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |U(y, s) - U(y, \eta)|^2 \frac{d\eta\, ds}{|s - \eta|^{1+2(q+2-\gamma)}}\, |y|^{2(\beta-\gamma)}\, dy \Big\}^{1/2} \qquad (2.14)$$

$V_\beta^{q+1/2}(\partial K^\pm)$ — пространство следов $\Psi^\pm$ на $\partial K^\pm$ функций $\Psi \in V_\beta^{q+1}(K)$, наделенное нормой

$$\|\Psi^\pm;\ V_\beta^{q+1/2}(\partial K^\pm)\| = \Big\{ \int\limits_{\partial K^\pm} \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \leq q} |y_1|^{2(\beta+\alpha_1+\alpha_2-q)-1} \times$$

$$\times \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial s^{\alpha_2}} \Psi^\pm (y_1, s) \right|^2 dy_1 ds + \int\limits_{\partial K^\pm} \int\limits_{\partial K^\pm} \sum_{|\alpha|=q} \left| y_1^\beta \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial s^{\alpha_2}} \Psi^\pm (y_1, s) - \right.$$

$$\left. - \eta_1^\beta \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial \eta_1^{\alpha_1} \partial \zeta^{\alpha_2}} \Psi^\pm (\eta_1, \zeta) \right|^2 \frac{dy_1 ds d\eta_1 d\zeta}{|y_1-\eta_1|^2+|s-\zeta|^2} \Big\}^{1/2} \tag{2.15}$$

Сравнивая (2.1), (2.2) с (2.10), находим, что

$$u = U,\ \varphi = F + l(y, s, \partial/\partial y, \partial/\partial s)\, u,\ \psi^\pm = G^\pm - b(y, s, \partial/\partial y, \partial/\partial s)\, u \tag{2.16}$$

Используя утверждение б) леммы 1, из (2.13), (2.16) выводим следующую оценку

$$\|u;\ V_{\gamma,\beta}^{q+2}(K)\| \leq \mathrm{const}\, \{ \|F;\ V_\beta^q(K)\| +$$

$$+ \|G^\pm;\ V_\beta^{q+1/2}(\partial K^\pm)\| + \| |y|^{\beta-2} u;\ L_2(K) \| \} \tag{2.17}$$

Как обычно, при помощи метода Шварца замораживания коэффициентов, из приведенных рассуждений, эллиптичности в смысле А. Дуглиса, Л. Ниренберга [9] краевой задачи теории упругости получаем нетеровость оператора краевой задачи (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (1.8).

Для формулировки окончательного результата введем функциональные пространства $V_{\gamma,\beta}^{q+2}(\Omega)$, $V_\beta^q(\Omega)$ и $V_\beta^{q+1/2}(M^\pm)$, нормы в которых порождаются из норм (2.14), (2.15) разбиением единицы. Если носитель функции v отделен от ∂M, то ее норма вычисляется в $W_2^{q+2}(\Omega)$ ($W_2^q(\Omega)$ или $W_2^{q+1/2}(M^\pm)$), а если носитель мал и пересекается с ∂M, то норма v совпадает с нормой функции v^* в $V_{\gamma,\beta}^{q+2}(K)$ ($V_\beta^q(K)$ или $V_\beta^{q+1/2}(\partial K^\pm)$), которая получается из v после перехода к координатам (y_1, y_2, s).

Теорема 2. *Пусть выполнены соотношения* (1.7) *и* (2.4); $f \in V_\beta^q(\Omega)$, $g \in W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)$, $g^\pm \in V_\beta^{q+1/2}(M^\pm)$, E_*, $G \in C^{q+1}(\overline{\Omega})$ *и выполняется условие невырождения*

$$E_1 \leq E_* \leq E_2,\ G_1 \leq G \leq G_2,\ E_1,\ E_2,\ G_1,\ G_2 = \mathrm{const} > 0$$

Тогда существует единственное (с точностью до смещения Ω *как жесткого тела) решение* u *задачи* (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (1.8) *из пространства* $V_{\gamma,\beta}^{q+2}(\Omega)$. *Если нормировать это решение условиями*

$$\int\limits_\Omega u(x)\, dx = 0,\quad \int\limits_\Omega \operatorname{rot} u(x)\, dx = 0, \tag{2.18}$$

то справедливо неравенство

$$\| u;\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega) \| \leqslant c \{ \| f;\ V^{q}_{\beta}(\Omega) \| + \| g^{\pm};\ V^{q+1/2}_{\beta}(M^{\pm}) \| + \\ + \| g;\ W^{q+1/2}_{2}(\partial\Omega_0) \| \} \tag{2.19}$$

где постоянная c не зависит от g, $g^{\pm}$ и f.

Доказательство. В силу неравенств (2.4) всякое решение $u^0 \in V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega)$ однородной задачи упругости в Ω принадлежит $W^1_2(\Omega)$. Так как нулевой энергией обладают лишь жесткие смещения, то $u^0 = a + b \times x$, где a, b — постоянные векторы. Таким образом, сформулированная в теореме „единственность" доказана.

Если выполнены равенства (1.7), то существует решение задачи (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (1.8) из пространства $W^1_2(\Omega)$, подчиненное условиям (2.18). При помощи варианта неравенства Харди

$$\int_0^\infty r^{-1} |\log r|^{-2} |\zeta(r)|^2 dr \leqslant \text{const} \int_0^\infty r \left| \frac{\partial \zeta}{\partial r}(r) \right|^2 dr \quad (\zeta(r) = 0 \text{ при } r \geqslant r_0 > 0)$$

в силу соотношения $\gamma < \beta + 1$ получаем оценку

$$\| r^{\beta-\gamma} u;\ L_2(\Omega) \| \leqslant c_1 \| r^{-1}(|\log r| + 1)^{-1} u;\ L_2(\Omega) \| \leqslant c_2 \| u;\ W^1_2(\Omega) \|$$

которая вместе с (2.18) приводит к (2.19). Теорема доказана.

Замечание 1. Проверим, что неравенства (2.4) необходимы для нетеровости оператора A краевой задачи (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (1.8).

а). Пусть $\beta \in (q - 1/2,\ q + 1/2)$. Тогда вектор $(u_1, u_2, u_z) = (0, 0, c(s) r^{1/2} \cos\theta/2) \chi(r)$ не принадлежит $V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega)$ (см. лемму 1) при любой функции $c \in C^\infty(\partial M)$, но вектор соответствующих правых частей системы уравнений Ламэ попадает в $V^q_\beta(\Omega) \times V^{q+1/2}_\beta(M^{\pm})$. Таким образом, коядро A бесконечномерно. (В случае $\beta \in (q - k - 1/2,\ q - k + 1/2]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, аналогичные рассуждения необходимо провести для векторов $(0, 0, c(s) r^{k/2} \cos k\theta/2) \chi(r)$.

б). Если $\beta > q + 1$, то в $V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega)$ попадает решение задачи теории упругости в Ω для распределенной на ∂M с интенсивностью $c \in C^\infty(\partial M)$ силой. В терминах весовых пространств указанные решения удовлетворяют однородной краевой задаче (1.1), (1.2), (1.4)—(1.6), (1.8), и поэтому $\dim\ker A = \infty$. Если же $\beta = q + 1$, то постоянная c в неравенстве (2.5) зависит от V и Φ, $\Psi^{\pm}$ [10].

в). В случае $\gamma > q + 1$ оператор A не является непрерывным (см. лемму 1).

г). Для $\gamma \geqslant \beta + 1$ вектор $(u_1, u_2, u_z) = (c_1(s), c_2(s) c_3(s)) \chi(r)$ не принадлежит $V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega)$ при любых $c_j \in C^\infty(\partial M)$ и, как и в а), $\dim\operatorname{coker} A = \infty$.

3. *Задача ползучести.* Решение рассматривается на произвольном отрезке времени $[0, T]$.

Пусть B — банахово пространство. Как обычно, через $L^\infty(0, t; B)$ будем обозначать пространство отображений P отрезка $[0, T]$ в B, наделенное нормой

$$\| P;\ B,\ t\| = \operatorname*{ess\,sup}_{0\le\tau\le t} \| P(\tau);\ B\|$$

Не умаляя общности, будем считать функцию неоднородного старения неотрицательной, и пусть $T^* = \max\limits_{x\in\Omega} \varkappa(x)$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены следующие ограничения:*

а) *константы* q, γ, β *удовлетворяют неравенствам* (2.4);

б) *модули* E_*, $G \in C^{q+1}([0, T^*]\times\overline{\Omega})$ *и не вырождаются в* $\overline{\Omega}$;

в) *ядра релаксации представимы в виде*

$$R_i(t, \tau, x) = p_i(t, \tau, x)(t-\tau)^{-\mu} + q_i(t, \tau, x), \quad i=1, 2, \quad 0<\mu<1 \tag{3.1}$$

где p_i, $q_i \in C^{q+1}([0, T^*]\times[0, T^*]\times\overline{\Omega})$;

г) *функция* $\varkappa$ *принадлежит пространству* $C^{q+1}(\overline{\Omega})$;

д) *нагрузки* f, $g^\pm$, g *при почти всех* $t\in[0, T]$ *удовлетворяют условиям равновесия* (1.7), *и справедливы включения*

$$f\in L^\infty(0,\ T;\ V^q_\beta(\Omega)), \quad g^\pm \in L^\infty(0,\ T;\ V^{q+1/2}_\beta(M^\pm)),$$
$$g \in L^\infty(0,\ T;\ W^{q+1/2}_2(\partial\Omega_0))$$

Тогда существует единственное (с точностью до смещения тела, как жесткого целого) решение u *краевой задачи* (1.1)—(1.6) *из пространства* $L^\infty(0,\ T;\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega))$. *Если это решение при почти всех* $t\in[0, T]$ *нормируется условиями* (2.18), *то справедлива оценка*

$$\| u;\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega),\ \ T\| \leqslant cF(f,\ g^\pm,\ g) \tag{3.2}$$

где

$$F(f, g^\pm, g) = \| f;\ V^q_\beta(\Omega),\ T\| + \| g^\pm;\ V^{q+1/2}_\beta(M^\pm),\ T\| +$$
$$+ \| g;\ \ W^{q+1/2}_2(\partial\Omega_0),\ T\|$$

Здесь и далее буквой c *будем обозначать различные константы, не зависящие от* f, $g^\pm$, g.

Доказательство. Для краткости, запишем уравнения задачи ползучести в смещениях в операторной форме

$$\begin{gathered} Lu - L^r u + f = 0 \ \text{при}\ x\in\Omega, \\ B^\pm u - B^{r\pm} u = g^\pm \ \text{на}\ M^\pm, \quad Bu - B^r u = g \ \text{на}\ \partial\Omega_0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь L — оператор уравнений равновесия упруго-мгновенной задачи, L^r — оператор, содержащий все интегральные слагаемые, $B^\pm u$, Bu — векторы упруго-мгновенных поверхностных напряжений на $M^\pm$, $\partial\Omega_0$

соответственно, $B^{r\pm}u$, $B^r u$ — интегральные слагаемые векторов поверхностных напряжений.

Зафиксируем $t \in [0, T]$ и рассмотрим интегральные слагаемые $L^r u(t, \cdot)$, $B^{r\pm} u(t, \cdot)$, $B^r u(t, \cdot)$ как операторы, действующие из пространства $L^\infty(0, t; V^{q+2}_{\gamma, \beta}(\Omega))$ в пространства $V^q_\beta(\Omega)$, $V^{q+1/2}_\beta(M^\pm)$, $W^{q+1/2}_2(\partial\Omega_0)$ соответственно. Справедливы оценки:

$$\|L^r u(t, \cdot);\ V^q_\beta(\Omega)\| + \|B^{r\pm} u(t, \cdot);\ V^{q+1/2}_\beta(M^\pm)\| +$$

$$+ \|B^r u(t, \cdot);\ W^{q+1/2}_2(\partial\Omega_0)\| \leqslant c \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\mu} \|u;\ V^{q+2}_{\gamma, \beta}(\Omega), \tau\|\, d\tau \quad (3.4)$$

Здесь μ — константа из условий (3.1), c — зависит от области Ω, многообразия M, норм функций E_*, G, p_i, q_i, $\varkappa$ в пространствах C^{q+1}, а также времени T.

Действительно, из определения L^r и (1.1)—(1.6) следует, что компоненты $L^r_i u$ задаются выражениями

$$L^r_i u(t, x) = \int\limits_0^t \Big\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [E_*(t+\varkappa(x), x) R_2(t+\varkappa(x), \tau+\varkappa(x), x) \times$$

$$\times e(u)(\tau, x) + 2G(t+\varkappa(x), x) R_1(t+\varkappa(x), \tau+\varkappa(x), x) e_{ij}(u)(\tau, x)] \Big\} d\tau$$

(3.5)

Используя (3.1) и (3.5), получим, что производные порядка $|\alpha|$ от компонент $L^r_i u$ имеют следующую структуру:

$$D^\alpha_x L_i(t, x) = \int\limits_0^t \sum_{j=1}^3 \sum_{0 \leqslant |\xi| \leqslant |\alpha|+2} [(t-\tau)^{-\mu} P_{ij\xi} + Q_{ij\xi}] D^\xi_x u_j(\tau, x)\, d\tau \quad (3.6)$$

Здесь функции $P_{ij\xi}$, $Q_{ij\xi}$ содержат производные степени не выше $|\alpha|+1$ от функций E_*, G, p_i, q_i, $\varkappa$, и следовательно, равномерно ограничены при $|\alpha| \leqslant q$.

Переходя к криволинейным координатам (y_1, y_2, s) в окрестности D края ∂M, из (3.6) получим представления

$$D^\alpha_{ys} L^r_i u(t, y, s) = \int\limits_0^t \sum_{j=1}^3 \sum_{0 \leqslant |\xi| \leqslant |\alpha|+2} [(t-\tau)^{-\mu} P^*_{ij\xi} + Q^*_{ij\xi}] D^\xi_{ys} u_j(\tau, y, s)\, d\tau$$

(3.7)

Свойства функций $P^*_{ij\xi}$, $Q^*_{ij\xi}$ совпадают со свойствами функций $P_{ij\xi}$, $Q_{ij\xi}$.

Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_N$ — разбиение единицы, порождающее нормы в $V^q_\beta(\Omega)$, $V^{q+2}_{\gamma, \beta}(\Omega)$, $V^{q+1/2}_\beta(M^\pm)$. Из неравенства $\gamma > q$ следует, что несовой множитель $|y|^{\beta-1}$ при функции в определении нормы пространства $V_{1,\beta}^{q+2}$ при малых значениях y мажорирует весовой множитель $|y|^{\beta-q}$ при функции в определении нормы пространства V_β^q (см. (2.14)). Поэтому, используя представления (3.7) или (3.6) (в зависимости от того, пересекается или нет носитель функции χ_i с ∂M), при помощи неравенства Минковского получим

$$\|L^r u(t,\cdot);\ V_\beta^q(\Omega)\| \leqslant c\int\limits_0^t [(t-\tau)^{-\alpha}+1]\,\|u(\tau,\cdot);\ V_{1,\beta}^{q+2}(\Omega)\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t c\,(1+T^\alpha)(t-\tau)^{-\alpha}\,\|u;\ V_{1,\beta}^{q+2}(\Omega)\,\tau\|\,d\tau$$

Оценки норм векторов $B^{r\pm}u$, $B^r u$ проводятся аналогично; необходимо лишь воспользоваться соотношением [9, 11]

$$\|v;\ V_\beta^{q+1/2}(M^\pm)\| + \|v;\ W_2^{q+1/2}(\partial\Omega_0)\| \leqslant c\,\|v;\ V_\beta^{q+1}(\Omega)\|$$

Будем искать решение задачи (3.3) в виде ряда

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u^n(t,x) \tag{3.8}$$

элементы которого удовлетворяют краевым задачам с параметром t:

$$Lu^1 + f = 0 \text{ при } x\in\Omega,\ B^\pm u^1 = g^\pm \text{ при } x\in M^\pm,\ Bu^1 = g \text{ при } x\in\partial\Omega_0$$

$$Lu^n + f^{n-1} = 0 \text{ при } x\in\Omega,\ B^\pm u^n = g^{n-1\pm} \text{ при } x\in M^\pm,\ Bu^n = g^{n-1} \tag{3.9}$$

$$\text{при } x\in\partial\Omega_0$$

$$f^{n-1} = -L^r u^{n-1},\ g^{n-1\pm} = B^{r\pm}u^{n-1},\ g^{n-1} = B^r u^{n-1},\ n = 2, 3, 4\ldots \tag{3.10}$$

Нагрузки f^n, $g^{n\pm}$, g^n при всех t удовлетворяют условиям равновесия (1.7). В самом деле, если обозначить через $\sigma_{ij}^r(u)$ напряжения, порождаемые подстановкой смещений u в интегральные слагаемые закона ползучести (1.3), то в силу соотношений

$$f_i^n = \sigma_{ij,j}^r(u^n),\quad g_i^{n\pm} = -\sigma_{ij}^r(u^{n\pm})\,n_j^\pm,\quad g_i^n = -\sigma_{ij}^r(u^n)\,n_j$$

получим

$$\int\limits_\Omega f_i^n u_i^R\,dx + \int\limits_{M^\pm} g_i^{n\pm} u_i^R\,ds + \int\limits_{\partial\Omega_0} g_i^n u_i\,ds = -\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(u^n)\,\varepsilon_{ij}(u^R)\,d\Omega = 0$$

Будем считать, что при всяком t решения u^n рекуррентных соотношений (3.9) удовлетворяют условиям нормировки (2.18). По теореме 1 при $t\in[0, T]$ справедливо неравенство

$$\|u^1;\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega),\ t\| \leqslant cF \tag{3.11}$$

Из теоремы 1, (3.4) и определения (3.10) следует оценка для u^n через u^{n-1}

$$\|u^n;\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega),\ t\| \leqslant c\{\|f^{n-1};\ V^q_\beta(\Omega),\ t\| + \|g^{n-1};\ V^{q+1/2}_\beta(M^\pm),\ t\| + \|g^{n-1}_0;\ W^{q+1/2}_2(\partial\Omega_0),\ t\|\} \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\|u^{n-1};\ V^{q+2}_{\gamma,\beta}(\Omega),\ \tau\|\,d\tau,\ n = 2, 3,\ldots \tag{3.12}$$

Из (3.11), (3.12) и леммы 5 работы [13] следует сходимость ряда (3.8) и оценка (3.2). Теорема доказана.

ԵՐԿՉԱՓ ՃԱՔՈՎ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐՈՒՄ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՌԱՉԱՓ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈԵՐՑԻՏԻՎ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԸ ԿՇՌԵԼԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ, Բ. Ա. ՇՈՅԽԵՏ

Ամփոփում

Դիտարկվում են երկչափ ճաքով տիրույթում անհամասեռ ծերացող մարմնի առաձգականության և սողքի տեսության եռաչափ խնդիրները: Քանի որ ուսումնասիրվում է մարմնի ամբողջ եզրի վրա տրված լարումների դեպքը, ապա սովորական օգտագործվող կշռային տարածություններում համապատասխան մոդելային խնդիրը չի հանդիսանում միարժեք լուծելի, այդ պատճառով նորմայի սահմաններում ընտրվում են կշռելի բազմապատկիչներ և արտածվում են մացված կշռելի տարածություններում լուծման կոէրցիտիվ գնահատականներ: Այդ գնահատականները անհրաժեշտ են ճաքի եզրի շրջակայքում նշված խնդիրների լուծման ասիմպտոտիկայի ուսումնասիրման համար:

COERCIVE ESTIMATES FOR SOLUTIONS OF WEIGHT SPACES OF THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELASTIC AND CREEP THEORY IN THE REGION WITH A TWO-DIMENSIONAL CRACK

S. A. NAZAROV, B. A. SHOWKHET

Summary

Three-dimensional problems of the theory of elasticity and creep for non-homogeneously ageing media are considered in the region with two-dimensional crack. Since the secondary boundary-value problem is

investigated, the proper model problem cannot be solved in the usualls used weight spaces therefore suitable multiplicands are chosen in the definitions of the norm and coercive estimatds of solutions are developed. These estimates are necessary for the consideration of asymptotic behaviour of the solution of the problems in question.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев В. А.* О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в кусочно-гладкой области.— Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 10, с. 1831—1843.
2. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Об эллиптических краевых задачах в областях с кусочно-гладкой границей.— Тр. симпозиума по механике сплошных сред и родственным проблемам математического анализа (Тбилиси, 1971), т. 1, Тбилиси: Мецниереба, 1973, с. 171—181.
3. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 1, с. 33—36.
4. *Никишкин В. А.* Особенности решений задачи Дирихле для уравнения второго порядка в окрестности ребра.— Вестник МГУ, сер. мат., мех., 1979, № 2, с. 51—62.
5. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Эллиптические краевые задачи на многообразиях с особенностями.— Проблемы математического анализа, 1977, вып. 6, с. 85—142.
6. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1978, т. 37, с. 49—93.
7. *Арутюнян Н. Х., Назаров С. А., Шойхет Б. А.* Оценки и асимптотика напряженно-деформированного состояния трехмерного тела с трещиной в теории упругости и теории ползучести.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1365—1369.
8. *Арутюнян Н. Х.* О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 3, с. 569—571.
9. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the Boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II—Comm. Pure Appl. Math., 1964, vol. 17, p. 35—92.
10. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.— Тр. Московского математического общества, 1967, т. 16, с. 219—292.
11. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.— Mathematiche Nachrichten, 1977, Bd. 76, s. 29—60.
12. *Багиров А. А., Фейгин В. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с неограниченной границей.— Докл. АН СССР, 1973, т. 221, № 1, с. 23—26.
13. *Арутюнян Н. Х., Шойхет Б. А.* Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородно стареющих тел с односторонними связями.— Известия АН СССР, МТТ, 1981, № 3, с. 31—48.

Ленинградский госуниверситет
им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
27. VII. 1982