ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 2, 1983 Механика

О СООТНОШЕНИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ДЕФОРМАЦИЯМ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

МКРТЧЯН Р. Е.

Многие композиционные материалы проявляют свойство разносопротивляемости к растяжению и сжатию как в связи с плохой сопротивляемостью к растяжению связующего материала, так и по причине потери устойчивости некоторых армирующих волокон при сжатии. Например, большинство из расчетов железобетонных конструкций основывается на предположении, что при растяжении железобетона в нем работает только арматура, а при сжатии — бетон и арматура. Существуют также однородные материалы, обладающие свойством разносопротивляемости.

Исследованию свойств таких разномодульных материалов посвящено много замечательных работ советских и зарубежных исследователей ([1—16] и др.). Экспериментальным путем найдены физические константы некоторых материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Обзор этих работ и систематическое изложение разномодульной теории упругости можно найти в книге [16] и в работах [10—12].

В настоящей работе рассматриваются определяющие соотношения для плоской деформации упругого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Работа основывается на результатах работы [7], которые в дальнейшем подтверждались в работах* [8, 12].

1. Если принять, что указанный материал по всем направлениям растягивается или сжимается, то контрвариантные компоненты тензора на-

* В работе [12] отмечается, что несмотря на соответствие в общем с предшествующими авторами, имеется некоторая разница ввиду отбрасывания некоторых членов при представлении функции энергии. Это замечание относится к выражениям вида [7, 9]

$$W = W(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(ss)}) = W(I_1, I_2, I_3, \gamma_s^2) \tag{a}$$

где инвариант I_3 с помощью соотношения [3]

$$\lambda^6 - \lambda^4 I_1 + \lambda^2 I_2 - I_3 = 0 \tag{b}$$

выражается через I_1 и I_2, и W представляется в виде [12]

$$W = W(I_1, I_2, \lambda_s^2) \tag{c}$$

Соглашаясь с полезностью представления (c), автор настоящей работы считает, что и представления (a) не теряют своего значения, так как с помощью (b) можно выразить как I_3, так и I_1 и I_2 через остальные инварианты и привести (a) к соответствующему виду.

В работе [12] отмечается также, что результаты работ [7, 8, 9, 12] при малых деформациях соответствуют друг другу.

пряжений τ_{+}^{ij} или τ_{-}^{ij} относительно произвольной системы координат (θ^1, θ^2, θ^3) при малых деформациях определяются выражениями [7]

$$\tau_{+}^{ij} = \lambda\gamma_r^r g^{ij} + 2\mu^+\gamma^{ij}, \quad \tau_{-}^{ij} = \lambda\gamma_r^r g^{ij} + 2\mu^-\gamma^{ij} \tag{1.1}$$

где γ^{ij} и γ_j^i — контрвариантные и смешанные компоненты тензора деформаций соответственно; g^{ij} — контрвариантные компоненты метрического тензора; λ, μ^+ (или μ^-) — постоянные Ляме.

С деформированным телом свяжем ортогональную систему координат ($\overline{\theta}^1$, $\overline{\theta}^2$, $\overline{\theta}^3$), направления осей которой в каждой точке совпадают с главными направлениями деформаций. Если материал растягивается по направлению $\overline{\theta}^s$ (по остальным двум материал сжимается, или деформации равны нулю), то контрвариантные компоненты тензора напряжений определяются выражениями [7]

$$\tau_{(s)}^{ij} = \lambda\gamma_r^r g^{ij} + 2\mu^-\gamma^{ij} + 2(\mu^+ - \mu^-)\overline{e}_s M_{(s)}^{ij} \tag{1.2}$$

где

$$\overline{e}_s = \frac{\overline{\gamma}_{ss}}{\overline{g}_{ss}}, \qquad M_{(s)}^{ij} = \frac{\partial\theta^i}{\partial\overline{\theta}^s}\frac{\partial\theta^j}{\partial\overline{\theta}^s}\Big/\,\overline{g}_{ss} \tag{1.3}$$

(здесь и в последующих формулах по индексу s не суммировать), $\overline{\gamma}_{ss}$ и $\overline{g}_{ss}$ — ковариантные компоненты тензора деформаций и метрического тензора относительно системы ($\overline{\theta}^1$, $\overline{\theta}^2$, $\overline{\theta}^3$), $\overline{e}_s$ — главные относительные удлинения.

В случае, когда материал сжимается только по направлению $\overline{\theta}^s$, имеем

$$\tau_{(s)}^{*ij} = \lambda\gamma_r^r g^{ij} + 2\mu^+\gamma^{ij} + 2(\mu^- - \mu^+)\overline{e}_s M_{(s)}^{ij} \tag{1.4}$$

В прямоугольной декартовой системе координат $(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (x_1, x_2, x_3)$ выражения (1.3) принимают следующий вид:

$$M_{(s)}^{ij} = \cos(x_i, \overline{\theta}^s)\cos(x_j, \overline{\theta}^s)$$

и уравнения (1.1), (1.2) и (1.4) представляются в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij}^{+} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^+ e_{ij}, \\
\sigma_{ij}^{-} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^- e_{ij} \\
\sigma_{ij}^{\prime(s)} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^- e_{ij} + 2(\mu^+ - \mu^-)\cos(x_i, \overline{\theta}^s)\cos(x_j, \overline{\theta}^s)\,\overline{e}_s \\
\sigma_{ij}^{\prime\prime(s)} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu^+ e_{ij} + 2(\mu^- - \mu^+)\cos(x_i, \overline{\theta}^s)\cos(x_j, \overline{\theta}^s)\,\overline{e}_s
\end{gathered} \tag{1.5}$$

где σ_{ij} — физические компоненты напряжений, e_{ij} — компоненты тензора деформаций в системе (x_1, x_2, x_3), δ_{ij} — символы Кронекера,

$$\Delta = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$$

2. Рассмотрим состояние плоской деформации

$$\partial/\partial x_3 = 0, \quad e_{23} = e_{13} = e_{33} = \bar{e}_3 = 0$$

Тогда выражения (1.5) принимают вид

$$\begin{gathered}
\sigma^{+}_{\alpha\beta} = \lambda\Delta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu^{+} e_{\alpha\beta} \\
\sigma^{-}_{\alpha\beta} = \lambda\Delta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu^{-} e_{\alpha\beta} \\
\sigma'^{(\gamma)}_{\alpha\beta} = \lambda\Delta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu^{-} e_{\alpha\beta} + 2(\mu^{+} - \mu^{-}) \cos(x_\alpha, \bar{\theta}^\gamma) \cos(x_\beta, \bar{\theta}^\gamma)\, \bar{e}_\gamma \\
\sigma''^{(\gamma)}_{\alpha\beta} = \lambda\Delta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu^{+} e_{\alpha\beta} + 2(\mu^{-} - \mu^{+}) \cos(x_\alpha, \bar{\theta}^\gamma) \cos(x_\beta, \bar{\theta}^\gamma)\, \bar{e} \\
\sigma_{33} = \lambda\Delta, \quad \sigma_{\alpha 3} = 0 \\
\Delta = e_{11} + e_{22} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем индексы α, β и γ принимают значения 1 и 2, σ_{33} и $\sigma_{\alpha 3}$ символизируют соответствующие напряжения со штрихами и с индексами «+» и «—».

Если ортогональная система главных направлений $(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3)$ образует правую систему, то

$$\begin{aligned}
&\cos(x_1, \bar{\theta}^1) = \cos\alpha \\
&\cos(x_2, \bar{\theta}^1) = \cos(3/2\,\pi + \alpha) = \sin\alpha \\
&\cos(x_1, \bar{\theta}^2) = \cos(1/2\,\pi + \alpha) = -\sin\alpha \\
&\cos(x_2, \bar{\theta}^2) = \cos\alpha
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Из условия, что материал по направлению x_3 не деформируется, следует

$$\sigma'^{(1)}_{\alpha\beta} = \sigma''^{(2)}_{\alpha\beta} = \sigma^{+-}_{\alpha\beta}, \quad \sigma'^{(2)}_{\alpha\beta} = \sigma''^{(1)}_{\alpha\beta} = \sigma^{-+}_{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

Подставляя в (2.3) выражения соответствующих напряжений из (1.1) и принимая во внимание (2.2), можно получить

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \bar{e}_1 \cos^2\alpha + \bar{e}_2 \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + \frac{1}{2}(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)\cos 2\alpha \\
e_{22} &= \bar{e}_1 \sin^2\alpha + \bar{e}_2 \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) - \frac{1}{2}(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)\cos 2\alpha \\
e_{12} &= (\bar{e}_1 - \bar{e}_2)\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)\sin 2\alpha
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Эти формулы выражают известную связь между $e_{\alpha\beta}$ и $\bar{e}_\gamma$.

Из (2.1) с помощью (2.3) и (2.4) получаем

$$\begin{aligned}
\sigma^{+-}_{11} &= \lambda\Delta + 2\mu^{+}\cos^2\alpha\,\bar{e}_1 + 2\mu^{-}\sin^2\alpha\,\bar{e}_2 \\
\sigma^{+-}_{22} &= \lambda\Delta + 2\mu^{+}\sin^2\alpha\,\bar{e}_1 + 2\mu^{-}\cos^2\alpha\,\bar{e}_2 \\
\sigma^{+-}_{12} &= 2(\bar{e}_1\mu^{+} - \bar{e}_2\mu^{-})\sin\alpha\cos\alpha
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Для $\sigma_{\alpha\beta}^{-+}$ получаются аналогичные выражения (вместо μ^{+} подставляется μ^{-} и, наоборот).

Из (2.4) и (2.5) вытекает

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \tag{2.6}$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\Delta}{2} + \frac{e_{11} - e_{22}}{2\cos 2\alpha}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\Delta}{2} - \frac{e_{11} - e_{22}}{2\cos 2\alpha} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.5), можно получить следующие выражения:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{+-} = \lambda\Delta\delta_{\alpha\beta} + (\mu^{+} + \mu^{-})\, e_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\,\Delta(\mu^{+} - \mu^{-})\, T_{\alpha\beta} + (\mu^{+} - \mu^{-})\,\frac{e_{11} - e_{22}}{2T_{11}}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{2.8}$$

где

$$T_{11} = -T_{22} = \cos 2\alpha, \quad T_{12} = T_{21} = \sin 2\alpha \tag{2.9}$$

Разрешая соотношения (2.8) относительно деформаций и принимая во внимание (2.6), можно определить

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\lambda + \mu^{+} + \mu^{-}}{c}\,\sigma_{\alpha\beta}^{+-} - \frac{\lambda}{c}\,(\sigma^{+-} - \sigma_{\alpha\beta}^{+-})\,\delta_{\alpha\beta} - \frac{\mu^{+} - \mu^{-}}{2c}\,\sigma^{+-} T_{\alpha\beta} - \frac{(\mu^{+} - \mu^{-})}{2c}\,\frac{(\sigma_{11}^{+-} - \sigma_{22}^{+-})}{T_{22}}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{2.10}$$

где

$$\sigma^{+-} = \sigma_{11}^{+-} + \sigma_{22}^{+-}, \quad c = 2\lambda\,(\mu^{+} + \mu^{-}) + 4\mu^{+}\mu^{-}$$

(здесь по α и β не суммировать).

3. При решении задач теории упругости к физическим уравнениям (2.1), (2.8) и (2.10) присоединяются уравнения равновесия

$$\sigma_{\beta\alpha,\,\beta} + X_{\alpha} = 0 \tag{3.1}$$

и геометрические уравнения

$$e_{\alpha\beta} = 1/2\,(u_{\alpha,\,\beta} + u_{\beta,\,\alpha}) \tag{3.2}$$

$$e_{11,\,22} + e_{22,\,11} = 2e_{12,\,12} \tag{3.3}$$

В этих уравнениях запятая обозначает частное дифференцирование, $X_{\alpha}(x_1, x_2)$ и u_{α} — компоненты объемной силы и вектора перемещения соответственно.

В том частном случае, когда возможно показать, что в плоскодеформированном теле или в какой-то его части возможны только растягивающие или только сжимающие деформации, то решение такой задачи для этого тела или его части в принципе не отличается от решения соответствующей задачи для обычного материала. Поэтому здесь рассматривается только случай, когда одновременно возникают деформации разного знака.

Подставляя (2.8) в (3.1) и учитывая (3.2), можно получить выражение

$$\Delta_{,\alpha} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\nabla^2 u_\alpha + \frac{1}{\lambda+\mu}X_\alpha = \frac{\mu^- - \mu^+}{2(\lambda+\mu)}\left[\left(\frac{u_{1,1}-u_{2,2}}{T_{11}}\right) - \Delta T_{\alpha\beta,\beta}\right] \quad (3.4)$$

где значения $T_{\alpha\beta}$ приводятся в (2.9)

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu^+ + \mu^-), \quad \Delta = e_{11} + e_{22} = u_{\alpha,\alpha}$$

∇^2 — оператор Лапласа.

При решении второй основной задачи, когда на контуре заданы перемещения

$$u_1 = g_1(s), \quad u_2 = g_2(s) \quad (3.5)$$

как заданные функции дуги s контура, в (3.4) подставляются значения

$$T_{12} = T_{21} = \sin 2\alpha = \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{\sqrt{(u_{1,1} - u_{2,2})^2 + (u_{1,2} + u_{2,1})^2}}$$

$$T_{11} = -T_{22} = \cos 2\alpha = \frac{u_{1,1} - u_{2,2}}{\sqrt{(u_{1,1} - u_{2,2})^2 + (u_{1,2} + u_{2,1})^2}}$$

которые вытекают из (2.6) и (3.2).

Если в уравнении равновесия (3.1) предположить, что компоненты объемной силы $X_\alpha(x_1, x_2)$ определяются, исходя из потенциальной функции $V(x_1, x_2)$, в форме

$$X_\alpha = -V_{,\alpha}$$

и что существует функция напряжения Φ такая, что $\sigma_{12} = -\Phi_{,12}$, то уравнению (3.1) удовлетворяет следующее соотношение:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\Phi_{,\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\Phi_{,\gamma\gamma} + \delta_{\alpha\beta}V \quad (3.6)$$

Для того, чтобы (3.2) имело действительные решения, должны удовлетворяться уравнения совместности (3.3). Подставляя выражения (2.9) и (2.10) в (3.3) и принимая во внимание (2.6) и (3.2), можно найти следующее уравнение:

$$\nabla^4\Phi + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\nabla^2 V + \frac{\mu^+ - \mu^-}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\sigma\cos 2\alpha) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\sigma\cos 2\alpha) - \right.$$

$$\left. - \nabla^2\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\cos 2\alpha}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma\sin 2\alpha)\right] = 0 \quad (3.7)$$

где ∇^4 — бигармонический оператор, $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$.

Если в (3.7) подставить из (2.6) значения

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}^2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}^2}} \tag{3.8}$$

и выражение $\sigma_{\alpha\beta}$ из (3.6), то для определения функции Φ получается довольно сложное нелинейное уравнение с граничными условиями

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{dx_1}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right) \\ p_2 &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\frac{dx_1}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

где p_1 и p_2 — компоненты нагрузки на контуре.

В каждом конкретном случае, предварительно убедившись в сходимости итерационного процесса, для решения первой и второй граничных задач (3.7) — (3.9) и (3.4), (3.5) можно применить метод последовательных приближений следующим образом. При решении задачи (3.7), (3.9) в первом приближении принимается, что рассматриваемое тело или характерная его часть изготовлены из обычного изотропного материала с упругими постоянными λ и $\mu = (\mu^+ + \mu^-)/2$ (постоянные Ляме) и решается граничная задача (если нет такого решения в литературе)

$$\nabla^4\Phi^{\mathrm{I}} + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\nabla^2 V = 0 \tag{3.10}$$

с граничными условиями (3.9). Индексы I, II и т. д. показывают номер приближения соответствующих величин.

Определяя значения $\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{I}}$, $\sin^{\mathrm{I}} 2\alpha$ и $\cos^{\mathrm{I}} 2\alpha$ из (3.6) и (3.8) и подставляя их в квадратные скобки (3.7) совместно с (3.9), можно получить граничную задачу для второго приближения

$$\nabla^4\Phi^{\mathrm{II}} + F^{\mathrm{I}} = 0 \tag{3.11}$$

где

$$F^{\mathrm{I}} = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\nabla^2 V + \frac{\mu^+ - \mu^-}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\sigma^{\mathrm{I}}\cos 2\alpha) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\sigma^{\mathrm{I}}\cos^{\mathrm{I}} 2\alpha) - \right.$$
$$\left. - \nabla^2\frac{(\sigma_{11}^{\mathrm{I}} - \sigma_{22}^{\mathrm{I}})}{\cos 2\alpha} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma^{\mathrm{I}}\sin^{\mathrm{I}} 2\alpha)\right] \tag{3.12}$$

Указанный итерационный процесс повторяется до получения необходимой точности, то есть до достижения достаточно малой величины $\max\left|\frac{\sigma_{\alpha\beta}^{N} - \sigma_{\alpha\beta}^{N-1}}{\sigma_{\alpha\beta}^{N}}\right|$, где N — номер последнего приближения.

Вторую основную задачу (3.4) и (3.5) можно решить аналогичным путем.

В случае слабо выраженной разносопротивляемости, то есть когда $\frac{\mu^+ - \mu^-}{\lambda + 2\mu} \ll 1$ $\left(\text{или } \frac{\mu^+ - \mu^-}{2(\lambda + \mu)} \ll 1\right)$, при решении первой и второй граничных задач можно воспользоваться методом малого параметра. Например, при решении второй основной задачи (3.4) и (3.5), представляя перемещения u_α и объемные силы в виде разложения в абсолютно сходящиеся ряды по $\varepsilon = \frac{\mu^+ - \mu^-}{2(\lambda + \mu)}$

$$u_\alpha = \varepsilon u_\alpha' + \varepsilon^2 u_\alpha'' + \ldots = u_\alpha^{(1)} + u_\alpha^{(2)} + \ldots$$

$$X_\alpha = \varepsilon X_\alpha' + \varepsilon^2 X_\alpha'' + \ldots = X_\alpha^{(1)} + X_\alpha^{(2)} + \ldots \quad (\alpha = 1,\ 2)$$

можно получить уравнения первого приближения

$$\Delta_{,\alpha}^{(1)} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \nabla^2 u + \frac{1}{\lambda + \mu} X_\alpha^{(1)} = 0$$

и уравнения второго приближения

$$\Delta_{,\alpha}^{(2)} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \nabla^2 u_\alpha^{(2)} + \frac{1}{\lambda + \mu} X_\alpha^{(2)} = \varepsilon\left(\frac{u_{1,1}^{(1)} - u_{2,2}^{(1)}}{T_{11}^{(1)}} - \Delta T_{\alpha\beta,\beta}^{(1)} \right)$$

Определение областей, где деформации не меняют своего знака, является одной из особенностей задач упругости для материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия.

При решении конкретных задач для рассматриваемого материала желательно иметь решения соответствующих задач для обычного материала. Эти решения помогут нахождению указанных зон.

4. В качестве примера рассматривается задача упругого равновесия полуплоскости.

Пусть в системе прямоугольных декартовых координат (x_1, x_2) тело занимает область $x_2 \geqslant 0$ и на границе $x_2 = 0$ заданы

$$\sigma_{22} = f(x_1), \quad \sigma_{12} = g(x_1) \text{ при } x_2 = 0 \tag{4.1}$$

Для обычного изотропного материала напряжения определяются [17]

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2 f(\xi) + (x_1 - \xi) g(\xi)}{[(x_1 - \xi)^2 - x_2^2]^2} (x_\alpha - \delta_{1\alpha}\xi)(x_\beta - \delta_{1\beta}\xi)\, d\xi \tag{4.2}$$

Определяя $e_{\alpha\beta}$ из закона Гука и значения главных удлинений $\overline{e}_\alpha$ из (2.7), с помощью уравнений $\overline{e}_1 = 0$, $\overline{e}_2 = 0$ можно найти разделяющие линии (если они существуют) областей, где $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ не меняют свой знак. Если после этих вычислений выясняется, что в деформированном теле возникает такая зона, где $\overline{e}_1 \geqslant 0$, $\overline{e}_2 \geqslant 0$ ($\overline{e}_1 \leqslant 0$, $\overline{e}_2 \leqslant 0$), то решения (4.2) и соответствующие деформации при $\mu = \mu^+$ ($\mu = \mu^-$)

являются действительными в указанной зоне для рассматриваемого материала.

Когда в деформированном теле возникает область, где $\bar{c}_1 > 0$, $\bar{c}_2 < 0$, то нужно решить граничную задачу (3.7) с граничными условиями

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = f(x_1) = -p_2, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -g(x_1) = p_1 \text{ при } x_2 = 0 \tag{4.3}$$

Решение рассматриваемой граничной задачи находится следующим образом:

$$\Phi^N = \Phi^I + \Phi_0^N \tag{4.4}$$

где N — номер приближения, Φ_0^N — частное решение уравнения

$$\nabla^4 \Phi^N + F^{N-1} = 0 \tag{4.5}$$

$$F^N = \frac{\mu^+ - \mu^-}{\lambda + 2\mu} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma^N \cos^N 2\alpha) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\sigma^N \cos^N 2\alpha) - \right.$$

$$\left. - \nabla^2 \frac{(\sigma_{11}^N - \sigma_{22}^N)}{\cos^N 2\alpha} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\sigma^N \sin^N 2\alpha) \right| \tag{4.6}$$

Частное решение Φ_0^N уравнения (4.5) можно найти, например, с помощью интегральных преобразований. После применения преобразования Фурье, уравнение (4.5) приводится к виду

$$\frac{d^4 \bar{\Phi}^N}{dx_2^4} - 2p^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}^N}{dx_2^2} + p^4 \frac{d\bar{\Phi}^N}{dx_2} = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^{N-1}(\xi, x_2) e^{ip\xi} d\xi \tag{4.7}$$

где

$$\bar{\Phi}^N(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^N(\xi, x_2) e^{ip\xi} d\xi$$

при условии, что, когда $|x_1| \to \infty$, функция Φ и ее производные до третьего порядка стремятся к нулю.

Частное решение уравнения (4.7) получается в следующем виде:

$$\bar{\Phi}_0^N(x_2) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi p^3}} \int_0^{x_2} [p(x_2 - \eta) \operatorname{ch} p(x_2 - \eta) - \operatorname{sh} p(x_2 - \eta)] d\eta \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} F^{N-1}(\xi, \eta) e^{-ip\xi} d\xi \tag{4.8}$$

при условии, что при $x_2 = 0$

$$\overline{\Phi}_0^N(x_2) = \frac{d\Phi_0^N(x_2)}{dx_2} = \frac{d^2\Phi_0^N(x_2)}{dx_2^2} = \frac{d^3\Phi_0^N(x_2)}{dx_2^3} = 0$$

Φ_0^N получается с помощью формулы обращения Фурье

$$\Phi_0^N(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi}_0^N(x_2)\, e^{-ipx_1}\, dp \tag{4.9}$$

Рассмотрим частный случай, когда сосредоточенная сила с составляющими (p_1, p_2) приложена в начале координат. Тогда напряжения для обычного материала определяются по формуле

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} x_\alpha x_\beta \frac{x_\gamma p_\gamma}{(x_\rho x_\rho)^2} \tag{4.10}$$

Из (4.10) следует, что в этом случае имеет место соотношение

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_{11}\sigma_{22} \tag{4.11}$$

Легко доказать следующее утверждение: если из решения соответствующей плоской задачи для обычного материала получается соотношение (4.11), то это решение и есть искомое при определении напряжений, если принимать, что $\mu = \mu^+$ при $\overline{e}_\alpha > 0$; $\mu = \mu^-$ при $\overline{e}_\alpha < 0$ и $\mu = (\mu^+ + \mu^-)/2$, если $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ разного знака.

Пусть в деформированном теле $\overline{e}_1 > 0$ и $\overline{e}_2 < 0$. Тогда для определения напряжений необходимо решить граничную задачу (3.6)—(3.9). Если напряжения, полученные после решения этой задачи, удовлетворяют соотношению (4.11), то из (3.8) вытекает

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma}, \qquad \cos 2\alpha = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sigma}, \qquad \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

Эти значения с помощью (3.6) обращают выражение внутри квадратных скобок (3.7) в нуль, и (3.7) приводится к обычному уравнению

$$\nabla^2\Phi + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \nabla^2 V = 0$$

что и доказывает наше утверждение.

На основании этого утверждения и (4.11) напряжения в рассматриваемом случае определяются выражениями (4.10) при всех видах деформированных состояний. Предполагая, что $\overline{e}_1 > 0$, $\overline{e}_2 < 0$, из (4.10), (2.10) и (2.7) можно определить

$$e_{\alpha\beta} = \varphi\left[2(\lambda + \mu^-) x_\alpha x_\beta - \lambda x_\rho x_\rho\right] \tag{4.12}$$

$$\overline{e}_1 = \varphi(\lambda + 2\mu^-), \quad \overline{e}_2 = -\varphi\lambda \tag{4.13}$$

где

$$\varphi = \frac{2x_{\gamma} p_{\gamma}}{[2\lambda(\mu^{+} + \mu^{-}) + 4\mu^{+}\mu^{-}](x_{\beta} x_{\beta})^{2}}$$

Из (4.13) видно, что в деформированном теле получаются только две области: $\bar{e}_1 > 0$, $\bar{e}_2 < 0$ при $\varphi > 0$ и $\bar{e}_1 < 0$, $\bar{e}_2 > 0$ при $\varphi < 0$, которые разделяются линией $\varphi = 0$ или $x_{\gamma} p_{\gamma} = 0$.

ՁԳՄԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻՆ ՏԱՐԲԵՐ ԴԻՄԱԴՐՈՂ ԻԶՈՏՐՈՊ ՆՅՈՒԹԻ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ԿԱՊԱԿՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Արտածվում են ձգման և սեղմման դեֆորմացիաներին տարբեր դիմադրող իզոտրոպ նյութի համար հարթ դեֆորմացիաների որոշիչ առնչությունները։

Ցույց է տրվում, որ հարթ դեֆորմացիաների առաջին և երկրորդ հիմնական խնդիրներից ստացված ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման համար կարելի է կիրառել հաջորդական մոտավորությունների եղանակը։

Որպես օրինակ դիտարկվում է նշված նյութից պատրաստված առաձգական կիսահարթության հավասարակշռության խնդիրը։

ON RELATIONS OF PLANE PROBLEM OF ISOTROPIC MATERIAL HETERORESISTANT TO DEFORMATIONS OF TENSION AND COMPRESSION

R. E. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The determining correlations for plane deformation of the material, heteroresistant to deformations and compression are derived.

It is shown, that for the solution of nonlinear differential equations, which are obtained from the first and second principal problems of plane deformations, one can use the method of successive approximations.

As an example the problem of elastic equilibrium of a half-plane from the examined material is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П.* Сопротивление материалов. Т. 2. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1946. 456 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Уравнения плоской задачи разносопротивляющейся или разномодульной теории упругости.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1966, т. 19, № 2, с. 1—19.

3. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию.— Инж. ж., МТТ, 1966, № 2, с. 44—53.
4. *Шапиро Г. С.* О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию.— Инж. ж., МТТ, 1966, № 2, с. 123—125.
5. *Матченко Н. М., Толоконников Л. А.* О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах.— Инж. ж., МТТ, 1968, № 6, с. 108—110.
6. *Wesolowski Z.* Elastic material with different elastic constants in two regions of variability of deformation. — Arch. of Mech. Polich Acad. Sci. 1969, 21, No. 4, pp. 449—468.
7. *Мкртчян Р. Е.* Об одной модели материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1970, т. 23, № 5, с. 37—47.
8. *Саркисян М. С.* К теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию.— Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1971, № 5.
9. *Мкртчян Р. Е.* Большие упругие деформации несжимаемого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. 25, № 1, с. 28—41.
10. *Kamiya N.* On Bimodulus Elasticity and Strength Differential/A Precis of Recent Developments.—Res. Rep. Fac. Eng. Mie. Univ., 1976, vol. 1, pp. 59—79.
11. *Jones R. M.* Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression.—AIAA Journal, 1977, vol. 15, No. 1. (Русск. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1977, № 1, с. 16—25).
12. *Green A. E. and Mkrtichian J. Z.* Elastic Solids with Different Moduli in Tension and Compression. — Journal of Elasticity, 1977, vol. 7, No. 4, October, pp. 369—386.
13. *Isabekian Naira, Metellus Anne-Marie.* Sur le comportement d'un materiau élastique anisotrope possedant des modules differents en traction et en compression, en theorie des petites perturbations.—C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, Serie A—491 (13, Mars, 1978).
14. *Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела.— Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 6.
15. *Ломакин Е. В.* О единственности решения теории упругости для изотропного разномодульного тела.— Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 2, с. 42—45.
16. *Амбарцумян С. А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 317 с.
17. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Изд. Наука, 1968. 402 с.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
22. X. 1981