ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 3, 1983 Механика

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

БАБАДЖАНЯН Г. А.

§ 1. *Уравнения движения и краевые условия*

Рассматривается нестационарное изотермическое одномерное течение несжимаемой вязкой жидкости в трубах (плоской и цилиндрической) с проницаемыми стенками.

Причины, вызывающие нестационарное движение жидкости в трубопроводах, могут быть различными. К ним относятся переменное потребление жидкости, включение и выключение буферных потребителей и компрессорных агрегатов, перекрытие запорных устройств, появление аварийных утечек жидкости из трубопровода и другие.

Дифференциальные уравнения, описывающие вышеуказанное движение, [1]

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\xi\rho u^2}{4h}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+k\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{k\alpha(p-p_a)}{2h}=0 \tag{1.1}$$

для плоской трубы и

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\xi\rho u^2}{4a}\,^{*}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+k\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2k\alpha(p-p_a)}{a}=0 \tag{1.2}$$

для цилиндрической трубы.

Первые уравнения в системах (1.1) и (1.2) устанавливают равенство между перепадом давления вдоль трубы и трением, обусловленным вязкостью.

Вторые — являются уравнениями неразрывности с учетом проницаемости стенок трубы [2].

В системе уравнений (1.1) и (1.2) p и u — соответственно средние по сечению трубы давление и скорость течения, ξ — коэффициент сопро-

---

* При выводе первого уравнения системы (1.2) не учтен член $\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t}$, так как нами рассматриваются «длинные» трубы [2].

тивления трения, $2h$ — ширина плоской трубы, $p_в$ — внешнее давление, k — модуль объемного сжатия, учитывающий упругость и проницаемость стенок трубы, a — радиус цилиндрической трубы, x — направление потока, t — время, α — коэффициент, показывающий степень проницаемости стенок трубы ($p_в$ и α, а следовательно, и k вдоль трубы принимаются постоянными).

Если $p - p_в > 0$, имеет место отсос, в случае $p - p_в < 0$ — вдувание жидкости.

Режим движения жидкости принимается ламинарным, поэтому значение коэффициента сопротивления трения для плоской трубы будет

$$\xi = \frac{24}{\mathrm{Re}} = \frac{12\nu}{uh} \tag{1.3}$$

а для цилиндрической трубы

$$\xi = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{32\nu}{ua} \tag{1.4}$$

Здесь Re — число Рейнольдса, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Подставляя значение ξ в системы уравнений (1.1) и (1.2), получим

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = bu$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} + B(p - p_в) = 0 \tag{1.5}$$

где $b = \frac{3\mu}{h^2}$, $B = \frac{k\alpha}{2h}$ для плоской трубы и $b = \frac{8\mu}{a^2}$, $B = \frac{2k\alpha}{a}$ для цилиндрической трубы, μ — динамический коэффициент вязкости жидкости. Исключая из системы уравнений (1.5) переменную $u(x, t)$, относительно $p(x, t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - B(p - p_в) \tag{1.6}$$

где

$$A = \frac{kh^2}{3\mu},\quad B = \frac{k\alpha}{2h} \quad \text{для плоской трубы и}$$

$$A = \frac{ka^2}{8\mu},\quad B = \frac{2k\alpha}{a} \quad \text{для цилиндрической трубы.}$$

Если из системы (1.5) исключим переменную $p(x, t)$, то относительно $u(x, t)$ получим такое же уравнение, как для $p(x, t)$, то есть

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{d^2 u}{dx^2} - Bu \tag{1.7}$$

Дифференциальное уравнение (1.6) решаем при следующих краевых условиях:

$$\text{при} \quad x=0 \quad p=p_н$$

$$\text{при} \quad x=l \quad \frac{\partial p}{\partial x}=0$$

$$\text{при} \quad t=0 \quad p=p_0(x) \tag{1.8}$$

Здесь $p_н$ — давление жидкости в начальном сечении, l — длина трубы, функция $p_0(x)$ показывает закон изменения давления при стационарном режиме движения, то есть является решением уравнения

$$\frac{d^2p_0}{dx^2}-\frac{B}{A}(p_0-p_н)=0 \tag{1.9}$$

при следующих граничных условиях:

$$\text{при} \quad x=0 \quad p_0=p_н$$

$$\text{при} \quad x=l \quad p_0=p_к \tag{1.10}$$

Здесь $p_к$ — давление в конечном сечении при стационарном режиме движения.

Второе граничное условие из (1.8) показывает, что в конце трубы расход жидкости прекращается мгновенно, вследствие чего и возникает нестационарный режим движения.

Решение уравнения (1.9) будет

$$p_0(x)=p_н+\frac{(p_к-p_н)\operatorname{sh}a_1x+(p_н-p_н)\operatorname{sh}a_1(l-x)}{\operatorname{sh}a_1l} \tag{1.11}$$

где $a_1=\sqrt{\frac{B}{A}}$.

§ 2. *Решение уравнения (1.6)*

Перейдем к решению уравнения (1.6) при краевых условиях (1.8). Решение ищется в виде

$$p(x,\ t)=p_0(x)+p_1(x,\ t) \tag{2.1}$$

где $p_0(x)$ является решением уравнения (1.9) и имеет вид (1.11), а $p_1(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}=A\frac{\partial^2p_1}{\partial x^2}-Bp_1 \tag{2.2}$$

Краевые условия для уравнения (2.2) будут

$$\text{при} \quad x=0 \quad p_1=0$$

$$\text{при} \quad x=l \quad \frac{dp_1}{dx}=-\left.\frac{dp_0}{dx}\right|_{x=l}=-\frac{a_1[(p_к-p_н)\operatorname{ch}a_1l-(p_н-p_н)]}{\operatorname{sh}a_1l}=D$$

$$\text{при} \quad t=0 \quad p_1=0 \tag{2.3}$$

Применяя к уравнению (2.2) и в краевым условиям (2.3) преобразования Лапласа [2], получим

$$A\frac{d^2p_{1L}}{dx^2}-Bp_{1L}=sp_{1L} \tag{2.4}$$

$$\text{при } x=0 \quad p_{1L}=0$$

$$\text{при } x=l \quad \frac{dp_{1L}}{dx}=\frac{D}{s} \tag{2.5}$$

Здесь $p_{1L}=\int\limits_0^\infty p_1(x,\ t)\exp(-st)\,dt$

Решением уравнения (2.4) будет

$$p_{1L}=c_1\exp(\gamma x)+c_2\exp(\gamma x) \tag{2.6}$$

где

$$\gamma=\sqrt{(s+B)/A}$$

Из граничных условий (2.5) для c_1 и c_2 получим

$$c_1=-c_2=\frac{D}{2\gamma s\cdot\operatorname{ch}\gamma l} \tag{2.7}$$

Тогда для p_{1L} получим

$$p_{1L}=\frac{D\operatorname{sh}\gamma x}{s\gamma\operatorname{ch}\gamma l} \tag{2.8}$$

Для получения оригинала функции p_{1L} $(x,\ s)$ применим к (2.8) обратное преобразование Лапласа.

Обозначим

$$\Phi(s)=\operatorname{sh}\gamma x/\gamma \tag{2.9}$$

$$\varphi(s)=s\operatorname{ch}\gamma l \tag{2.10}$$

Можно показать, что функции $\Phi(s)$ и $\varphi(s)$ являются обобщенными полиномами относительно s и что все условия теоремы разложения соблюдены.

Теорему разложения можно написать так:

$$p_1(x,\ t)=L^{-1}\left[p_{1L}(x,\ s)\right]=L^{-1}\left[\frac{D\Phi(s)}{\varphi(s)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\Phi(s_n)\exp(s_nt)}{\varphi'(s_n)} \tag{2.11}$$

где s_n — корни полинома $\varphi(s)$.

Найдем корни функции $\varphi(s)=s\operatorname{ch}\gamma l$.

Получим простой корень $s_n=0$ и бесчисленное множество простых корней, определяемых из соотношения

$$i\sqrt{\frac{s_n+B}{A}}\,l=\frac{(2n-1)\pi}{2}=\mu_n$$

откуда

$$s_n=-B-\frac{A}{l^2}\mu_n^2=-B-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2},\quad n=1,2,3\cdots \tag{2.12}$$

Из выражения (2.12) получим

$$p_1(x,t)=D\left[\frac{\psi(s_0)e^{s_0t}}{\varphi'(s_0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(s_n)e^{s_nt}}{\varphi'(s_n)}\right] \tag{2.13}$$

Вычисляя значения $\psi(s_0)$, $\varphi'(s_0)$, $\psi(s_n)$, $\varphi'(s_n)$ и подставляя их в выражение (2.13), получим

$$p_1(x,t)=D\left[\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{B}{A}}\,x}{\sqrt{\frac{B}{A}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{B}{A}}\,l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A\sin\frac{\mu_n x}{l}\cdot e^{s_nt}}{s_n l\sin\mu_n}\right] \tag{2.14}$$

Общее решение задачи согласно (2.1) будет

$$p(x,t)=p_0(x)+p_1(x,t)=p_в+$$

$$+\frac{(p_к-p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{B}{A}}\,x+(p_н-p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{B}{A}}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{B}{A}}\,l}+$$

$$+D\left[\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{B}{A}}\,x}{\sqrt{\frac{B}{A}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{B}{A}}\,l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}A\cdot\sin\frac{\mu_n x}{l}\,e^{s_nt}}{s_n l}\right] \tag{2.15}$$

Подставляя значения постоянных A, B и D в формулу (2.15), для значения давления окончательно получим

$$p(x,t)=p_в+\frac{(p_к-p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,x+(p_н-p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,l}-$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\left[(p_к-p_в)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,l+(p_н-p_в)\right]}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,l}\left[\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,x}{\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\mu\alpha}{2h^3}}\,l}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}kh^2\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\exp(s_n t)}{3\mu s_n l}\right] \tag{2.16}$$

где

$$s_n=-k\left[\frac{(2n-1)^2\pi^2h^2}{12\mu l^2}+\frac{\alpha}{2h}\right]$$

— для плоской трубы и

$$p(x,t)=p_в+\frac{(p_к-p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,x+(p_н-p_в)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{16\mu\alpha}{a^3}}\,l}-$$

$$
-\frac{\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}\left[(p_\text{к}-p_\text{в})\operatorname{ch}\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}\,l-(p_\text{н}-p_\text{в})\right]}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}\cdot l}\times
$$

$$
\times\left[\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}\,x}{\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}\,l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,ka^2\sin\frac{(2\,n-1)\,\pi x}{2\,l}\,e^{s_n t}}{4\,\mu\,s_n\,l}\right] \tag{2.17}
$$

где

$$
s_n=-k\left[\frac{(2\,n-1)^2\,\pi^2 a^2}{32\,\mu l^2}+\frac{2\,\alpha}{a}\right]
$$

для цилиндрической трубы.

Из первой формулы системы (1.5) получим значение скорости

$$
u(x,t)=\sqrt{\frac{\alpha h}{6\,\mu}}\frac{1}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\,\mu\alpha}{2\,h^3}}\,l}\left\{(p_\text{н}-p_\text{в})\operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\,\mu\alpha}{2\,h^3}}\,(l-x)-\right.
$$

$$
-(p_\text{к}-p_\text{в})\operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\,\mu\alpha}{2\,h^3}}\,x+\left[(p_\text{к}-p_\text{в})\operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\,\mu\alpha}{2\,h^3}}\,l-(p_\text{н}-p_\text{в})\right]\times
$$

$$
\left.\times\left[\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\,\mu\alpha}{2\,h^3}}\,x}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\,\mu\alpha}{2\,h^3}}\,l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}\,k\mu_n h^2\cos\frac{\mu_n x}{l}\,e^{s_n t}}{3\,\mu\,l^2 s_n}\right]\right\} \tag{2.18}
$$

для плоской трубы и

$$
u(x,t)=\sqrt{\frac{a\,\alpha}{4\,\mu}}\frac{1}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}}\left\{(p_\text{н}-p_\text{в})\operatorname{ch}\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}\,(l-x)-\right.
$$

$$
-(p_\text{к}-p_\text{в})\operatorname{ch}\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}\,x+\left[(p_\text{к}-p_\text{в})\operatorname{ch}\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}\,l-(p_\text{н}-p_\text{в})\right]\times
$$

$$
\left.\times\left[\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}\,x}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{16\,\mu\alpha}{a^3}}\,l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,ka^2\mu_n\cos\frac{(2\,n-1)\,\pi x}{2\,l}\,e^{s_n t}}{4\,\mu\,l^2 s_n}\right]\right\} \tag{2.19}
$$

для цилиндрической трубы.

Секундный продольный расход жидкости определится по формуле

$$
G_\text{пр}=2\,u\rho hL_1 \tag{2.20}
$$

для плоской трубы и

$$
G_\text{пр}=\pi a^2\rho u \tag{2.21}
$$

для цилиндрической трубы.

L_1 в (2.20) есть ширина канала в поперечном направлении. Секундный расход жидкости через стенки (поперечный расход) на единицу длины канала определится по формуле

$$G_{ст} = 2\alpha(p - p_в)\rho L_1 \tag{2.22}$$

для плоской трубы и

$$G_{ст} = 2\pi a\alpha(p - p_в)\rho \tag{2.23}$$

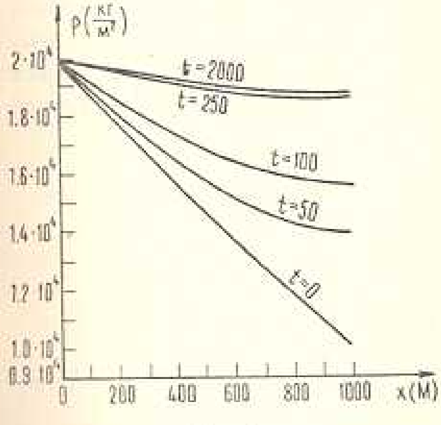
для цилиндрической трубы.

Численный пример. Рассмотрим движение воды в проницаемой цилиндрической трубе при следующих данных:

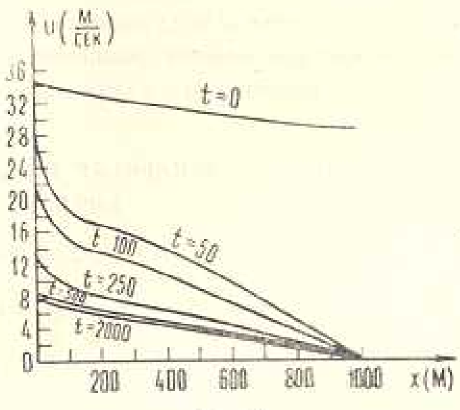
$$p_н = 2\cdot 10^4\,\frac{кГ}{м^2},\ \ p_в = 0,\ \ p_к = 10^4\,\frac{кГ}{м^2},\ \ l = 10^3\,м,\ \ k = 10^3\,\frac{кГ}{м^2},$$

$$a = 5\cdot 10^{-2}\,м,\ \ \alpha = 10^{-8}\,\frac{м^3}{сек\,кГ},\ \ \mu = 10^{-4}\,\frac{кГ\,сек}{м^2}.$$

Законы изменения давления, скорости, продольного и поперечного расхода жидкости, вычисленные по формулам (2.17), (2.19), (2.21) и (2.23), представлены на фиг. 1, 2, 3, 4.



Фиг. 1.



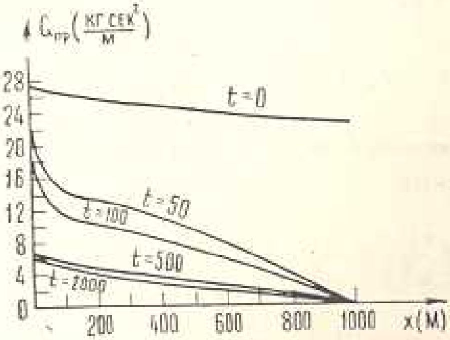
Фиг. 2.

Из фиг. 1 видно, что давление уменьшается вдоль трубы при любом значении времени и увеличивается по времени для любого сечения трубы.

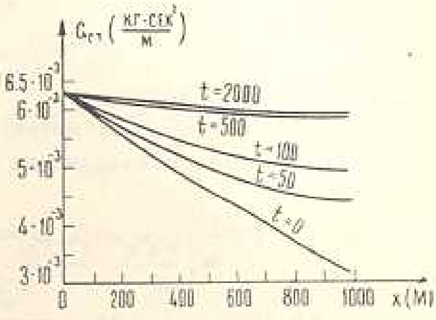
Из фиг. 2 видно, что продольная скорость движения жидкости уменьшается вдоль трубы при любом значении времени. После закрытия задвижки быстрота уменьшения скорости резко увеличивается. Кривые, показывающие законы изменения продольной скорости для моментов времени $t = 0$ и $t = 2000$ сек., параллельны.

Из фиг. 3 видно, что продольный расход жидкости уменьшается вдоль трубы для любого значения времени. После закрытия задвижки быстрота уменьшения расхода резко увеличивается. Кривые, показывающие законы изменения продольного расхода жидкости для моментов времени $t = 0$ и $t = 2000$ сек., параллельны.

На фиг. 4 показан закон изменения поперечного расхода жидкости (расход через стенки). Из него видно, что расход уменьшается вдоль трубы для любого значения времени, но увеличивается по времени для каж-



Фиг. 3.



Фиг. 4.

дого сечения трубы после закрытия задвижки. Из полученных результатов видно, что при выбранных краевых условиях нарушенный заданный стационарный режим движения жидкости через определенный промежуток времени (для данного случая $t = 2000$ сек.) переходит в новый стационарный режим движения с новыми параметрами движения. Проверка показала, что, если в полученных формулах для давления, скорости и расхода при нестационарном движении жидкости время $t \to \infty$, то результаты совпадают с решениями стационарной задачи при граничных условиях (1.8).

ՀԵՂՈՒԿԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԹԱՓԱՆՑՈՂ ՊԱՏԵՐՈՎ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐՈՒՄ

Գ. Հ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է իրական անսեղմելի հեղուկի ոչ ստացիոնար շարժումը ծակոտկեն պատերով խողովակներում (հարթ և գլանային)։

Հեղուկի շարժման լամինար ռեժիմի ընդունելությունը հնարավորություն է տալիս կվազիգծային մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը բերել գծային հավասարումների համակարգի։ Կիրառելով Լապլասի ձևափոխությունը ստացվում է խնդրի փակ լուծումը։ Որոշվում են ճնշման, արագության, երկայնական և ընդլայնական ելքերի փոփոխման օրենքները։ Լուծվում է կոնկրետ թվային օրինակ.

NON-STATIONARY FLOW OF LIQUID IN PERMEABLE WALLED TUBES

G. A. BABAJANIAN

Summary

Non-stationary isothermal flow of noncompressible viscid liquid in flat and cylindrical permeable tubes is considered. The laws of vari-

ation pressure, rate of longitudinal and transversal discharge of liquid are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабаджанян Г. А.* Течение реальной несжимаемой жидкости в трубах с проницаемыми стенками.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. 31, № 1.
2. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1951.
3. *Лейбензон Л. С.* Собрание трудов. Т. II. М.: Изд. АН СССР, 1953, 107 с.
4. *Лаврентьев М. А.* и *Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Гостехиздат, 1951.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 16. XI. 1981