ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 3, 1983 Механика

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В КЛАССЕ ЗАДАЧ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

БРОВКО Г. Л.

В рамках общей теории пластичности А. А. Ильюшина [1] в качестве ее частного варианта [2] предложена теория упруго-пластических процессов малой кривизны, для которой проведен анализ постановки и методов решения краевых задач [3]. В отличие от теории малых упруго-пластических деформаций [4], обладающей целым рядом хорошо обоснованных и подробно изученных методов [5—7], в теории упруго-пластических процессов малой кривизны расчетная методика требует разработки. Для решения краевых задач этой теории [8] предложен метод последовательных приближений — метод семидискретизации [9]. В настоящей работе дано доказательство сходимости этого метода, одновременно устанавливающее существование решения краевых задач (единственность решения установлена в [10]) и некоторое свойство его гладкости. При доказательстве в основном используются подходы, методика и обозначения, принятые в работах [5—7, 11—14].

Краевая задача теории упруго-пластических процессов малой кривизны [8] описывает квазистатический процесс деформации начально недеформированного и ненапряженного изотропного упруго-пластического тела, занимающего область трехмерного пространства Ω с границей S, на отрезке времени $t \in [0, T]$ под действием объемных сил $F(x, t)$, заданных в $Q = \Omega \times [0, T]$, поверхностных сил $T_\nu(x, t)$, заданных на части $\Sigma_\sigma \equiv S_\sigma \times [0, T]$ поверхности $\Sigma \equiv S \times [0, T]$, при граничных скоростях перемещений $\psi(x, t)$, заданных на остальной части $\Sigma_u \equiv S_u \times [0, T]$ ($S_\sigma \cap S_u = S$) поверхности Σ. Задача состоит в отыскании вектор-функции скоростей перемещений точек тела $\mathbf{v}(x, t)$, тензора скоростей деформаций $v_{ij}(x, t)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x, t)$. Предполагается, что внешние нагрузки обеспечивают в каждой точке тела упруго-пластический процесс рассматриваемого класса (малой кривизны).

Доказательство сходимости метода проводится для обобщенной формулировки краевой задачи, выражающейся в операторном уравнении [8]

$$A\mathbf{v} = g \tag{1.1}$$

где A: $L_1([0, T], H(\Omega)) \to L_\infty([0, T], H^*(\Omega))$ — основной оператор краевой задачи теории, g — заданный элемент из $L_\infty([0, T], H^*(\Omega))$, определяемый внешними нагрузками, $\mathbf{v}$ — искомый элемент и $L_1([0, T], H(\Omega))$.

Согласно основной схеме метода семидискретизации [9] производится разбиение рассматриваемого интервала времени $[0, T]$ на N отрезков длины Δ точками $t_n = n\Delta$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, N;\ t_0 = 0,\ t_N = T)$, вводится кусочно-постоянное (семидискретное) приближенное представление $\mathbf{v}_{(\Delta)}(x, t)$ неизвестной вектор-функции скоростей точек тела $\mathbf{v}(x, t)$

$$\mathbf{v}_{(\Delta)}(x, t) \equiv \mathbf{v}^{(n)}(x) \text{ при } t \in (t_{n-1}, t_n] \quad (n = 1, 2, \cdots, N) \tag{1.2}$$

а также аналогичные представления других функций процесса, и относительно $\mathbf{v}^{(n)}(x)$ поэтапно для $n = 1, 2, ..., N$ решается рекуррентная последовательность краевых задач, выражающаяся при выполнении кинематических граничных условий интегральным соотношением

$$\iiint\limits_{\Omega} \sigma_{ij}^{\text{ср.}(n)}(x)\, \zeta_{ij}(x)\, d\Omega = \iiint\limits_{\Omega} F_i^{\text{ср.}(n)}(x)\, \zeta_i(x)\, d\Omega + $$

$$+ \iint\limits_{S_2} T_{\nu i}^{\text{ср.}(n)}(x)\, \zeta_i(x)\, dS \tag{1.3}$$

с произвольной мгновенной виртуальной скоростью $\zeta(x)$. В соотношении (1.3) величины $F_i^{\text{ср.}(n)} \equiv (F_i^{(n)} - F_i^{(n-1)})/\Delta$ и $T_{\nu i}^{\text{ср.}(n)} \equiv (T_{\nu i}^{(n)} - T_{\nu i}^{(n-1)})/\Delta$ — средние скорости изменения заданных внешних нагрузок на n-ом этапе, а приближенное значение средней скорости изменения напряжений на n-ом этапе $\sigma_{ij}^{\text{ср.}(n)} \equiv (\sigma_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n-1)})/\Delta$ выражается через искомую вектор-функцию $\mathbf{v}^{(n)}(x)$ в виде

$$\sigma_{ij}^{\text{ср.}(n)} = 2G\left[1 - \frac{s^{(n)}\omega(s^{(n)}) - s^{(n-1)}\omega(s^{(n-1)})}{s^{(n)} - s^{(n-1)}}\right] v_{ij}^{\prime(n)} + \tag{1.4}$$

$$+ 2Gs^{(n-1)}[1 - \omega(s^{(n-1)})](p_{ij}^{(n)} - p_{ij}^{(n-1)})/\Delta + 3Kv^{(n)}\delta_{ij}$$

где G и K — модули упругости материала, ω — функция Ильюшина [4], δ_{ij} — символ Кронекера; $v_{ij}^{\prime(k)}$, $v^{(k)}$, $s^{(k)}$, $p_{ij}^{(k)}$ — найденные из рекуррентной последовательности $(k < n)$ или искомые $(k = n)$ значения (функции от x) соответственно девиатора скоростей деформаций, скорости средней деформации, длины дуги траектории деформации и направляющего тензора скоростей деформаций на k-ом этапе, определенные конечными выражениями [9] от приближенного значения тензора скоростей деформаций на k-ом этапе $v_{ij}^{(k)} \equiv \frac{1}{2}(v_{i,j}^{(k)} + v_{j,i}^{(k)})$. Кроме того, предполагается, что

$$F_i^{(0)} \equiv 0,\ T_{\nu i}^{(0)} \equiv 0,\ s^{(0)} = 0,\ \sigma_{ij}^{(0)} = 0 \tag{1.5}$$

Основное расчетное соотношение (1.4) метода семидискретизации выражает зависимость в точке $x \in \Omega$ тензора $\sigma_{ij}^{\text{ср.}(n)}$ от тензора $v_{ij}^{(n)}$, приб лиженно описывающую в конечных приращениях активную деформацию (интенсивность скоростей деформаций $v_u^{(n)} = \left(\frac{2}{3} v_{ij}^{'(n)} v_{ij}^{'(n)}\right)^{1/2}$ отлична от нуля) окрестности точки тела в упруго-пластическом процессе малой кривизны. При $v_u^{(n)} \neq 0$ эта зависимость однозначна, непрерывна и имеет потенциал

$$\varphi^{(n)}(v_{ij}^{(n)}) = \frac{1}{\Delta}\left(\int_0^{\Delta s^{(n)}} \frac{\Phi(s^{(n-1)}+s) - \Phi(s^{(n-1)})}{\Delta} ds + \Phi(s^{(n-1)}) v_u^{(n)} - \right.$$

$$\left. - \sigma_{ij}^{(n-1)} v_{ij}^{'(n)} + \frac{9K}{2} v^{(n)2}\right) \tag{1.6}$$

где $\Delta s^{(n)} = s^{(n)} - s^{(n-1)} = v_u^{(n)}\Delta$, Φ — функция связи $\sigma_u \sim s$ для данного материала: $\Phi(s) = 3Gs[1 - \omega(s)]$. Для упрочняющихся упруго-пластических материалов зависимость (1.4) строго монотонна, и соответственно потенциал (1.6) — строго выпуклая функция от $v_{ij}^{(n)}$, квадратично возрастающая на бесконечности.

Решение задачи (1.3), (1.4) (предусматривающее активную деформацию почти во всех точках тела), очевидно, существует лишь для определенного класса приращений внешних нагрузок. Не задаваясь априорным выяснением вида таких нагрузок, доопределим потенциал (1.6) по непрерывности при $v_u^{(n)} = 0$, а зависимость (1.4) — до многозначного при $v_u^{(n)} = 0$ отображения, задаваемого множеством опорных гиперплоскостей к графику функции (1.6), (то есть допустим при расчете в общем случае также возможность «жесткой разгрузки») и, аналогично [15], вместо задачи (1.3), (1.4) будем рассматривать на n-ом этапе метода задачу о минимизации функционала

$$J^{(n)}[\mathbf{v}^{(n)}] \equiv \iiint_\Omega \varphi^{(n)}(v_{ij}^{(n)}(x))\, d\Omega - \iiint_\Omega F_i^{\text{ср.}(n)}(x)\, v_i^{(n)}(x)\, d\Omega -$$

$$- \iint_{S_\sigma} T_{\nu i}^{\text{ср.}(n)}(x)\, v_i^{(n)}(x)\, dS \tag{1.7}$$

на множестве кинематически возможных скоростей n-го этапа $\mathbf{v}^{(n)}$. Функционал (1.7) по свойствам аналогичен функционалам вязкопластичности, подробно изученным в [15]. Задача о минимизации (1.7) (с доопределенным потенциалом (1.6)) имеет решение $\mathbf{v}^{(n)}$ без существенных ограничений на вид приращений внешних нагрузок, и если при этом $v_u^{(n)} \neq 0$ почти всюду в Ω, то ее решение $\mathbf{v}^{(n)}$ есть также решение задачи (1.3), (1.4).

Теорема. Пусть заданные внешние нагрузки удовлетворяют условиям

$$F_i \in L_\infty([0, T], L_p(\Omega)), \quad T_{\nu i} \in L_\infty([0, T], L_q(S_\sigma)) \tag{1.8}$$

$$\dot{F}_i \in L_2([0, T], L_p(\Omega)), \quad \dot{T}_{\nu i} \in L_2([0, T], L_q(S_\sigma))$$

$$(p > 6/5, \ q \geq 4/3)$$

$$F_i(x, 0)=0, \ T_{\nu i}(x, 0)=0 \tag{1.9}$$

Пусть материал является инфинитезимально или начально упругим [16], и описывающая его пластические свойства функция ω Ильюшина [4] удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant \frac{s_1 \omega(s_1) - s_2 \omega(s_2)}{s_1 - s_2} \leqslant \frac{s_1' \omega(s_1') - s_2' \omega(s_2')}{s_1' - s_2'} \leqslant \lambda < 1 \tag{1.10}$$

для произвольных неотрицательных s_1, s_2, s_1', s_2' таких, что $s_1 \leqslant s_1'$, $s_2 \leqslant s_2'$, $s_1 \neq s_2$, $s_1' \neq s_2'$. Пусть для любого Δ решение $\mathbf{v}^{(n)}$ задачи n-го этапа метода семидискретизации ($n=1, 2, \cdots, N$) таково, что $v_n^{(n)} \neq 0$ почти всюду в Ω. Тогда операторное уравнение (1.1) имеет единственное решение $\mathbf{v} \in L_2([0, T], H(\Omega))$, последовательность семидискретных приближенных решений $\mathbf{v}_{(\Delta)}$ вида (1.2) сходится при $\Delta \to 0$ к решению $\mathbf{v}$ слабо в $L_2([0, T], H(\Omega))$, а последовательность кусочно-линейных по t функций

$$u_{(\Delta)i}^{*}(x, t) \equiv \int_0^t v_{(\Delta)i}(x, \tau)\, d\tau \tag{1.11}$$

сходится к функции перемещений

$$u_i(x, t) \equiv \int_0^t v_i(x, \tau)\, d\tau \tag{1.12}$$

сильно в $L_2([0, T], L_2(\Omega)) = L_2(Q)$ и почти всюду в $Q = \Omega \times [0, T]$, причем $u_{(\Delta)}^{*}, u \in C([0, T], H(\Omega))$.

Замечание 1. Из условия (1.8) следует [13], что

$$F_i \in C([0, T], L_p(\Omega)), \ T_{\nu i} \in C([0, T], L_q(S_\sigma)) \tag{1.13}$$

и поэтому значения (соответственно в $L_p(\Omega)$ и $L_q(S_\sigma)$) внешних нагрузок F_i и $T_{\nu i}$ при любом $t \in [0, T]$ существуют, в частности, формулы (1.9) имеют смысл.

Замечание 2. Поскольку в обобщенной постановке краевых задач [8] кинематические граничные условия предполагаются однородными, то в силу выбора функциональных пространств они всюду выполняются автоматически.

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях теоремы для любого разбиения отрезка $[0, T]$ (то есть для любого Δ) функция $\mathbf{v}_{(\Delta)}$ может быть построена, притом единственным образом, в соответствии с указанной схемой метода семидискретизации. Для этого методом математической индукции докажем существование и единственность решения $\mathbf{v}^{(n)} \in H(\Omega)$ задачи n-го этапа метода для всех $n = 1, 2, \cdots, N$.

Основанием индукции служит существование и единственность решения задачи (1.3), (1.4) (или задачи о минимизации функционала (1.7)) при $n = 1$. В этом случае в силу (1.5) соотношение (1.3) приводится к виду

$$\iiint_{\Omega} \sigma_{ij}^{(1)}(x)\,\zeta_{ij}(x)\,d\Omega=\iiint_{\Omega} F_i^{(1)}(x)\,\zeta_i(x)\,d\Omega+\iint_{S_2} T_i^{(1)}(x)\,\zeta_i(x)\,dS \tag{1.14}$$

где с учетом (1.9), (1.13) $F_i^{(1)}(x)\equiv F_i(x,\ t_1)$, $T_i^{(1)}(x)\equiv T_i(x,\ t_1)$, а выражение тензора напряжений на первом этапе через искомую вектор-функцию $\mathbf{v}^{(1)}$, получаемое из (1.4), имеет вид

$$\sigma_{ij}^{(1)}=2G\left[1-\omega\left(s^{(1)}\right)\right] v_{ij}^{\prime(1)}\Delta+3Kv^{(1)}\Delta\delta_{ij} \tag{1.15}$$

что в силу равенств $s^{(1)}=\Delta s^{(1)}=v_u^{(1)}\Delta$ представляет собой основное соотношение теории малых упруго-пластических деформаций [4] ($\sigma_{ij}^{(1)}$ — тензор напряжений, $э_{ij}^{(1)}\equiv v_{ij}^{\prime(1)}\Delta$ и $э_u^{(1)}\equiv v_u^{(1)}\Delta$ — девиатор и интенсивность деформаций, $\varepsilon^{(1)}\equiv v^{(1)}\Delta$ — средняя деформация). Следовательно, соотношения (1.14), (1.15) представляют не что иное, как соответствующую вариационному принципу Лагранжа [4] обобщенную формулировку некоторой краевой задачи теории малых упруго-пластических деформаций, существование и единственность в $H(\Omega)$ решения которой в условиях настоящей теоремы доказаны [5, 6]. Заметим, что если на рассматриваемом начальном этапе процесса $[0,\ t_1]$ деформации являются простыми [4, 16] или же не выходят за предел упругости, то полученное на этом этапе приближенное решение: перемещения $u_i^{(1)}(x)\equiv v_i^{(1)}(x)\Delta$, деформации $\varepsilon_{ij}^{(1)}(x)\equiv v_{ij}^{(1)}(x)\Delta$, напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}(x)$ — совпадает с точным решением в момент t_1: $u_i(x,\ t_1)$, $\varepsilon_{ij}(x,\ t_1)$, $\sigma_{ij}(x,\ t_1)$.

Основание индукции установлено.

При переходе от $n-1$ к n будем считать (индуктивное предположение), что найдены, притом единственным образом решения на всех предыдущих этапах метода:

$$\mathbf{v}^{(k)}\in H(\Omega)\quad k=1,\ 2,\cdots,n-1 \tag{1.16}$$

По условию теоремы $v_u^{(k)}\neq 0$ почти всюду в Ω. Тогда на основании неравенств Коши—Буняковского, неравества Корна и теорем вложения Соболева [11, 12, 15, 17] из (1.4), (1.6), (1.8), (1.10), (1.13), (1.16) с учетом определения функциональных пространств $H(\Omega)$ [7, 8] вытекает, что функционал (1.7) является непрерывным строго выпуклым на $H(\Omega)$, и при $\|v^{(n)}\|_{H(\Omega)}\to\infty$ имеем $J^{(n)}[v^{(n)}]\to\infty$. Следовательно, в силу известных теорем [12, 14) он имеет точку строгого минимума $\mathbf{v}^{(n)}\in H(\Omega)$, и таким образом, задача n-го этапа метода имеет единственное решение $v^{(n)}$. Теорема индуктивного перехода доказана.

Итак, для любого Δ существует единственная функция $v_{(\Delta)}$ вида (1.2), построенная по схеме метода семидискретизации. Условие $v_u^{(n)}\neq 0$ почти всюду в $\Omega\,(n=1,\ 2,\cdots,\ N)$ означает, что для всех $v^{(n)}$, наряду с экстремальностью (1.7) при условии (1.6), выполнены соотношения (1.3), (1.4).

Рассмотрим теперь последовательность таких функций $\{v_{(\Delta)}\}$ и покажем, что при $\Delta \to 0$ она является сходящейся, и ее предел есть обобщенное решение краевой задачи, то есть решение операторного уравнения (1.1).

Полагая в (1.3) $\zeta = \mathbf{v}^{(n)} \in H(\Omega)$, умножая обе части на Δ и суммируя по n от 1 до N, с учетом определения $F_i^{\text{ср.}(n)}$, $T_{\nu i}^{\text{ср}(n)}$ в [9] получаем

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta \iiint_{\Omega} \sigma_{ij}^{\text{ср.}(n)}(x)\, v_{ij}^{(n)}(x)\, d\Omega = \sum_{n=1}^{N} \iiint_{\Omega} \int_{t_{n-1}}^{t_n} F_i(x,\tau)\, d\tau \cdot v_i^{(n)}(x)\, d\Omega + \tag{1.17}$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \iint_{S_\sigma} \int_{t_{n-1}}^{t_n} T_{\nu i}(x,\tau)\, d\tau\, v_i^{(n)}(x)\, dS$$

откуда, используя (1.10) и (1.2), приходим к неравенству

$$2G(1-\lambda) \int_0^T \iiint_{\Omega} v'_{(\Delta)\,ij} v'_{(\Delta)\,ij}\, d\Omega dt + 9K \int_0^T \iiint_{\Omega} v^2_{(\Delta)}\, d\Omega dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \iiint_{\Omega} F_i \mathbf{v}_{(\Delta)\,i}\, d\Omega dt + \int_0^T \iint_{S_2} T_{\nu i}\, v_{(\Delta)\,i}\, dSdt \tag{1.18}$$

правая часть которого представляет собой на основании (1.8) в силу теорем Соболева [11, 17] линейный ограниченный функционал от $v_{(\Delta)} \in L_2([0,\ T],\ H(\Omega))$. Обозначая этот функционал как элемент сопряженного пространства $L_2([0,\ T], H^*(\Omega))$ через g^*, получаем из (1.18) оценку

$$\|\mathbf{v}_{(\Delta)}\|_{L_2([0,\ T],\ H(\Omega))} \leqslant C \tag{1.19}$$

где константа $C = (2G(1-\lambda)/3)^{-1} \|g^*\|_{L_2([0,\ T],\ H^*(\Omega))}$ не зависит от Δ.

Оценка (1.19) показывает, что последовательность $\{v_{(\Delta)}\}$ при $\Delta \to 0$ ограничена в $L_2([0,\ T],\ H(\Omega))$. В силу свойства слабой компактности ограниченных множеств, следующего [18] из рефлексивности пространства $L_2([0,\ T],\ H(\Omega))$, последовательность $\{v_{(\Delta)}\}$ имеет в $L_2([0,\ T],\ H(\Omega))$ слабую предельную точку, и можно считать, что она является сходящейся[1]. Обозначим предел этой последовательности через v. Поскольку из слабой сходимости в $L_2([0,\ T],\ H(\Omega))$ следует слабая сходимость в $L_1([0,\ T],\ H(\Omega))$, имеем

$$\mathbf{v}_{(\Delta)} \to \mathbf{v} \quad \text{слабо в } L_1([0,\ T],\ H(\Omega)) \tag{1.20}$$

---

[1]) Точнее говоря, существует сходящаяся подпоследовательность, которую мы также можем обозначить через $\{v_{(\Delta)}\}$. Однако ввиду выполнения условий единственности решения [10] не требуется специально выделять в $\{v_{(\Delta)}\}$ сходящуюся подпоследовательность.

Далее, следуя определениям семидискретных приближений типа (1.2) функций процесса [9], с помощью (1.19) для функций $\sigma_{(\Delta)ij}(x, t)$ нетрудно получить для произвольного $n = 1, 2, \cdots, N$ и произвольного $t \in (t_{n-1}, t_n]$ (то есть для произвольного $t \in [0, T]$) следующую оценку[1]:

$$\|\sigma_{(\Delta)ij}\|_{(L_2(\Omega))^9} \leqslant C_1 \tag{1.21}$$

где постоянная $C_1 = C'TC^2$ одна и та же для всех $t \in [0, T]$ и не зависит от Δ (C' — положительная постоянная, зависящая только от модулей G и K; C — та же константа, что и в (1.19)). Это показывает ограниченность последовательности $\{\sigma_{(\Delta)ij}\}$ при $\Delta \to 0$ в $L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9)$. По теореме Данфорда-Петтиса [19] это пространство является сопряженным к сепарабельному банахову пространству $L_1([0, T], (L_2(\Omega))^9)$, и следовательно, в $L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9)$ выполняется свойство * — слабой компактности ограниченных множеств. Поэтому на основании (1.21) можем аналогично (1.20) считать последовательность $\{\sigma_{(\Delta)ij}\}$ *— слабо сходящейся в $L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9)$ к некоторому элементу σ_{ij}:

$$\sigma_{(\Delta)ij} \to \sigma_{ij} \quad * \text{— слабо в } L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9) \tag{1.22}$$

Поскольку $\sigma_{(\Delta)ij}, \sigma_{ij} \in L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9)$, то они определяют собой некоторые ограниченные линейные функционалы $\sigma_{(\Delta)}$ и σ соответственно над $L_1([0, T], H(\Omega))$, задаваемые формулами

$$\langle \sigma_{(\Delta)}, \xi \rangle = \int_0^T \iiint_\Omega \sigma_{(\Delta)ij} \xi_{ij} \, d\Omega dt, \quad \langle \sigma, \xi \rangle = \int_0^T \iiint_\Omega \sigma_{ij} \xi_{ij} \, d\Omega dt \tag{1.23}$$

для любой $\xi \in L_1([0, T], H(\Omega))$, то есть $\sigma_{(\Delta)}, \sigma \in (L_1([0, T], H(\Omega)))^* = L_\infty([0, T], H^*(\Omega))$. Из (1.22), (1.23) легко получить сходимость

$$\sigma_{(\Delta)} \to \sigma, \quad * \text{— слабо в } L_\infty([0, T], H^*(\Omega)) \tag{1.24}$$

Покажем теперь, что предельная функция в (1.22) (функционал в (1.24)) удовлетворяет условиям равновесия в форме принципа виртуальных работ [8]. Умножая обе части (1.3) на Δ и суммируя по n по 1 до m ($1 \leqslant m \leqslant N$), с учетом (1.5), а также определений в [9] для произвольного $m = 1, 2, \ldots, N$ получаем

$$\iiint_\Omega \sigma_{ij}^{(m)}(x) \zeta_{ij}(x) \, d\Omega = \iiint_\Omega F_i^{(m)}(x) \zeta_i(x) \, d\Omega + \iint_{S_2} T_i^{(m)}(x) \zeta_i(x) \, dS \tag{1.25}$$

---

[1]) Через $(L_2(\Omega))^9$ обозначено прямое произведение девяти гильбертовых пространств $L_2(\Omega)$.

что выражает для семидискретного приближения напряжений $\sigma_{(\Delta)ij}$ выполнение условия равновесия в форме принципа виртуальных мощностей [8] с семидискретными приближенными нагрузками $F_{(\Delta)i}$, $T_{\nu(\Delta)i}$.

Далее, рассмотрим произвольную непрерывную абстрактную функцию

$$\xi \in C([0, T], H(\Omega)) \tag{1.26}$$

Обозначим через $\xi_{(\Delta)}(x, t)$ ее семидискретное приближение вида (1.2), положив $\xi^{(n)}(x) \equiv \xi(x, t_n)$. Подставляя в (1.25) $\xi = \xi^{(m)} \in H(\Omega)$, умножая обе части на Δ и суммируя по m от 1 до N, получаем

$$\int_0^T \iiint_\Omega \sigma_{(\Delta)ij}(x, t)\, \xi_{(\Delta)ij}(x, t)\, d\Omega dt = \tag{1.27}$$

$$= \int_0^T \iiint_\Omega F_{(\Delta)i}(x, t)\, \xi_{(\Delta)i}(x, t)\, d\Omega dt + \int_0^T \iint_{S_\sigma} T_{\nu(\Delta)i}(x, t)\, \xi_{(\Delta)i}(x, t)\, dSdt$$

При $\Delta \to 0$ имеет место (1.22), а также сходимости: $\xi_{(\Delta)} \to \xi$ сильно в $L_1([0, T], H(\Omega))$, $\xi_{(\Delta)ij} \to \xi_{ij}$ сильно в $L_1([0, T], (L_2(\Omega))^9)$, $F_{(\Delta)i} \to F_i$ в $L_\infty([0, T], L_p(\Omega))$, $T_{\nu(\Delta)i} \to T_{\nu i}$ в $L_\infty([0, T], L_q(S_\sigma))$, где $p > 6/5$, $q \geqslant 4/3$. Отсюда на основании (1.27) в пределе при $\Delta \to 0$ приходим к неравенству

$$\int_0^T \iiint_\Omega \sigma_{ij}(x, t)\, \xi_{ij}(x, t)\, d\Omega dt = \tag{1.28}$$

$$= \int_0^T \iiint_\Omega F_i(x, t)\, \xi_i(x, t)\, d\Omega dt + \int_0^T \iint_{S_\sigma} T_{\nu i}(x, t)\, \xi_i(x, t)\, dSdt$$

для любой функции вида (1.26). А поскольку множество функций вида (1.26) слабо плотно в $L_1([0, T], H(\Omega))$, то (1.28) имеет место для любой $\xi \in L_1([0, T], H(\Omega))$, что и означает выполнение для предельной функции $\sigma_{ij}(x, t)$ условий равновесия в форме принципа виртуальных работ. С учетом (1.23), а также определения функционала g виртуальной работы внешних сил [8], фигурирующего также в (1.1), можем записать (1.28) в виде

$$\sigma = g \text{ в } L_\infty([0, T], H^*(\Omega)) \tag{1.29}$$

Покажем, наконец, что для предельных функций $\mathbf{v}$ из (1.20) и σ из (1.24) на самом деле выполнено соотношение

$$\sigma = A\mathbf{v} \tag{1.30}$$

где A — основной оператор краевой задачи теории упруго-пластических процессов малой кривизны [8]. Иными словами, покажем, что для предельных функций $\sigma_{ij}(x, t)$ и $\mathbf{v}(x, t)$ выполнены соотношения этой теории

[8]. Подставляя в (1.25) $\xi = \mathbf{v}^{(m)} \in H(\Omega)$, умножая обе части на Δ и суммируя по m от 1 до N, с учетом представлений вида (1.2) имеем

$$\int_0^T \iiint_\Omega \sigma_{(\Delta)\,ij}(x, t)\, v_{(\Delta)\,ij}(x, t)\, d\Omega dt = \tag{1.31}$$

$$= \int_0^T \iiint_\Omega F_{(\Delta)\,i}(x, t)\, v_{(\Delta)\,i}(x, t)\, d\Omega dt + \int_0^T \iint_{S_2} T_{\nu\,(\Delta)i}(x, t)\, v_{(\Delta)\,i}(x, t)\, dS dt$$

или в обобщенной записи

$$\langle \sigma_{(\Delta)}, v_{(\Delta)} \rangle = \langle g_{(\Delta)}, v_{(\Delta)} \rangle \tag{1.32}$$

В силу замечания 1 при $\Delta \to 0$ $F_{(\Delta)\,i} \to F_i$ сильно в $L_\infty([0, T], L_p(\Omega))$, $T_{\nu\,(\Delta)\,i} \to T_{\nu i}$ сильно в $L_\infty([0, T], L_q(S_2))$, где $p > 6/5$, $q \geqslant 4/3$, и следовательно, $g_{(\Delta)} \to g$ сильно в $L_\infty([0, T], H^*(\Omega))$. Кроме того, имеет место (1.20). Следовательно, $\langle g_{(\Delta)}, \mathbf{v}_{(\Delta)} \rangle \to \langle g, \mathbf{v} \rangle$, то есть в силу (1.29), (1.32)

$$\langle \sigma_{(\Delta)}, \mathbf{v}_{(\Delta)} \rangle \to \langle \sigma, \mathbf{v} \rangle \tag{1.33}$$

Введем обозначения

$$s^*_{(\Delta)}(x, t) \equiv \int_0^t v_{u(\Delta)}(x, \tau)\, d\tau,\quad \varepsilon^*_{(\Delta)}(x, t) \equiv \int_0^t v_{(\Delta)}(x, \tau)\, d\tau \tag{1.34}$$

и рассмотрим функцию

$$\sigma^*_{(\Delta)ij}(x, t) = 2G s^*_{(\Delta)}(x, t)[1 - \omega(s^*_{(\Delta)}(x, t))]\, p_{(\Delta)ij}(x, t) + 3K \varepsilon^*_{(\Delta)}(x, t)\, \delta_{ij} \tag{1.35}$$

выражающуюся через $v_{(\Delta)\,ij}$ как тензор напряжений через тензор скоростей деформаций по соотношениям теории упруго-пластических процессов малой кривизны. Легко видеть [8], что справедливо формальное равенство

$$\langle A\mathbf{v}_{(\Delta)}, \xi \rangle = \int_0^T \iiint_\Omega \sigma^*_{(\Delta)\,ij}(x, t)\, \xi_{ij}(x, t)\, d\Omega dt \tag{1.36}$$

где A — основной оператор теории. Очевидно, что $\sigma^*_{(\Delta)\,ij} \in L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9)$. На основании определения семидискретных приближений функций процесса [9], а также соотношений (1.10), (1.19), (1.34), (1.35) можно получить следующую равномерную по $t \in [0, T]$ оценку близости функций $\sigma_{(\Delta)\,ij}$ и $\sigma^*_{(\Delta)\,ij}$ при $\Delta \to 0$:

$$\| \sigma_{(\Delta)ij} - \sigma^*_{(\Delta)\,ij} \|^2_{(L_2(\Omega))^9} \leqslant (\Delta/T)\, C_1 \tag{1.37}$$

где постоянная C_1 та же, что и в (1.21). Из (1.37) видно, что при $\Delta \to 0$ разность $(\sigma_{(\Delta)\,ij} - \sigma^*_{(\Delta)\,ij}) \to 0$ сильно в $L_\infty([0, T], (L_2(\Omega))^9)$, а следовательно, в силу (1.23), (1.36) имеем

$$(\sigma_{(\Delta)} - Av_{(\Delta)}) \to 0 \text{ сильно в } L_\infty([0, T], H^*(\Omega)) \tag{1.38}$$

На основании (1.19), (1.20), (1.24), (1.33), (1.38) получаем

$$A\mathbf{v}_{(\Delta)} \to \sigma \ *\text{— слабо в } L_\infty([0, T], H^*(\Omega)), \ \langle A\mathbf{v}_{(\Delta)}, \mathbf{v}_{(\Delta)} \rangle \to \langle \sigma, \mathbf{v} \rangle \tag{1.39}$$

В силу монотонности оператора A [10] имеем

$$\langle A\xi - A\mathbf{v}_{(\Delta)}, \xi - \mathbf{v}_{(\Delta)} \rangle \geqslant 0 \quad \forall \xi \in L_1([0, T], H(\Omega)) \tag{1.40}$$

Переходя в (1.40) к пределу при $\Delta \to 0$ с учетом (1.39), получаем неравенство $\langle A\xi - \sigma, \xi - \mathbf{v} \rangle \geqslant 0$ для любой $\xi \in L_1([0, T], H(\Omega))$, откуда следует [14] доказываемое соотношение (1.30).

Итак, на основании (1.20), (1.29), (1.30) заключаем, что последовательность семидискретных приближений $\{\mathbf{v}_{(\Delta)}\}$ при $\Delta \to 0$ имеет предел $\mathbf{v}$, и этот предел удовлетворяет операторному уравнению (1.1), то есть является обобщенным решением краевой задачи теории упруго-пластических процессов малой кривизны [8]. Как доказано [10], полученное решение является единственным.

Далее, в силу неравенства Корна, справедливого [12, 15, 17] для функций из $H(\Omega)$, имеем: $v_{(\Delta)i}, v_i \in L_2([0, T], W_2^{(1)}(\Omega))$ и, в частности, $v_{(\Delta)i}, v_i \in L_2([0, T], L_2(\Omega)) = L_2(Q)$. Следовательно, функции (1.11), (1.12), а также их первые производные принадлежат классу $L_2(Q)$, то есть, таким образом, $\dot{u}_{(\Delta)i}, u_i \in W_2^{(1)}(Q)$. На основании (1.19), (1.20) можно установить, что функции $u^{*}_{(\Delta)i}$ составляют ограниченное множество в $W_2^{(1)}(Q)$ и $u^{*}_{(\Delta)i} \to u_i$ слабо в $W_2^{(1)}(Q)$. По теореме Реллиха-Кондрашова [20] вложение $W_2^{(1)}(Q)$ в $L_2(Q)$ компактно. Следовательно, последовательность $u_{(\Delta)i} \to u_i$ сильно в $L_2(Q)$ и почти всюду в Q. Кроме того, из известных теорем [13, 18] следует что функции $u^{*}_{(\Delta)}$, $u \in C([0, T], H(\Omega))$. Таким образом, $\{u^{*}_{(\Delta)}\}$ есть последовательность непрерывных абстрактных функций, сходящаяся при каждом $t \in [0, T]$ почти всюду в Ω к непрерывной абстрактной функции u.

Теорема доказана.

В уточнение замечания 1 можно отметить, что условия (1.8) на внешние нагрузки F_i и T_{vi} краевой задачи означают, что они являются непрерывными по Гельдеру (с гельдеровой константой $\alpha > 1/2$) отображениями из $[0, T]$ в пространства Лебега $L_p(\Omega)$ и $L_q(S_\sigma)$ соответственно (пространства классов функций, суммируемых со степенями p и q). Условия (1.8) выполняются для весьма широкого класса внешних нагрузок.

Требование в условии теоремы инфинитезимальной или начальной упругости материала, а также условия (1.10), означающие возрастание и выпуклость (невогнутость) кривой $\sigma_u \sim s$, и являющиеся частным случаем известных [4] свойств функции ω, выполняются для широкого класса упрочняющихся упруго-пластических материалов. Более того, отметим, что в первой части доказательства теоремы (при доказательстве возможности построения, притом единственным образом, функции $\mathbf{v}_{(\Delta)}$ для любого Δ) свойство выпуклости кривой $\sigma_u \sim s$ не использовалось, а во второй части доказательства теоремы (при установлении соотношения (1.30)) оно использовалось лишь как достаточное условие монотонности основного оператора A, примененной притом в заключении довольно общего характера. Это позволяет предположить, что требование выпуклости (невогнутости) кривой $\sigma_u \sim s$ в условии теоремы может быть ослаблено.

Требуемые в условиях теоремы для любого Δ неравенства $v_u^{(n)} \neq 0$ ($n = 1, 2, \ldots, N$) почти всюду в Ω исключают возможность появления в теле зон разгрузки (признаком которых может служить появление при расчетах на n-ом этапе метода «жестких зон» с $v_u^{(n)} = 0$, определяемых решением $\mathbf{v}^{(n)}$ задачи о минимизации функционала (1.7) с доопределенным потенциалом (1.6)) и тем самым регламентирует множество способов изменения по времени задаваемых полей внешних нагрузок. Проверка выполнения неравенства $v_u^{(n)} \neq 0$ почти всюду в Ω с одновременной оценкой малости вычисляемых приближенных значений кривизны траекторий деформации непосредственно в ходе расчетов на каждом этапе метода семидискретизации может служить для задаваемых внешних нагрузок расчетным критерием того, что в каждой точке тела обеспечен упруго-пластический процесс малой кривизны. Выяснение вида внешних нагрузок, обеспечивающих такое неравенство, представляется необходимым при теоретическом исследовании условий упруго-пластического процесса малой кривизны.

Приведенное в настоящей работе доказательство теоремы может служить основой при рассмотрении вопроса о сходимости приближенных решений различных модификаций метода семидискретизации [9]. Использованные методы и подходы могут быть плодотворными также при исследовании других классов нелинейных краевых задач механики деформируемого твердого тела.

ՊԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԴԱՍՈՒՄ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Գ. Լ. ԲՐՈՎԿՈ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բերվում է հաջորդական մոտավորությունների մեթոդի զուգամիտության ապացույցը փոքր կորության առաձգա-պլաստիկ պրոցեսների տեսության եզրային խնդիրների համար, ցույց է տրվում եզրային խնդիրների լուծման գոյությունը և ողորկության մի քանի հատկությունները: Ապացուցման ընթացքում օգտագործվում են ֆունկցիոնալ անալիզի մեթոդները: Արտաքին բեռերի, ինչպես նաև նյութի պլաստիկ հատկությունների (սկզբնական առաձգականության, ամրացման, $\sigma_u \sim s$ կախվածության կորի ուռուցիկության) վրա պահանջվող պայմանները սահմանափակող չեն: Առաջարկվում է մարմնում փոքր կորության առաձգա-պլաստիկ պրոցեսների իրականացման հաշվարկային հայտանիշ, որը ստուգվում է անմիջականորեն հաշվումների ընթացքում:

ON THE CONVERGENCE OF ONE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATION IN THE CLASS OF BOUNDARY PROBLEMS OF GENERAL PLASTICITY

G. L. BROVKO

Summary

In the framework of the theory of small-curvature elastoplastic processes we give the proof of a convergence towards the method of successive approximation (the method of semidiscretization); the establiching of the existence and certain properties of smoothness in the solution of the boundary value problem. To obtain the proof modern methods of functional analysis are used. The required loading conditions as well as the limitations to the properties of a plastic material (infinitesimal or initial elasticity, work-hardening with the convex (non-concave) curve) are found in a wide range. The calculative criterion of realization of the small-curvature elastoplastic processes in the body is given verified immediately during the calculation scheme of the method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* О соотношениях и методах современной теории пластичности. В сб.: «Успехи механики деформируемых сред». М.: Наука, 1975, с. 240—255.
3. *Бровко Г. Л.* Анализ постановки и методы решения краевых задач теории упругопластических процессов малой кривизны. Автореф. канд. дисс. М.: МГУ, 1978.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность, Ч. 1. М.—Л.: ГИТТЛ, 1948.
5. *Быков Д. Л.* О некоторых методах решения задач теории пластичности. В сб., «Упругость и неупругость». Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 1975, с. 119—139.
6. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений.— Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4.
7. *Бровко Г. Л., Ленский В. С.* О сходимости метода однородных линейных приближений в задачах теории пластичности неоднородных тел.— ПММ, 1972, т. 36, № 3.
8. *Бровко Г. Л.* О постановке краевых задач теории упруго-пластических процессов малой кривизны.— Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1980, № 4, с. 80—83.
9. *Бровко Г. Л.* Об одном методе последовательных приближений в классе задач общей теории пластичности.— Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1982, № 6.
10. *Бровко Г. Л.* Теорема единственности в теории упруго-пластических процессов малой кривизны.— Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1980, № 5, с. 70—74.
11. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
12. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Физматгиз, 1952.
13. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
14. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.
15. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.
16. *Бровко Г. Л.* Необходимые и достаточные условия однородно простой деформации.— ПММ, 1978, т. 42, № 4, с. 701—710.

17. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
18. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
19. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
20. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
12.X.1981