

КРУЧЕНИЕ СЕКТОРА КРУГОВОГО КОЛЬЦА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

ПОЛАДЯН Ф. М.

Рассматривается задача о кручении стержня с круговой осью и постоянным поперечным сечением, материал которого обладает свойством нелинейной наследственной ползучести [1].

Пусть рассматриваемый стержень находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R — радиус оси стержня), приложенных на торцевых сечениях (фиг. 1).

Впервые такая задача в постановке теории упругости рассматривалась в работе [2], а затем — в [3—6]. Аналогичная задача за пределом упругости для неупрочняющегося материала исследована в [7—9]. Для упрочняющегося материала эта задача исследована в работах [10—12].

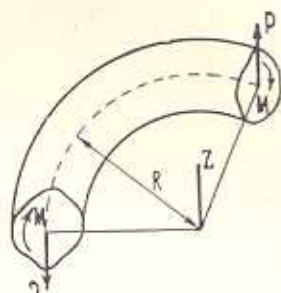
Кручение кривых стержней при нелинейной наследственной ползучести исследовано в работах [13—15].

§ 1. Основные уравнения задачи. В случае пространственного напряженного состояния связь между компонентами деформации ползучести и напряжения при нелинейной теории наследственности с учетом старения материала, согласно Н. Х. Арутюняну [1], имеет вид

$$2G(t) \varepsilon_{ij}(t) = s_{ij}(t) - \int_{\tau_0}^t s_{ij}(\tau) K_1(t, \tau) d\tau - \int_{\tau_0}^t s_{ij}(\tau) f[\sigma_0(\tau)] K(t, \tau) d\tau \quad (1.1)$$

где $G(t)$ — модуль мгновенной деформации сдвига; $\varepsilon_{ij}(t)$ — компоненты деформаций, $s_{ij}(t) = \tau_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma(t)$, $\tau_{ij}(t)$ — компоненты напряжения, δ_{ij} — символ Кронекера, $\sigma(t)$ — среднее давление, $f[\sigma_0(t)]$ — некоторая функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного материала, $\sigma_0(t)$ — интенсивность касательных напряжений,

$$K_1(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{G(t)}{G(\tau)} \right], \quad K(t, \tau) = 3G(t) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}$$



Фиг. 1.

$C(t, \tau)$ — мера ползучести при одноосном напряженном состоянии, τ — возраст материала в момент приложения нагрузки, t — время.

Воспользуемся цилиндрическими координатами.

Для компонентов деформации будем иметь [16]

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(t) &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta(t) = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \varepsilon_z(t) &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{r\theta}(t) = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ 2\varepsilon_{z\theta}(t) &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad 2\varepsilon_{rz}(t) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\end{aligned}\quad (1.2)$$

Перемещения представим в виде

$$\begin{aligned}u &= u_0 + \int \left[2r\varepsilon_{r\theta}(t) - r \frac{\partial v}{\partial r} + v \right] d\theta \\ v &= v_0 + \int [r\varepsilon_\theta(t) - u] d\theta \\ w &= w_0 + \int \left[2r\varepsilon_{z\theta}(t) - r \frac{\partial v}{\partial z} \right] d\theta\end{aligned}\quad (1.3)$$

где u_0, v_0, w_0 — произвольные функции r, z и t .

Положим, что все компоненты напряжения, за исключением $\sigma_{r\theta}(t)$ и $\sigma_{z\theta}(t)$, в любой момент времени t равны нулю, тогда из уравнений равновесия [16] остаются

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{r\theta}(t)}{\partial \theta} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{z\theta}(t)}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \sigma_{r\theta}(t)] + \frac{\partial}{\partial z} [r^2 \sigma_{z\theta}(t)] &= 0\end{aligned}\quad (1.4)$$

Из двух первых уравнений (1.4) следует, что напряженное состояние стержня не зависит от полярного угла θ . Тогда из соотношения (1.1) следует, что тензор деформации также не зависит от θ .

Подставляя (1.3) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, получим

$$\varepsilon_r(t) = \frac{\partial u_0}{\partial r}, \quad \varepsilon_z(t) = \frac{\partial w_0}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz}(t) = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial r}\quad (1.5)$$

и

$$2\varepsilon_{r\theta}(t) = \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r}, \quad 2\varepsilon_{z\theta}(t) = \frac{\partial v_0}{\partial z} - \frac{D(t)}{r}\quad (1.6)$$

где $D(t)$ — произвольная функция от t .

Из соотношения (1.6), исключая v_0 , получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\varepsilon_{z\theta}(t)}{r} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\varepsilon_{r\theta}(t)}{r} \right] = \frac{D(t)}{r^2}\quad (1.7)$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформаций, получим систему относительно u_θ , ω_θ . Решая эту систему и пользуясь (1.3), для перемещения получим

$$u = a(t) z \sin \theta, \quad v = v_0 + a(t) z \cos \theta, \quad w = -D(t) \theta - a(t) r \sin \theta$$

где $a(t)$ — функция от t , определяемая из условия закрепления стержня.

Вводя функцию напряжений

$$\sigma_{z\theta}(t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \sigma_{r\theta}(t) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (1.8)$$

при помощи соотношения (1.1) и уравнения (1.7) получим основное уравнение задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \int_{z_0}^z \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \left. \right] K_1(t, \tau) d\tau - \int_{z_0}^z \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{f(z_0)}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f(z_0)}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \right\} K(t, \tau) d\tau = -\frac{D(t) G(t)}{r^3} \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$z_0 = z_0(t) = \frac{1}{r^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2} \quad (1.10)$$

Так как боковая поверхность сектора кольца свободна от внешних сил, то $\Phi(r, z, t) = \text{const}$ на контуре. Для односвязной области без нарушения общности можно принять $\Phi(r, z, t) = 0$ на контуре. В случае многосвязной области на каждом контуре Φ принимает различные значения, зависящие только от t .

Таким образом, задача о кручении стержня с круговой осью в условиях нелинейной ползучести приводится к определению функции Φ из нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.9) при граничном условии

$$\Phi(r, z, t) = 0 \text{ на } \Gamma \quad (1.11)$$

Крутящий момент выражается формулой

$$M = \int_{\Omega} \int_0^R [(r-R) \sigma_{z\theta}(t) - z \sigma_{r\theta}(t)] d\Omega \quad (1.12)$$

Подставляя (1.8) в (1.12) и применяя формулу Грина-Остроградского, получим

$$M = - \oint_{\Gamma} \Phi d\left(\frac{z}{r}\right) + R \oint_{\Gamma} \frac{\Phi}{r^2} dz + 2R \int_{\Omega} \int_0^R \frac{\Phi}{r^3} d\Omega \quad (1.13)$$

Принимая $\Phi = 0$ на внешнем контуре, найдем

$$M = - \sum_{k=1}^n R \Phi_k(t) \oint_{\Gamma_k} \frac{dz}{r^2} + 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{r^3} d\Omega \quad (1.14)$$

Здесь $\Phi_k(t)$ — значение Φ на внутренних контурах Γ_k . Для односвязной области имеем [5, 11, 15]

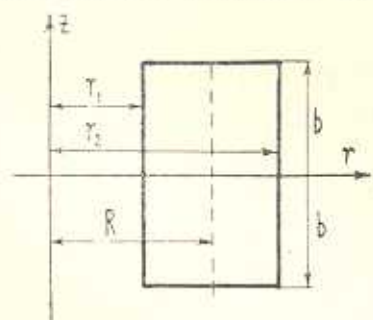
$$M = 2R \iint_{\Omega} \frac{\Phi}{r^3} d\Omega \quad (1.15)$$

§ 2. *Обобщение теоремы Бредта.* Пусть Γ_* — замкнутая кривая, целиком лежащая в поперечном сечении скручиваемого сектора кольца. Область, ограниченную контуром Γ_* , обозначим Ω_* . Интегрируя обе части уравнения (1.9) в области Ω_* и переходя к контурному интегралу, получим (при условии $G(t) = G = \text{const}$)

$$\int_{\Gamma_*} \frac{1}{r^3} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \int_{\Gamma_*} f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial \Phi}{\partial n} K(t, \tau) d\tau \right\} ds = - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_*} \frac{dz}{r^2} \quad (2.1)$$

где n — направление внешней нормали к контуру Γ_* , а s — дуга этого контура. Формула (2.1) представляет собой обобщение теоремы Бредта о циркуляции деформации сдвигов при кручении стержня с круговой осью при произвольном законе нелинейной связи между деформациями ползучести и напряжениями.

§ 3. *Прямоугольное сечение.* Рассмотрим случай, когда поперечное сечение представляет прямоугольник (фиг. 2). Тогда граничные условия (1.11) примут следующий вид:



Фиг. 2.

$$\begin{aligned} \Phi(r_1, z, t) = \Phi(r_2, z, t) = \Phi(r, b, t) = \\ = \Phi(r, -b, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Полагаем, что $f(\sigma_0)$ содержит физический параметр λ , нулевое значение которого соответствует линейной ползучести, то есть $f(\sigma_0) = 1$ при $\lambda = 0$. Закон нелинейности возьмем в виде

$$f[\sigma_0(t)] = 1 + \lambda [\sigma_0(t)]^2 \quad (3.2)$$

Предположим, что решение уравнения (1.9) является аналитической функцией параметра λ и попытаемся определить коэффициенты его разложения в ряд Тейлора по степеням λ . Положим

$$\Phi(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(r, z, t) \quad (3.3)$$

где $\Phi_0(r, z, t)$ соответствует случаю идеально упругого материала.

Для упрощения дальнейших выкладок принимаем

$$G(t) = G = \text{const}$$

Подставляя (3.3) в (1.9) и (1.10), после некоторых преобразований приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} = -\tau_n \quad (n=0, 1, \dots) \quad (3.4)$$

где

$$\varphi_0 = \varphi_0(t) = G \left[D(t) + \int_{\tau_1}^t D(\tau) R(t, \tau) d\tau \right]$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}(r, z, t) = \sum_{k=0}^n \int_{\tau_1}^t N(t, \tau) (\text{grad } \Phi_k \text{ grad } \omega_{n-k} - \omega_k \varphi_{n-k}) d\tau$$

$$(n=0, 1, \dots)$$

$$N(t, \tau) = K(t, \tau) + \int_{\tau_1}^t R(t, \xi) K(\xi, \tau) d\xi$$

$$\omega_n = r^{-4} \sum_{k=0}^n \text{grad } \Phi_k \text{ grad } \Phi_{n-k}$$

$R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K(t, \tau)$. При

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$$

$$R(t, \tau) = \gamma - \gamma'(\tau) + [\gamma''(\tau) + \gamma'^2(\tau) -$$

$$- \gamma \gamma'(\tau)] e^{\gamma(\tau)} \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma(x)} dx$$

$$\gamma(t) = \gamma \int_{\tau_1}^t [1 + 3G\varphi(\tau)] d\tau$$

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau} \quad (3.5)$$

здесь γ, C_0, A_1 — некоторые постоянные, характеризующие свойство ползучести материала, определяемые из опыта для данного материала.

Пользуясь (3.1) и (3.3), получим граничные условия для Φ_n :

$$\Phi_n(r_1, z, t) = \Phi_n(r_2, z, t) = \Phi_n(r, b, t) = \Phi_n(r, -b, t) = 0 \quad (3.6)$$

Решение уравнения (3.4) при условии (3.6) ищем в виде ряда

$$\Phi_n(r, z, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(r, t) \cos \mu_k z, \quad \text{где } \mu_k = \frac{2k-1}{2b} \pi \quad (3.7)$$

Тогда для коэффициентов этого ряда получим уравнения

$$\frac{\partial^2 A_{nk}(r, t)}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial A_{nk}(r, t)}{\partial r} - \mu_k^2 A_{nk}(r, t) = a_{nk}(r, t) \quad (3.8)$$

где

$$a_{nk}(r, t) = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_{nk}(r, \eta, t) \cos \mu_k \eta d\eta \quad (3.9)$$

Вводя новую функцию $B_{nk}(r, t)$ при помощи подстановки

$$A_{nk}(r, t) = r^2 B_{nk}(r, t) \quad (3.10)$$

уравнение (3.8) приведем к дифференциальному уравнению Бесселя [17]

$$r^2 \frac{\partial^2 B_{nk}(r, t)}{\partial r^2} + r \frac{\partial B_{nk}(r, t)}{\partial r} - [(r\mu_k)^2 + 4] B_{nk}(r, t) = a_{nk}(r, t) \quad (3.11)$$

а из (3.6), (3.7) и (3.10) получим граничные условия для новых функций $B_{nk}(r, t)$:

$$B_{nk}(r_1, t) = B_{nk}(r_2, t) = 0 \quad (3.12)$$

Решая уравнение (3.11) при граничных условиях (3.12) и переходя к $A_{nk}(r, t)$, получим

$$A_{nk}(r, t) = r^2 \int_{r_1}^{r_2} a_{nk}(\xi, t) \xi \Gamma_k(r, \xi) d\xi \quad (3.13)$$

где

$$\Gamma_k(r, \xi) = B_k(r, \xi) \text{ при } \xi \leq r, \quad \Gamma_k(r, \xi) = B_k(\xi, r) \text{ при } \xi \geq r$$

причем

$$B_k(r, \xi) = V_k^2(r, r_2) V_k^2(\xi, r_1) [V_k^2(r_2, r_1)]^{-1}$$

Здесь

$$V_k^2(r, z) = I_2(\mu_k r) K_2(\mu_k z) - I_2(\mu_k z) K_2(\mu_k r)$$

где $I_2(x)$ и $K_2(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента [17].

Далее, подставляя (3.13) в (3.7) и пользуясь (3.9), после некоторых преобразований окончательно получим

$$\Phi_n(r, z, t) = -\frac{r^2}{b} \int_{\Omega} \varphi_n(\xi, \eta, t) \Gamma(\xi, \eta; r, z) d\Omega \quad (3.14)$$

где $\Gamma(\xi, \eta; r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k(r, \xi) \cos \mu_k \eta \cos \mu_k z$ — функция Грина рассматриваемой задачи.

Для доказательства сходимости ряда (3.3) в области поперечного сечения стержня введем норму

$$\|X\| = \max |X| + \sup \frac{|X(M) - X(N)|}{|MN|^{\alpha}}$$

где M и N — произвольные точки внутри области $0 < \alpha < 1$. Применяя априорные оценки Шаудера и принцип максимума [18], которые в данном случае запишутся в виде $\|D^2 \Phi_n\| \leq c \|\Phi_n\|$, где c — некоторая постоянная, зависящая от геометрии области, аналогично [11, 13—15] показано, что

ряд (3.3) и ряды, составленные из производных $\sum_{n=0}^{\infty} i^n D \Phi_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} i^n D^2 \Phi_n$, сходятся абсолютно и равномерно с некоторым радиусом сходимости.

§ 4. *Тонкостенный стержень открытого профиля.* Пусть поперечное сечение тонкостенного кривого стержня — узкий прямоугольник, вытянутый по направлению оси z . В этом случае в уравнении (1.9) можно пренебречь производной по z и заменить его уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \int_{z_1}^t \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{f(z_0)}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] K(t, z) dz = - \frac{D(t) G}{r^3} \quad (4.1)$$

где

$$\sigma_0 = z_0(t) = z_{z_1}(t) = \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (4.2)$$

Интегрируя уравнение (4.1) и принимая во внимание, что $\sigma_0(t) = 0$ при $r = R$ и пользуясь (4.2), получим

$$\sigma_0(t) = \int_{z_1}^t f[z_0(z)] z_0(z) K(t, z) dz = D(z) G g \quad (4.3)$$

где

$$g = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r^2} \right)$$

Если к этому уравнению применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, то для $\sigma_0(t)$ получим

$$\begin{aligned} \sigma_0(t) = G g \left\{ H_0(t, z_1) + \lambda G g \left[H_1(t, z_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{z_1}^t H_1(z, z_1) R(t, z) dz \right] \right\} + O(\lambda^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$H_0(t, z_1) = D(t) + \int_{z_1}^t D(z) R(t, z) dz \quad (4.5)$$

$$H_1(t, z_1) = \int_{z_1}^t [H_0(z, z_1)]^2 K(t, z) dz$$

здесь приняли $f(\sigma_0) = 1 + \lambda \sigma_0$.

Пользуясь (1.12) и (4.4), получим

$$H_0(t, \tau_1) + \lambda k_1 \int_{\tau_1}^t \left\{ [H_1(\tau, \tau_1)]^2 + \int_{\tau_1}^{\tau} [H_0(x, \tau_1)]^2 R(\tau, x) dx \right\} K(t, \tau) d\tau = k_2 \quad (4.6)$$

где $k_1 = -G/2R$, $k_2 = M(2bhG)^{-1}$ ($2h$ — ширина прямоугольника).

Если к уравнению (4.6) применить вышеизложенный метод и удовлетвориться только первыми двумя приближениями, то для неизвестной функции $H_0(t, \tau_1)$ получим

$$H_0(t, \tau_1) = k_2 \left\{ 1 + \lambda k_1 k_2 \left[3GC(t, \tau_1) - \int_{\tau_1}^t \int_{\tau_1}^{\tau} R(t, x) K(t, \tau) dx d\tau \right] \right\} + O(\lambda^2)$$

Таким образом, значение $H_0(t, \tau_1)$ известно.

Решая интегральное уравнение (4.5) относительно $D(t)$, будем иметь

$$D(t) = H_0(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_0(\tau, \tau_1) K(t, \tau) d\tau$$

Рассмотрим задачу релаксации напряжений. В начальный момент стержню сообщим крутку $D(\tau_1)$, оставляя ее во времени неизменной. Тогда интегральное уравнение (4.3) примет вид

$$\sigma_0(t) - \int_{\tau_1}^t f[\sigma_0(\tau)] \sigma_0(\tau) K(t, \tau) d\tau = D(\tau_1) Gg \quad (4.7)$$

Если к этому уравнению применить вышеизложенный метод и удовлетвориться соответственно первыми двумя и первыми тремя приближениями, пользуясь (1.15), для определения релаксации крутящего момента получим следующие формулы:

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0^*(t, \tau_1) + \lambda k_2 \left[H_1^*(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t H_1^*(\tau, \tau_1) R(t, \tau) d\tau \right] + O(\lambda^2) \quad (4.8)$$

$$\frac{M(t)}{M(\tau_1)} = H_0^*(t, \tau_1) + \lambda k_2 \left[H_1^*(t, \tau_1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\tau_1}^t H_1(\tau, \tau_1) R(t, \tau) d\tau \Big] + k_2 k_4 \left[H_2(t, \tau_1) + \right. \\
 & \left. + \int_{\tau_1}^t H_2'(\tau, \tau_1) R(t, \tau) d\tau \right] + O(\beta^3)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

где

$$H_0'(t, \tau_1) = 1 - 3G\gamma \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1} \right) e^{s \cdot \tau_1} s^{1-p} \left[\Phi_*(st, p) - \Phi_*(s\tau_1, p) \right]$$

$$H_1'(t, \tau_1) = \int_{\tau_1}^t [H_0'(\tau, \tau_1)]^2 K(t, \tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
 H_2'(t, \tau_1) = & \int_{\tau_1}^t H_0'(\tau, \tau_1) \left[H_1'(\tau, \tau_1) + \right. \\
 & \left. + \int_{\tau_1}^{\tau} H_1'(x, \tau_1) R(\tau, x) dx \right] K(t, \tau) d\tau
 \end{aligned}$$

$$p = 3GA_1\gamma, \quad s = \gamma(1 + 3GC_0), \quad k_2 = -D(\tau_1)G/2R$$

$$k_4 = -1,5 [GD(\tau_1)]^2/R^2, \quad \Phi_*(z, p) = \int_0^z e^{-t} t^{-p} dt - \text{неполная гамма-функция.}$$

ция.

Для старого материала в (3.5) можно положить $\psi(\tau) = C_0$. Тогда из (4.7) получим замкнутое решение

$$\tau_0(t) = \frac{(\omega - x_2) x_1 - x_2 (\omega - x_1) \exp(-A_* (t - \tau_1)(x_1 - x_2))}{\omega - x_2 - (\omega - x_1) \exp(-A_* (t - \tau_1)(x_1 - x_2))}$$

где $\omega = D(\tau_1)Gg$, $A_* = 3GC_0g^2$, а x_1 и x_2 — корни уравнения

$$A_* x^2 + \gamma(1 + 3GC_0)x - \omega\gamma = 0$$

Аналогичным образом [14, 15], если принять $f(\tau_0) = 1 + k_2\tau_0^2$, то решение получается в квадратурах.

На ЭВМ «ЕС-1022» при значениях параметров

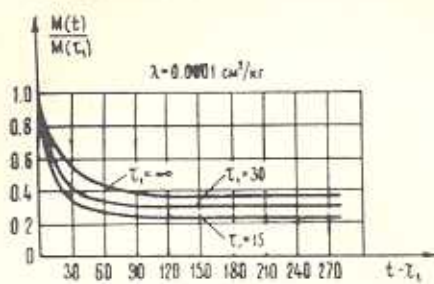
$$R = 6 \text{ см}; \quad 2h = 1,5 \text{ см}; \quad b = 5 \text{ см}; \quad 3G = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$

$$A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5}; \quad C_0 = 0,9 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma = 0,026; \quad M(\tau_1) = 400 \text{ кг} \cdot \text{см}$$

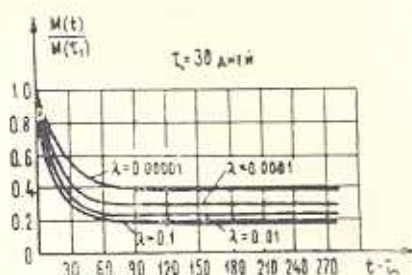
дано решение задачи о релаксации крутящего момента тонкостенного стержня.

Вычисления показывают, что значения $M(t)/M(\tau_1)$, полученные при помощи формул (4.8) и (4.9), почти совпадают, следовательно, в общем

решении основного уравнения можно ограничиться первыми двумя приближениями.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

На фиг. 3 и 4 показано изменение крутящего момента во времени при различных значениях τ , и λ .

ՈՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՐՈՎԱՅՔՈՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ
ՍԵԿՏՈՐԻ ՈՒՐՈՒՄԸ ՈՉ-ԳԵՄԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ֆ. Մ. ՓՈԼԱԴԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ուսումնասիրվում է ուղղանկյուն լայնական կտրվածքով շրջանային օղակի սեկտորի սյրումը ոչ-գծային ժառանգական սողքի դեպքում: Օգտագործելով գլանային կոորդինատները, կիսահակադարձային մեթոդով խնդիրը բերվում է լարումների ֆունկցիայի նկատմամբ ոչ-գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ համաբարձան, որի լուծումը փնտրվում է աստիճանային շարքի օգնությամբ և ապացուցվում է այդ շարքի զուգամիտությունը:

Բարակապատ ուղղանկյուն սյրոֆիլով շրջանային օղակի սեկտորի համար լուծված են սողքի և սեւբասացիայի խնդիրները: Վերջինիս համար բերված թվային օրինակների հիման վրա կատարված են սլորող մոմենտի գրաֆիկներ:

THE TORSION OF A RECTANGULAR CROSS-SECTION
CIRCULAR RING SECTORS UNDER NON-LINEAR CREEP

F. M. POLADIAN

S u m m a r y

The torsion of a rectangular cross-section with circular ring sectors is considered under non-linear hereditary creep. By using cylindric coordinates and the semi-reverse method the problem is reduced to the nonlinear integro-differential equation with respect to the stress function. The solution of this equation is obtained in the form of a power series and the convergence of the series is proved.

For a thin-walled core of a rectangular section the problem of creep and relaxation is solved. Graphs for relaxation are plotted on the basis of numerical examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: ГИТТЛ, 1952.
2. Göhner O. Spannungsverteilung in einem an den Endquerschnitten belasteten Ringstabsektor. Ingr—Arch., 1931, Bd2.
3. Freiburger W. The uniform torsion of an incomplete torus. —Austral. J. Scient. Res. Ser. A, 1949, vol. 2, № 3.
4. Larghaar H. L. Torsion of curved beams of rectangular cross section.—J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, № 1.
5. Рабинович А. А. Кручение элемента кругового кольца. Исследования по механике и прикладной математике.—Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1958, вып. 1.
6. Stein I. Stress analysis of a helical coil.—Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, № 1. (Рус. перев.: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1963, т. 30, № 1).
7. Freiburger W., Prager W. Plastic twisting of thick-walled circular ring sectors.—J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, № 3.
8. Wang A. J., Prager W. Plastic twisting of a circular ring sector.—J. Mech. and Phys. Solids, 1955, vol. 3.
9. Freiburger W. Elastic-plastic torsion of circular ring sectors.—Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, № 3.
10. Задоян М. А. Пластическое кручение неполного тора.—Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.
11. Задоян М. А. Пластическое кручение сектора кольца.—Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
12. Галчян П. В., Задоян М. А. Пластическое кручение кругового стержня с поперечным сечением в виде кольцевого сектора.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1979, т. 32, № 1.
13. Задоян М. А., Поладян Ф. М. Задача нелинейной ползучести кривого стержня при кручении.—Докл. АН Арм.ССР, 1980, т. 71, № 3.
14. Поладян Ф. М. Кручение кривой разностенной трубы при нелинейной ползучести.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1981, т. 34, № 2.
15. Поладян Ф. М. Кручение кривого полого стержня с криволинейными щелями при нелинейной ползучести.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1981, т. 34, № 3.
16. Новожилов В. В. Теория упругости. М.—Л.: Судстройиздат, 1962.
17. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.
18. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1965.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
10.11.1982