

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО
ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

БАНИЧУК Н. В., КОБЕЛЕВ В. В.

Рассмотрены статические задачи оптимизации упругих оболочек вращения в случае действия осесимметричных нагрузок. При проектировании учитываются такие характеристики как вес, жесткость и прочность (максимальная интенсивность напряжений), а в качестве искоемых управляющих переменных выступают поочередно или совместно форма меридиана срединной поверхности и распределение толщины вдоль меридиана. Для безмоментных оболочек вращения, проектируемых с учетом требований минимальности веса при ограничениях по прочности, доказано, что критерием оптимальности является условие равнопрочности. Даны конкретные примеры оптимальных распределений толщин для частных критериев прочности (критерии Мизеса и Треска).

Исследованы задачи максимизации жесткости тонких упругих оболочек, работающих на кручение. Объем материала (вес оболочки) предполагается заданным. Получены аналитические решения, описывающие распределение толщины и формы меридиана оптимальных оболочек.

Ранее задачи определения рациональных и равнопрочных оболочек решались в [1—5]. Распределение толщины в задаче о равнопрочной осесимметричной безмоментной оболочке вращения найдено в [6]. Задача об оптимальной по жесткости оболочке в задаче кручения изучалась в [7].

1. *Оболочки минимальной массы при ограничениях по прочности.* Рассмотрим оболочку вращения, находящуюся под действием осесимметричной нагрузки. Положение точки на срединной поверхности оболочки характеризуется углами θ и φ , где θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) — угол, образуемый нормалью к срединной поверхности и осью вращения, а φ — угол, задающий положение меридиана. Главные радиусы кривизны и радиус круга, образованного при сечении оболочки плоскостью, нормальной к оси вращения, обозначаются соответственно через R_1 , R_2 и R .

Обозначим через $p = p(\theta)$ действующую на единицу поверхности оболочки радиальную внешнюю силу, а через $Q = Q(\theta)$ — суммарную нагрузку, приложенную к части оболочки, расположенной над параллельным кругом θ (фиг. 1). Из условий равновесия указанной части оболочки искомые выражения для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \varphi_1(\theta)/h, & \varphi_1 &\equiv -Q/2\pi R \sin \theta \\ \sigma_\varphi &= \varphi_2(\theta)/h, & \varphi_2 &\equiv -pR_1 - \varphi_1 R_1/R_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $h = h(\theta)$ — распределение толщины вдоль меридиана. Величины σ_θ , σ_φ полностью характеризуют напряженное состояние оболочки.

На допустимые величины напряжений наложено ограничение по прочности

$$\Phi(\sigma_\theta, \sigma_\varphi) < 0 \quad (1.2)$$

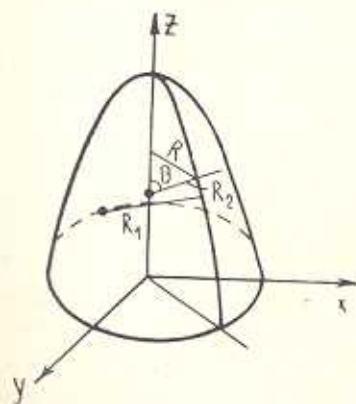
Заметим, что в плоскости главных напряжений область допустимых состояний Ω является выпуклой и начало координат (точка $\sigma_\theta = 0$, $\sigma_\varphi = 0$) является внутренней точкой Ω .

Масса элемента оболочки, лежащего между параллельными кругами θ_0 и θ , определяется формулой

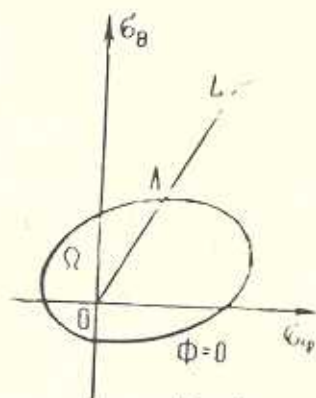
$$J = \rho \int_{\theta_0}^{\theta} h R_1 R_2 \sin \theta d\theta \quad (1.3)$$

Задача оптимизации заключается в отыскании распределения толщины оболочки $h(\theta)$, доставляющего минимум функционалу (1.3) (функционалу веса) и такого, что напряжения, подсчитываемые по формулам (1.1), удовлетворяют условию прочности (1.2).

Функционал (1.3) линеен по h . Выражение $R_1 R_2 \sin \theta$ положительно, так как $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, а $0 \leq \theta \leq \pi$. Следовательно, минимум функционала достигается на нижнем ограничении для функции h , обусловленном критерием прочности. Искомую управляющую переменную h будем рассматривать как параметр в формулах (1.1), определяющий положение точки в плоскости напряжений на луче L , выходящем из начала координат (фиг. 2). Часть луча L , принадлежащая области Ω (OA на фиг. 2), соот-



Фиг. 1



Фиг. 2

ветствует напряженным состояниям в смысле критерия (1.2). При этом минимальная допустимая толщина h оболочки определяется пересечением луча L с предельной кривой ($\Phi = 0$). Оболочки, для которых толщины определяются таким образом, называются равнопрочными. Из проведенного рассмотрения очевидно, что для равнопрочных оболочек вращения реализуется минимум функционала (1.3) (массы материала).

Заметим, что если на оболочку действуют и скручивающие усилия, вызывающие сдвиговые напряжения, то аналогичными рассуждениями можно установить оптимальность равнопрочной оболочки и в этом случае.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального проектирования оболочки под действием гидростатического давления. Жидкость с плотностью μ заполняет весь объем обращенной выпуклостью вниз полусферической оболочки радиуса R . Для компонент напряжения имеем

$$\sigma_{\theta} = \frac{\mu g R^2}{3h} \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{\varphi} = \frac{\mu g R^2}{3h} \left[3 \cos \theta - \frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} \right] \quad (1.4)$$

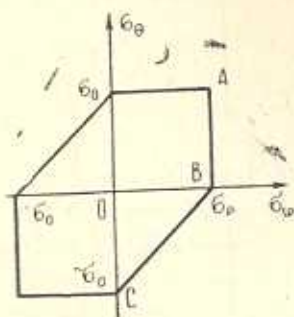
В качестве условия прочности примем критерий Треска

$$\max(|\sigma_{\theta}|, |\sigma_{\varphi}|, |\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi}|) \leq \sigma_0 \quad (1.5)$$

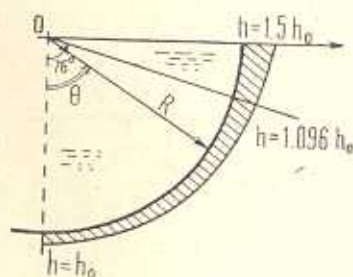
Предельная кривая этого условия на плоскости главных напряжений $\sigma_{\theta}, \sigma_{\varphi}$ изображена на фиг. 3. Из рассмотрения формул (1.4), (1.5) видно, что при $0 < \theta < \arccos((\sqrt{3}-1)/2) \approx 76^\circ$, как σ_{θ} , так и σ_{φ} положительны, и $|\sigma_{\varphi}| < |\sigma_{\theta}|$. Точка, характеризующая напряженное состояние оптимальной равнопрочной оболочки на плоскости $(\sigma_{\theta}, \sigma_{\varphi})$, находится на прямой AB . Толщина оболочки в этом диапазоне изменения углов вычисляется по формуле $h = \mu g R^2 (1 - \cos^2 \theta) / (3\sigma_0 \sin^2 \theta)$. На интервале $76^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ напряжение σ_{φ} становится отрицательным и точка в пространстве напряжений переходит на прямую BC (с уравнением $\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi} = \sigma_0$). Равнопрочная оболочка обладает толщиной

$$h = \frac{\mu g R^2}{3\sigma_0} \left[\frac{2(1 - \cos^3 \theta)}{\sin^2 \theta} - 3 \cos \theta \right]$$

График функции распределения толщины представлен на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

Приведем решение задачи оптимального проектирования тороидальной оболочки под действием внутреннего давления p . Пусть срединная поверхность оболочки представляет собой тор, образованный движением окружности радиуса R . При этом ее центр описывает окружность радиуса a . Компоненты напряжений равны

$$\sigma_{\theta} = \frac{pR}{2h} \frac{2a + R \sin \theta}{a + R \sin \theta}, \quad \sigma_{\varphi} = \frac{pR}{2h}$$

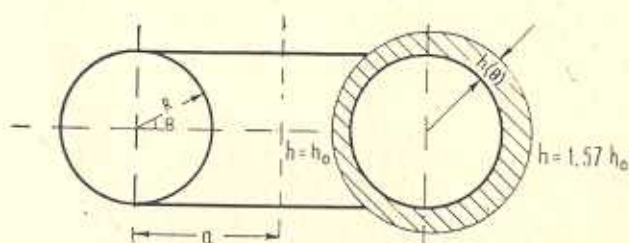
Предположим, что материал оболочки удовлетворяет условию прочности Мизеса

$$\sigma_{\theta}^2 + \sigma_{\varphi}^2 - \sigma_{\theta} \sigma_{\varphi} \leq \sigma_0^2$$

Тогда оптимальное распределение толщины представляется формулой

$$h = \frac{pR}{2\sigma_0} \frac{\sqrt{3a^2 + 3aR \sin \theta + R^2 \sin^2 \theta}}{a + R \sin \theta}$$

График распределения толщины показан на фиг. 5.



Фиг. 5

2. Оболочки максимальной жесткости. Равновесие оболочки вращения, закрепленной вдоль одного края ($z = 0$) и нагруженной скручивающими усилиями q , описывается уравнениями

$$\frac{d}{d\theta} \left[R^2 \left(S + \frac{2H}{R_2} \right) \right] = -qR_1R^2$$

$$H = \frac{Gh^3R}{6R_1R_2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{u}{R} \right), \quad S = \frac{GhR}{R_2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{u}{R} \right)$$

где u — смещение в окружном направлении (вдоль параллели оболочки), G — модуль сдвига, h — толщина оболочки, R , R_1 , R_2 означают соответственно текущий радиус оболочки, радиус кривизны меридиана, расстояние по нормали от поверхности до оси вращения. Через θ обозначен угол, образованный нормалью к поверхности оболочки и осью вращения z . Подставим выражения для H и S в уравнение равновесия и опустим в получающемся выражении член порядка $(h/R_2)^2$, который является величиной более высокого порядка малости, чем погрешность, допускаемая при выводе уравнений теории тонких оболочек. Будем иметь:

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{GhR^3}{R_1} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{u}{R} \right) \right] = -qR_1R^2$$

Учитывая соотношения $dR/d\theta = R_1 \cos \theta$, $dz/dR = \operatorname{tg} \theta$ и переходя от дифференцирования по θ к дифференцированию по z , получим уравнение, описывающее распределение перемещений u как функцию координаты z :

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{ChR^3}{V\sqrt{1+R_z^2}} \frac{d}{dz} \left(\frac{u}{R} \right) \right] = m \quad (2.1)$$

$$m = -qR^2 \sqrt{1 + (dR/dz)^2}$$

Граничные условия при $z = 0$ и на незакрепленном крае имеют вид

$$u(0) = 0, \quad \left[\frac{ChR^3}{V\sqrt{1+R_z^2}} \frac{d}{dz} \left(\frac{u}{R} \right) \right]_{z=l} = 0 \quad (2.2)$$

Интегрируя уравнение (2.1) и выбирая константы интегрирования при помощи условия (2.2), находим распределение смещений оболочки

$$u(z) = R \int_0^z N(z, \zeta) m(\zeta) d\zeta \quad (2.3)$$

$$N(z, \zeta) = \begin{cases} \int_0^{\zeta} \frac{d\eta}{\psi(\eta)}, & 0 \leq z \leq \zeta \leq l \\ \int_0^z \frac{d\eta}{\psi(\eta)}, & 0 \leq \zeta \leq z \leq l \end{cases}$$

$$\psi(\eta) = \frac{G(\eta) h(\eta) R^3(\eta)}{V\sqrt{1 + (dR/d\eta)^2}}$$

Рассмотрим для определенности случай, когда нагрузка приложена к незакрепленному краю оболочки. Перемещение свободного края вдоль параллели при приложении крутящего момента $M = q_0 (R^3 \sqrt{1 + R_z^2})_{z=l}$ определяется формулой

$$u(l) = M \int_0^l \frac{V\sqrt{1+R_z^2}}{GhR^3} dz \quad (2.4)$$

Объем материала оболочки фиксирован и равен заданной константе V , то есть

$$2\pi \int_0^l hR \sqrt{1 + R_z^2} dz = V \quad (2.5)$$

Считается, что оболочка обладает максимальной жесткостью, если смещение $u(l)$ минимально. Поэтому задача оптимизации жесткости оболочки сводится к отысканию минимума функционала (2.4) при условии (2.5).

Определим оптимальный проект оболочки в случае, когда функция распределения толщины $h(z)$ рассматривается в качестве управляющей, а функция $R = R(z)$ задана. Можно показать, что необходимым и доста-

точным условием минимума функционала (2.4) при условии (2.5) является выполнение равенства

$$hR^2 = V\sqrt{\nu}$$

где $\nu > 0$ — константа.

Используя данное условие оптимальности и изопериметрическое равенство (2.5), находим искомое распределение толщины

$$h = \frac{V}{2\pi R^2} \left(\int_0^l \frac{\sqrt{1+R_z^2}}{R} dz \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Для оценки эффективности оптимизации рассмотрим оболочку с той же формой меридиана и обладающей постоянной толщиной. Выигрыш за счет оптимизации определяется по формуле

$$\eta = 1 - \frac{u(l)}{u_0(l)}$$

где $u_0(l)$, $u(l)$ — перемещение в параллельном направлении конца оболочек соответственно постоянной толщины и оптимальной. Считается, что объемы рассматриваемых оболочек равны. Производя соответствующие вычисления, определяем выигрыш

$$\eta = 1 - \frac{\int_0^l R\sqrt{1+R_z^2} dz \int_0^l \frac{\sqrt{1+R_z^2}}{R^3} dz}{\left(\int_0^l \frac{\sqrt{1+R_z^2}}{R} dz \right)^2}$$

Рассмотрим теперь задачу отыскания оптимальной формы меридиана. Распределение толщины $h(z)$ будем предполагать заданным. С использованием соотношений (2.4), (2.5) и уравнения Эйлера нетрудно получить необходимое условие оптимальности (в дифференциальной форме), первый интеграл которого имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1+R_z^2}} \left(\frac{\nu}{hR^3} + Rh \right) = G \quad (2.7)$$

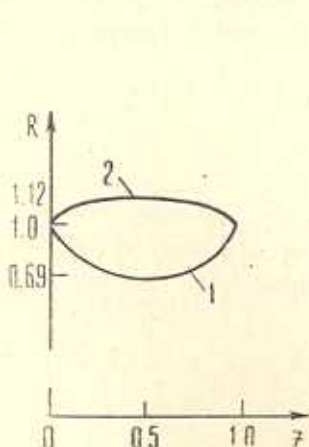
Константа G определяется из краевого условия $R(l) = R_l$, а ν — из изопериметрического условия. При $\nu = 0$ оптимальная оболочка представляет собой поверхность минимальной площади. Краевая задача решалась численно. В результате проведенных расчетов показано, что в некотором диапазоне параметров существуют два экстремальных решения. Одно из решений ($C > 0$) соответствует минимуму функционала (2.4), а другое ($C < 0$) — максимуму. На фиг. 6 показаны оптимальные очертания обо-

լոճկի ընդհանուր ձևով, որտեղ ν և l փոփոխականներն են: Կրիվա 1 համարում է $\nu = 0$, կրիվա 2 — $\nu = \infty$:

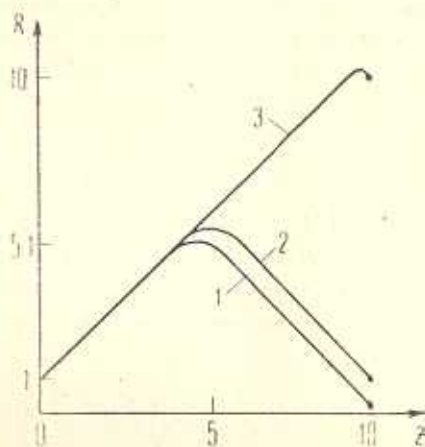
Րասմոտրիմ ժամանակ, երբ կարգավորումները կատարվում են ինչպես շաղկապի հաստությունը, այնպես էլ շաղկապի շառավիղը, Երկարացնելով պայմանները էքստրեմումի վերաբերյալ h և R , ստանում ենք հետևյալ հարաբերակցությունները (2.6), (2.7), որոնք կարող են օգտագործվել որոշումների համար կարգավորող մեծությունների համար: Նշում ենք, որ $h(z)$ բաշխումը, որը բավարարում է պայման (2.6), բավարարում է ստանդարտ ֆունկցիաների ընդհանուր ձևով:

$$R = \sqrt{-z^2 + R_0^2(1-z/l) + (R_l^2 + l^2)z/l}$$

$$h = \sqrt{\nu/R^2} \quad (2.8)$$



Փիգ. 6



Փիգ. 7

Ինչ (2.8) ընդհանուր ձևով, որտեղ ν և l փոփոխականներն են: Կոնստանտ ν որոշվում է իզոպերիմետրիկ պայմանով: Նա Փիգ. 7 կրիվաներով 1, 2, 3 ցույց է տրվում օպտիմալ ձևերի ($R = R(z)$) ընտրությունը համարապատասխանաբար $R_0 = 1$, $l = 1$ և $R_l = 0.1$, $R_l = 1$, $R_l = 10$:

ՊՐԱԿՏԱԿԱՆ ԲԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՕՊՏԻՄԱԿԱՆ ՆԱԿԱԳԾՄԱՆ ՈՐՈՇ ԸՍՐՑՆԵՐ

ԲԱՆԱԿԱՆ Ե. Վ., ԿՈՐԵԿՏՈՐ Վ. Վ.

Ա Մ Փ Ա Փ Ո Ւ Մ

Ներկայացվում է զրոյի մասին և նախնական առաձգական թաղանթների օպտիմալ նախադրման խնդիրները: Մասան (նյութի կշիռը, ծավալը), կոշտությունը և ամրությունը (լարումների կոնցենտրացիա) ենթադրվում են տրված:

Ապացուցված է, որ թաղանթների որոշ դասի համար օպտիմալության հայտանիշ է հանդիսանում հավասարամրության պայմանը:

SOME OPTIMUM DESIGN PROBLEMS FOR THE SHELLS OF REVOLUTION

N. V. BANICHUK, V. V. KOBELEV

S u m m a r y

This paper is devoted to the problem of optimum design of the elastic shells of revolution. Mass (weight, volume of the material), rigidity and strength (stress concentration) are considered as the functionals. It was proved that for some class of shells the optimality criterium is the equistrength condition.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флорте В. Статика и динамика оболочек. М.: Госстройиздат, 1961, 306 с.
2. Runge C., Köning H. Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin: 1924.
3. Mansfield E. H. An optimum surface of revolution for pressured shells.—*J. Mech. Sci.*, 1981, vol. 23, p. 57—62.
4. Хуберли К. М. Рациональные формы трубопроводов, резервуаров и напорных покрытий. М.: Госстройиздат, 1956.
5. Шарко Н. В. Осесимметричный изгиб равнопрочной цилиндрической оболочки. ПМ, 1969, т. 5, вып. 4, с. 46—53.
6. Циллер Н. Купола равной прочности.—*Механика*, 1972, № 2, с. 127—132.
7. Гура Н. М. Оболочка вращения максимальной жесткости, работающая на кручение.—*МТТ*, 1971, № 1, с. 138—144.

Институт проблем механики АН СССР
Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
23. VI. 1981