ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 2, 1983 Механика

# О ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ КОНСОЛИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

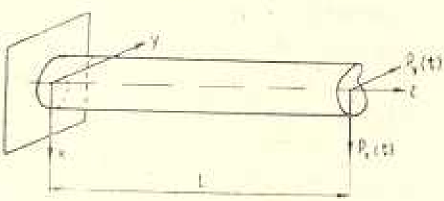
СИМОНЯН А. М., АВЕТИСЯН Г. А.

Вопросы распределения напряжений в брусьях при чистом изгибе рассматривались в ряде работ, например, в [1—5]. Учет поперечных сил при изгибе, согласно линейной теории наследственности, осуществлен в работе [6]. В работе [7] исследовался вопрос о поперечном изгибе призматического бруса с сечением, имеющим ось симметрии, при действии поперечной силы, направленной по оси симметрии сечения, в условиях ползучести, описываемой теорией течения [8].

В настоящей работе строится решение о действии сосредоточенной поперечной силы на конце призматического бруса произвольного сечения, материал которого деформируется, согласно нелинейной теории наследственности [9] в постановке [10] с некоторыми видоизменениями. Исследуется положение центра изгиба с учетом ползучести.

1. *Постановка задачи*

Рассмотрим заделанный одним торцом призматический брус длины $l$ произвольного односвязного сечения, на другой торец которого действует поперечная сосредоточенная сила, определяемая проекциями $P_x(t)$ и $P_y(t)$ на центральные оси $x$ и $y$ поперечного сечения бруса (фиг. 1).



Фиг. 1.

Принимается, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \qquad (1.1)$$

а также условие объемной несжимаемости материала

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \qquad (1.2)$$

Для описания ползучести, описываемой нелинейной зависимостью от напряжений, обычно принимается тезис о пропорциональности и соосности девиаторов напряжений и деформаций [9]

$$\varepsilon_x = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_x - \sigma) \qquad (x,\ y,\ z)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\tau_{xy}) \qquad (x,\ y,\ z) \qquad (1.3)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 3/2(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

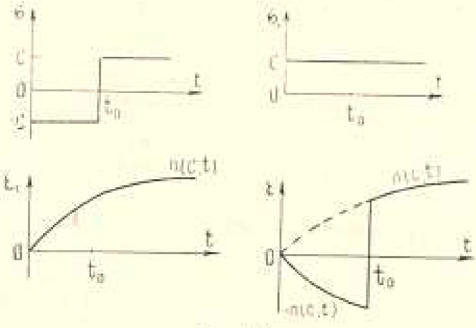
причем $\sigma_i$ и $\varepsilon_i$ связаны друг с другом посредством некоторого временного оператора $\Pi$, независимо от вида напряженного состояния

$$\varepsilon_i(t) = \Pi[\sigma_i(t), t] \tag{1.4}$$

Однако уравнения (1.3) вкупе с (1.4) содержат в себе недостатки, которые можно проиллюстрировать, в частности, на примере нижеследующей программы изменения осевого напряжения $\sigma_z(t)$:

$$\sigma_z(t) = \begin{cases} -c & \text{при } 0 < t < t_0 \\ c & \text{при } t > t_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Согласно (1.3) — (1.5), легко видеть (фиг. 2), что деформации ползучести $\varepsilon(t)$ при $t > t_0$ будут точно такими же, какими они были бы при $\sigma(t) \equiv c$ (показаны штриховыми линиями), независимо от $t_0$ и от вида оператора $\Pi$, при этом в точке $t = t_0$ они претерпевают разрыв, в два раза превосходящий накопившуюся деформацию ползучести до момента $t_0$, что не имеет смысла. В связи с тем, что в задачах изгиба брусьев превалирующими напряжениями являются $\sigma_z$, естественным представляется здесь в уравнениях (1.3) значения интенсивностей напряжений $\sigma_i$ и деформаций $\varepsilon_i$ заменить соответственно $\sigma_z$ и $\varepsilon_z$, которые, в отличие от интенсивностей, могут быть знакопеременными. Вместо (1.3) будем иметь




Фиг. 2.

$$\varepsilon_x = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_z}{\sigma_z}(\sigma_x - \sigma) \qquad (x,\ y,\ z)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_z}{\sigma_z}\tau_{xy} \qquad (x,\ y,\ z) \tag{1.6}$$

Присовокупим сюда соотношение, аналогичное (1.4), записанное для нелинейной теории наследственности

$$\varepsilon_z(t) = (1 + K^*) f[\sigma_z(t)] \tag{1.7}$$

где принято обозначение [10]

$$K^*f[\sigma(t)] \equiv \int_0^t f[\sigma(\tau)]\,K(t, \tau)\,d\tau$$

$$K(t, \tau) = -\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \tag{1.8}$$

$C(t, \tau)$ — мера ползучести материала, загруженного в возрасте $\tau$ [11]

$$f(\sigma) = A\,|\sigma|^n \operatorname{sign} \sigma \tag{1.9}$$

где $A$ и $n$ — параметры, определяемые из испытания на одноосную ползучесть.

Отметим, что уравнения (1.6) вкупе с (1.7) не имеют вышеуказанных недостатков, присущих (1.3) вкупе с (1.4).

Согласно принимаемой здесь гипотезе плоских сечений, имеем также

$$\varepsilon_z(x, y, z, t) = a(z, t)\,x + b(z, t)\,y + s(z, t) \tag{1.10}$$

§ 2. *Сведение задачи к разрешающим уравнениям*

Выпишем уравнения и граничные условия, которые должны соблюдаться:

дифференциальные уравнения равновесия, которые с учетом (1.1) запишутся в виде

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{2.2}$$

интегральные условия

$$\iint_\Omega \sigma_z\,d\Omega = 0 \tag{2.3}$$

$$\iint_\Omega \sigma_z x\,d\Omega = -P_x(t)(l - z) \tag{2.4}$$

$$\iint_\Omega \sigma_z y\,d\Omega = -P_y(t)(l - z) \tag{2.5}$$

где $\Omega$ — площадь поперечного сечения бруса, а также условия совместности деформаций, которые с учетом (1.1) и (1.3) запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \tag{2.7}$$

Поскольку поперечные размеры малы по сравнению с длиной, то естественно принять $\partial\varepsilon_z/\partial z \ll \partial\varepsilon_z/\partial x$ и $\partial\varepsilon_z/\partial z \ll \partial\varepsilon_z/\partial y$, вследствие чего, а также с учетом (1.10), (1.2) и (1.6), остальные условия совместности деформаций можно снять из рассмотрения. Используя (1.7), (1.9), (1.10), (2.3), (2.4), (2.5), получим

$$\varepsilon_z(x, y, z, t) = [\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)](l-z)^n \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z(x, y, z, t) = |(1-R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]|^{1/n-1} \times \\ \times (1-R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]A^{-1/n}(l-z)\end{aligned} \tag{2.9}$$

где при обозначении (1.8) $R(t, \tau)$ — резольвента вольтерровского ядра $K(t, \tau)$, а введенные здесь функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\delta(t)$ при произвольных фиксированных $t$ определяются из уравнений

$$\begin{gathered}\iint_\Omega \{(1-R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]\}^{1/n} x\,d\Omega = -A^{1/n}P_x \\ \iint_\Omega \{(1-R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]\}^{1/n} y\,d\Omega = -A^{1/n}P_y \\ \iint_\Omega \{(1-R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]\}^{1/n} d\Omega = 0\end{gathered} \tag{2.10}$$

где степенная функция для отрицательных аргументов понимается в смысле нечетного продолжения.

Уравнения (2.1) и (2.2) при использовании (2.9) решаются путем введения функции напряжений $F(x, y, t)$ по формулам

$$\begin{gathered}\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + A^{-1/n}\frac{n}{n+1}|(1-R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]|^{1/n+1} + f_1(y, t) \\ \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} + f_2(x, t)\end{gathered} \tag{2.11}$$

где $f_1(y, t)$ и $f_2(x, t)$ — произвольные функции.

Уравнения (2.6) и (2.7) могут быть сведены к следующему:

$$\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} = (l-z)^{n-1}\{[\beta(t)x - \alpha(t)y]n + B(t)\} \tag{2.12}$$

где $B(t)$ — функция времени, определяющая поворот поперечного сечения.

Подставляя (1.6), (2.8), (2.9) и (2.11) в (2.12), получим основное уравнение относительно функции напряжения $F(x, y)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \mu(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} + \nu(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda(x, y) \tag{2.13}$$

где

$$\mu(x, y) = \frac{\beta(t)}{\Lambda(x, y, t)} - \frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\beta(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)} \tag{2.14}$$

$$\nu(x, y) = \frac{\alpha(t)}{\Lambda(x, y, t)} - \frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\alpha(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)} \tag{2.15}$$

$$\lambda(x, y) = \frac{2}{3} nA^{-1/n} [\Lambda(x, y, t)]^{-1} \left[\beta(t)x - \alpha(t)y + \frac{B(t)}{n}\right] \times$$

$$\times |(1-R^*)\Lambda(x, y, t)|^{1/n-1}(1-R^*)\Lambda(x, y, t) -$$

$$-\frac{n}{n+1} A^{-1/n}(1-R^*)\beta(t)\cdot|(1-R^*)\Lambda(x, y, t)|^{1/n-1}(1-R^*)\Lambda(x, y, t) -$$

$$-\frac{n}{n+1} A^{-1/n}\frac{\beta(t)}{\Lambda(x, y, t)}|(1-R^*)\Lambda(x, y, t)|^{1/n+1} +$$

$$+\frac{\partial f_2(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(y, t)}{\partial y} + \left[\frac{\alpha(t)}{\Lambda(x, y, t)} -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\alpha(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)}\right] f_2(x, t) -$$

$$-\left[\frac{\beta(t)}{\Lambda(x, y, t)} - \frac{1}{n}\frac{(1-R^*)\beta(t)}{(1-R^*)\Lambda(x, y, t)}\right] f_1(y, t) \tag{2.16}$$

$$\Lambda(x, y, t) = \alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)$$

$$(1-R^*)f(t) \equiv f(t) - \int_0^t R(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$$

Поскольку на контуре сечения не имеется внешних нагрузок, то краевое условие запишется так:

$$\tau_{xz}\cos(\bar{n}, \bar{x}) + \tau_{yz}\cos(\bar{n}, y) = 0 \tag{2.17}$$

где $\bar{n}$ — внешняя нормаль к точке контура сечения.

Подставляя (2.11) в (2.17), получим следующее краевое условие для функции $F(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -A^{-1/n}\frac{n}{n+1}|(1-R^*)[\alpha(t)x + \beta(t)y + \delta(t)]|^{1/n+1}\frac{dy}{ds} +$$

$$+ f_2(x, t)\frac{\partial x}{\partial s} - f_1(y, t)\frac{\partial y}{\partial s} \tag{2.18}$$

где $ds$ — элемент контура сечения.

Таким образом, задача определения касательных напряжений сведена к уравнению (2.13) при краевом условии (2.18).

Рассмотрим теперь вопрос, будет ли брус закручиваться и где следует приложить силы $P_x(t)$ и $P_y(t)$ для изгиба без кручения, то есть, где находится центр изгиба. Поскольку для несимметричных сечений, вообще говоря, суждение об отсутствии кручения затруднительно, то будем считать кручение отсутствующим, если

$$\iint\limits_{\Omega} \omega_z(x, y)\, d\Omega = 0 \tag{2.19}$$

где $\omega_z$ — поворот элемента площади в окрестности точки $x$, $y$ относительно оси $z$. Легко видеть из формул Ламе, выражающих деформации через перемещения, что

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \tag{2.20}$$

Подставляя (2.20) и (2.12) в (2.19), получим, что кручение отсутствует при условии

$$B(t) = 0 \tag{2.21}$$

что конкретизирует правую часть уравнения (2.13).

Определим теперь местоположение центра изгиба. Для этого воспользуемся следующим интегральным условием:

$$\iint\limits_{\Omega} (y\tau_{xz} - x\tau_{yz})\, d\Omega = -M_{кр} \tag{2.22}$$

где $M_{кр}$ — крутящий момент, вызванный силами $P_x$ и $P_y$. Подставляя сюда $M_{кр} = P_x y_0 - P_y x_0$, а также (2.11), для определения условия отсутствия кручения получим уравнение прямой линии

$$P_y(t)\, x_0 - P_x(t)\, y_0 - \iint\limits_{\Omega} \Big\{ y \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial y} + x \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial x} + y f_1(y, t) -$$

$$- x f_2(x, t) + \frac{ny}{n+1} A^{-1/n} \left| (1 - R^*) [\alpha(t)\, x + \beta(t)\, y + \delta(t)] \right|^{1/n+1} \Big\}\, d\Omega = 0 \tag{2.23}$$

то есть при действии силы с составляющими $P_x(t)$ и $P_y(t)$ кручение не будет иметь места, если точка приложения $(x_0, y_0)$ этой силы находится на прямой линии, определяемой уравнением (2.23).

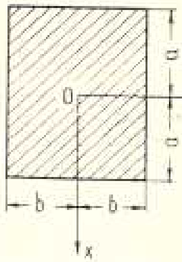
Вышеприведенные уравнения можно использовать и для случая наличия кручения, если задан поворот сечения на некотором расстоянии от защемления.

Для тонкостенных несимметричных и длинных брусьев определение центра изгиба приобретает особое значение. Таким образом, задача об изгибе брусьев сведена к решению системы (2.10) относительно $\alpha(t)$ $\beta(t)$ и $\delta(t)$, где $t$ играет роль параметра, и, следовательно, определению $\sigma_z$ и $\varepsilon_z$ по формулам (2.8) и (2.9), затем к решению уравнения (2.13) при краевом условии (2.18) и определению центра изгиба согласно (2.23), к которому должны быть приложены внешние силы для отсутствия кручения. Функции $f_1(y, t)$ и $f_2(x, t)$, входящие в (2.16), (2.18) и (2.23), произвольны, приравнение их нулю не отражается на определении напряжений.

## § 3. *Изгиб консольного бруса прямоугольного сечения*

В качестве приложения рассмотрим задачу об изгибе бруса прямоугольного сечения, допускающую аналитическое решение.

Положим, что на брус (фиг. 3) вдоль оси $x$ действует сила $P$. Из системы (2.10) получим




Фиг. 3.

$$\alpha(t) = -A\left(\frac{2+1/n}{4b}\right)^{n} a^{1/(1+2n)}(1+K^*)[|P|^{n-1}P]$$

$$\beta(t) = \delta(t) = 0 \tag{3.1}$$

Условие (2.18) запишется так

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -A^{-1/n}\frac{n}{n+1}|(1-R^*)\alpha(t)|^{1/n+1}x^{1/n+1}\frac{\partial y}{\partial s} + $$
$$+ f_2(x, t)\frac{\partial x}{\partial s} - f_1(y, t)\frac{\partial y}{\partial s} \tag{3.2}$$

Принимая

$$f_2(x, t) = 0$$
$$f_1(y, t) = -A^{-1/n}\frac{n}{n+1}|(1-R^*)\alpha(t)|^{1/n+1}a^{1/n+1} \tag{3.3}$$

получим, что как на сторонах $y = \pm b$, так и $x = \pm a$, то есть на всем контуре $\partial F/\partial s = 0$, и, не умаляя общности, можно принять

$$F(\pm a, y) = 0$$
$$F(x, \pm b) = 0 \tag{3.4}$$

Учитывая (3.1) и (3.3), уравнение (2.13) перепишем так

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(1+2n)P}{6}\frac{y|x|^{1/n-1}}{ba^{1/n+2}} \tag{3.5}$$

Решение уравнения (3.5), удовлетворяющее второму условию (3.4), ищем в виде ряда

$$F(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k(x, t)\sin\frac{k\pi}{b}y \tag{3.6}$$

Разлагая в аналогичный ряд Фурье правую часть (3.5) и приравнивая коэффициенты при $\sin(k\pi y)/b$, получим

$$\frac{\partial^2 \varkappa_k(x, t)}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{x}\frac{\partial \varkappa_k(x, t)}{\partial x} - \frac{\pi^2 k^2}{b^2}\varkappa_k(x, t) =$$
$$= \frac{1+2n}{3k\pi}(-1)^{k+1}\frac{x^{1/n-1}P}{a^{1/n+2}} \tag{3.7}$$

Осуществляя замену переменных

$$x = \frac{b\xi_k}{ik\pi}; \qquad \varkappa_k = \psi_k x^{1/2n}; \qquad \nu = \frac{1}{2n} \tag{3.8}$$

уравнение (3.7) сводится к неоднородному уравнению Бесселя

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} + (\xi^2 - \nu^2)\psi_k = \frac{(-1)^{k+1}(1+2n)}{3k\pi a^{1/n+2}} \left(\frac{b\xi}{ik\pi}\right)^{1+1/2n} P \tag{3.9}$$

Общее решение уравнения (3.9) при обозначениях (3.8) запишется в виде [12]

$$\psi_k(x) = C_{1k}(t) I_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + C_{2k}(t) I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \chi(x, t) \tag{3.10}$$

где $I_\nu$ и $I_{-\nu}$ — функции Бесселя мнимого аргумента порядка $\nu$ и $-\nu$ соответственно, $C_{1k}(t)$ и $C_{2k}(t)$ — произвольные функции интегрирования, $\chi(x, t)$ — частное решение уравнения (3.9). Используя результаты [13], для функции $\chi(x, t)$ получим выражение

$$\chi(x, t) = (-1)^k \left(\frac{b}{k\pi}\right)^{\nu+1} P \frac{(1+2n)\, 2^{\nu-1}\, \Gamma(\nu+1/2)}{3k\sqrt{\pi}\, a^{2+1/n}} L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) \tag{3.11}$$

где $L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right)$ — функция Струве, представляемая в виде нижеследующего ряда:

$$L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{k\pi x}{2b}\right)^{2m+\nu+1}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+m+\frac{3}{2}\right)} \tag{3.12}$$

Используя (3.6), (3.8), (3.10) и (3.11), для функции напряжений $F(x, y, t)$ получим выражение

$$F(x, y, t) = x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \left[ C_{1k}(t) I_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + C_{2k}(t) I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_k(t) L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right)\right] \sin\frac{k\pi y}{b} \tag{3.13}$$

где

$$\lambda_k(t) = (-1)^k \left(\frac{b}{k\pi}\right)^{\nu+1} \frac{(1+2n)\, 2^{\nu-1}\, \Gamma(\nu+1/2)}{3k\sqrt{\pi}\, a^{1/n+2}} P \tag{3.14}$$

Подставляя (3.13) во второе уравнение (2.11) и учитывая (3.3), получим

$$\tau_{yz}(x, y, t) = -\nu x^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ C_{1k}(t) I_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + C_{2k}(t) I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right) + \right.$$

$$+\lambda_k(t)\, L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right)\Big]\sin\frac{k\pi y}{b}-x^\nu\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_{1k}(t)\frac{d}{dx}I_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right)+\right. \tag{3.15}$$

$$\left.+C_{2k}(t)\frac{d}{dx}I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)+\lambda_k(t)\frac{d}{dx}L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right)\right]\sin\frac{k\pi y}{b}$$

Из условия, что $\tau_{yz}$ на линии $x=0$ является конечной величиной, заключаем, что

$$C_{1k}(t)=0 \tag{3.16}$$

Для того, чтобы удовлетворить первому условию (3.4), достаточно положить

$$C_{2k}(t)=-\frac{\lambda_k(t)\, L_\nu\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \tag{3.17}$$

Используя (3.13), (3.14), (3.16) и (3.17), получим следующее выражени: для функции напряжений $F(x, y, t)$:

$$F(x, y, t)=\frac{2^{\nu-1}b^{\nu+1}x^\nu(1+2n)\Gamma(\nu+1/2)P}{3\pi^{\nu+3/2}a^{2+1/n}}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}}\left[-L_\nu\left(\frac{k\pi a}{b}\right)\frac{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}+L_\nu\left(\frac{k\pi x}{b}\right)\right]\sin\frac{k\pi y}{b} \tag{3.18}$$

Можно показать, что, принимая в (3.18) $n=1$ ($\nu=1/2n=1/2$), из формулы (3.18) получим известное решение задачи Сен-Венана об изгибе упругой консольной балки прямоугольного сечения [14].

Поскольку функции Бесселя протабулированы, целесообразным представляется выразить через них функцию Струве, согласно [12]:

$$L_\nu(x)=I_{-\nu}(x)-\frac{2(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)}\int_0^\infty(1+y^2)^{\nu-1/2}\sin(x\cdot y)\,dy \tag{3.19}$$

После подстановки (3.19) в (3.18) и (2.11) и использования рекуррентных соотношений для $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ после ряда преобразований получим нижеследующие выражения для $\tau_{xz}$ и $\tau_{yz}$

$$\tau_{xz}=\frac{(1+2n)x^\nu P}{3\pi a^{\nu+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^k}{k}\left[\frac{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)}\int_0^\infty\sin\left(\frac{k\pi a\xi}{b}\right)(1+\xi^2)^{\nu-1/2}d\xi-\right.\right.$$

$$
- (x/a)^{\nu} \int_0^\infty \sin\left(\frac{k\pi x\xi}{b}\right)(1+\xi^2)^{\nu-1/2}\, d\xi \Bigg] \cos\frac{k\pi y}{b}\Bigg\} + \tag{3.20}
$$

$$
+ \frac{P(\nu+1)\left(a^{2\nu+1}-x^{2\nu+1}\right)}{2(2\nu+1)\, b a^{2(\nu+1)}},
$$

$$
\tau_{yz} = -\frac{P(\nu+1)\, b x^{\nu-1}}{3\pi^2 a^{\nu+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg\{ \frac{(-1)^k}{k^2} \left[ \frac{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \times \right.
$$

$$
\times \int_0^\infty \sin\left(\frac{k\pi a\xi}{b}\right)(1+\xi^2)^{\nu-1/2}\, d\xi +
$$

$$
+ \frac{k\pi x}{2\nu b}\left( \frac{I_{-\nu-1}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} + \frac{I_{-\nu+1}\left(\frac{k\pi x}{b}\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi a}{b}\right)} \right) \int_0^\infty \sin\left(\frac{k\pi a\xi}{b}\right)(1+\xi^2)^{\nu-1/2}\, d\xi +
$$

$$
\left. + 2(n-1)\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu} \int_0^\infty \sin\left(\frac{k\pi x\xi}{b}\right)(1+\xi^2)^{\nu-3/2}\, d\xi \right] \sin\frac{k\pi y}{b} \Bigg\} \tag{3.21}
$$

В табл. 1 при обозначении $p^* = P/h^2$ приведены значения $\tau_{xz}/p^*$ и $\tau_{yz}/p^*$, вычисленные по формулам (3.20) и (3.21), в применении к изгибу бруса сечения $h \times 2h$ силой $P$ при $n = 3$, в сравнении с соответствующими значениями при $n = 1$.

*Таблица* 1

Значения касательных напряжений $\tau_{xz}$ и $\tau_{yz}$ при изгибе бруса прямоугольного сечения $h \times 2h$

| | $2y/h$ | | $x/h$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 0,125 | 0,250 | 0,375 | 0,500 | 0,625 | 0,750 | 0,875 | 1,000 |
| $\tau_{xz}/p^*$ | 0 | $n=3$ | 0,850 | 0,789 | 0,699 | 0,592 | 0,470 | 0,333 | 0,178 | 0 |
| | | $n=1$ | 0,558 | 0,530 | 0,484 | 0,421 | 0,338 | 0,236 | 0,111 | 0 |
| $\tau_{xz}/p^*$ | 1 | $n=3$ | 0,741 | 0,623 | 0,507 | 0,386 | 0,263 | 0,140 | 0,031 | 0 |
| | | $n=1$ | 0,606 | 0,579 | 0,535 | 0,469 | 0,387 | 0,284 | 0,159 | 0 |
| | $x/h$ | | $2y/h$ | | | | | | | |
| | | | 0,125 | 0,250 | 0,375 | 0,500 | 0,625 | 0,750 | 0,875 | 1,000 |
| $\tau_{xz}/p^*$ | 0 | $n=3$ | 0,874 | 0,874 | 0,875 | 0,875 | 0,876 | 0,876 | 0,877 | 0,877 |
| | | $n=1$ | 0,567 | 0,570 | 0,573 | 0,578 | 0,585 | 0,594 | 0,604 | 0,614 |
| $\tau_{yz}/p^*$ | 0 | $n=3$ | 0,0196 | 0,0388 | 0,0540 | 0,0703 | 0,0712 | 0,0705 | 0,0522 | 0 |
| | | $n=1$ | 0,0054 | 0,0102 | 0,0147 | 0,0181 | 0,0196 | 0,0194 | 0,0153 | 0 |

## § 4. *Изгиб консольного бруса тонкостенного швеллерного сечения*

Рассмотрим определение напряжений у консольного бруса, сечение которого показано на фиг. 4, при действии силы, параллельной оси $x$, при условии отсутствия закручивания. Из условия тонкостенности сечения имеем

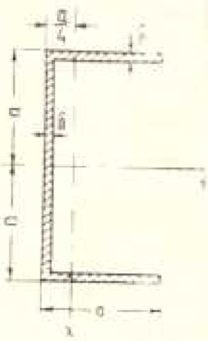
$$\tau_{xz} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad \text{на полках}$$
$$\tau_{yz} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad \text{на стенке} \tag{4.1}$$

Вследствие симметрии поперечного сечения относительно оси $y$, получим, что условия (2.10) удовлетворяются при

$$\alpha(t) = -\frac{A}{a^{1+2n}}\left[\frac{1+2n}{2\delta(1+3n)}\right]^{n}(1+K^*)\left[P^{n}(t)\right]$$
$$\beta(t) = \delta(t) = 0 \tag{4.2}$$

где степенная функция от отрицательных аргументов понимается в смысле нечетного ее продолжения.

Согласно (2.9) и (4.2), нормальные напряжения $\sigma_z$ определяются по формулам



Фиг. 4.

$$\sigma_z = \mp \frac{P(1+2n)(l-z)}{2(1+3n)\delta a^2} \quad \text{на полках } x = \pm a$$
$$\sigma_z = -\frac{|x|^{1/n-1} x P(l-z)(1+2n)}{2(1+3n)\delta a^{2+1/n}} \quad \text{на стенке} \tag{4.3}$$

Используя (4.1), (2.2) и (4.3), а также очевидные условия $\tau_{yz}(3/4\, a) = 0$ и $\int\limits_{-a}^{a} \tau_{xz}(x)\,\delta\, dx = P$, получим

$$\tau_{yz}(\pm a, y) = \pm \frac{P(1+2n)}{2(1+3n)\delta a}\left(\frac{3}{4} - \frac{y}{a}\right)$$
$$\tau_{xz}(\pm a, y) = 0 \quad \text{на полках} \tag{4.4}$$
$$\tau_{xz}\left(x, -\frac{a}{4}\right) = \frac{P(1+2n)}{2\delta a(1+3n)(1+n)}\left[1 + 2n - n\left(\frac{|x|}{a}\right)^{1/n+1}\right] \quad \text{на стенке}$$
$$\tau_{yz}\left(x, -\frac{a}{4}\right) = 0$$

При $n = 1$ из (4.4) получим

$$\tau_{xz}\left(x, -\frac{a}{4}\right) = \frac{3}{16}\,\frac{P}{\delta a}\left[3 - \left(\frac{|x|}{a}\right)^2\right] \tag{4.5}$$

что совпадает с формулой Журавского для швеллерных сечений.

Центр изгиба определяется значением $y_0$ при $P_y = 0$, согласно (2.22), (4.4) и (4.5), по формуле

$$y_0 = -\frac{5n^2 + 7n + 2}{12n^2 + 16n + 4}\, a$$

Отметим, что зависимость $y_0$ от показателя нелинейности $n$ весьма мала. Действительно, для линейно-деформируемых тел ($n = 1$) имеем $y_0 = -0{,}4375\, a$, в то время как при $n = 3$ $y_0 = -0{,}425\, a$, а при $n \to \infty$ $y_0 = -0{,}4167\, a$.

## ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԿՈՆՍՈԼԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Հ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

### Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Ոչ գծային ժառանգական սողքի տեսության հիման վրա կառուցվում է կամայական լայնական հատվածքի կոնսոլային չորսուի վրա ազդող կենտրոնացված լայնական ուժի ազդեցության խնդրի լուծումը։ Խնդիրը բերված է մասնակի ածանցյալներով երկրորդ սեռի դիֆերենցիալ հավասարման լուծման։ Ուղղանկյուն լայնական հատվածքի դեպքում ստացված են լարումների համար արտահայտություններ։ Ստացված են բանաձևերը լարումների և ծռման կենտրոնի որոշման համար շվելերային հատվածքի բարակապատ չորսուի դեպքում։*

## ON THE CROSS-SECTION BENDING OF THE CONSOLE IN THE NONLINEAR THEORY OF CREEP

A. M. SIMONIAN, G. A. AVETISSIAN

### S u m m a r y

On the basis of the nonlinear hereditary theory of creep, the solution of the problem concerning the action of concentrated shear force on a cantilever beam with an arbitrary cross-section is built.

The problem is reduced to the second order differential equation. In the case of a right-angled cross-section, the expressions for stresses are received. The formulas for the determination of stresses and the center of bending, in the case of a thin-walled beam with a horizontal cross-section, are obtained.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинин Н. Н.* Некоторые одномерные задачи неустановившейся ползучести.— Инж. сб., 1951, т. **10**.
2. *Малинин Н. Н.* Основы расчета на ползучесть. М.: Машгиз, 1948.
3. *Ptechnik S., Chrzanowski M.* Time of total creep rupture of a beam under combined tension and bending.—Int. journal solids and structure, 1970, v. 6, No. 4.
4. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Релаксационная задача об изгибе призматического стержня.— Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
5. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести.— Вестник МГУ, 1948, № 10.
6. *Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С.* Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести.— Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1957, т. **10**, № 5.
7. *Аветисян Г. А.* Поперечный изгиб однородного призматического стержня, находящегося в условиях неустановившейся ползучести.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. 30, № 5.
8. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
9. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
10. *Simonian A. M.* Calculation of thermal stresses in thick-walled cylinders taking account of non-linear creep.—International Journal of Engineering Science, 1979, v. 17, No. 5.
11. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехтеориздат, 1952.
12. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М.: ИЛ, 1975.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
14. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975.

СКТБ Института механики АН Арм.ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
8. IX. 1981