ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXVI, № 1, 1983 Механика

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ С УЧЕТОМ РАЗУПРОЧНЕНИЯ

ЛИНЬКОВ А. М.

Многие задачи, касающиеся расчета стержневых и рамных конструкций, проектирования горно-технических сооружений, изучения разрушения при распространении трещин и в условиях стесненной пластичности, требуют рассмотрения зависимостей между кинематическими и силовыми величинами, диаграммы которых имеют наряду с восстающими падающие участки. Последние называются участками разупрочнения. Они могут описывать свойства элементарного объема [1—4], свойства конечного элемента конструкции или расчетной схемы [1, 5—8], а также условия взаимодействия на соприкасающихся поверхностях трещин [9—11], блоков [12] или тела и нагружающего устройства [13].

Разупрочнение само по себе не обязательно свидетельствует о неустойчивости. Однако, при некоторых критических сочетаниях внешних и внутренних параметров системы оно приводит к физическим эффектам, воспринимаемым как динамические, нередко катастрофические явления. К их числу относятся разрушения конструкций при больших запасах упругой энергии, горные удары, землетрясения и др. Построение теории устойчивости, адекватно описывающей подобные эффекты и позволяющей находить критические сочетания параметров, представляет актуальную задачу. Ее решение продвинуто, в основном, в направлении учета разупрочнения, относящегося к свойствам элементов среды (конструкций) [5—8, 14—18]. Не меньшее значение имеет и разработка теории для случаев, когда падающие участки имеются на диаграммах, описывающих взаимодействие на границах трещин, блоков или тела и нагружающего устройства. Хотя к этому направлению примыкает ряд изученных задач теории трещин [9—11, 19—21], общая теория потери устойчивости, которая учитывала бы падающие участки на диаграммах, описывающих условия на границах, отсутствует. Данная работа имеет целью на основе развития результатов для разупрочняющихся элементов дать теорию устойчивости, включающую сложные взаимодействия на границах соприкающихся тел.

1. Изучение устойчивости требует определения этого понятия. Для разных классов задач определения могут быть различными. Применительно к задачам, связанным с разупрочняющимися элементами, предложены два определения [14, 17].

Одно из них [14] использует постулат Друкера и характеризует устойчивое состояние как такое, для которого сумма работ приращений внешних сил на отвечающих им приращениях (скоростях)* смещений положитель-

* Ниже термины «приращение» и «скорость» используются как эквивалентные.

на. Это определение требует, чтобы при варьировании граничных условий во всем объеме тела удовлетворялась полная система уравнений (равновесия, совместности и закона деформирования).

Согласно второму определению [17], в отличие от первого, варьируются не граничные значения, а поле смещений внутри рассматриваемого объема. Состояние считается устойчивым, если для любых возможных приращений смещений приращение работы внешних сил меньше приращения внутренней энергии. При этом возможными считаются смещения не только не нарушающие заданных условий на границах тела, но и дающие внутренние усилия, удовлетворяющие статическим уравнениям равновесия в области разупрочнения.

2. Полезно сопоставить следствия этих определений, поскольку они, очевидно, не эквивалентны. Первое из них подразумевает, что решение, отвечающее малым приращениям внешних сил, существует, что делает в известной мере проблематичным его непосредственное использование в случаях, когда близкое смежное состояние равновесия отсутствует и решение испытывает конечный скачок. Второе определение включает эту возможность. Иллюстрацией может служить рассмотренный в [18] пример сжатия двух стержней, последовательно соединенных между собой, на жесткой машине. Однако, отмеченное ограничение на применимость первого определения не сказывается при использовании вытекающего из него достаточного условия устойчивости, формулируемого следующим образом [14].

Пусть в объеме V имеется область V_1 необратимых деформаций (в частности, разупрочнения). Скоростям необратимых деформаций $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ согласно определяющим уравнениям среды отвечают скорости напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$. В общем случае $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ не удовлетворяют в V_1 уравнениям совместности. Они могут рассматриваться как дисторсии. Решая задачу теории упругости при заданных дисторсиях $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ и фиксированных граничных условиях*, получим самоуравновешенное поле скоростей напряжений $\dot{\sigma}^*_{ij}$. Тогда, как показано в [14], достаточным условием устойчивости является

$$I_1 \geqslant 0 \tag{2.1}$$

где

$$I_1 = \int_{V_1} (\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}^*_{ij})\, \dot{\varepsilon}^p_{ij} dV \tag{2.2}$$

по повторяющемуся *тензорному* индексу, как обычно, подразумевается суммирование.

Если под $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ в (2.1), (2.2) понимать произвольное поле, то оно не обязательно удовлетворяет требованиям определения, принятого в [14].

* Неизменность граничных условий здесь и ниже означает, что приращения (скорости) напряжений и смещений не изменяют их. Например, на частях, где заданы смещения, скорости смещений должны обращаться в нуль; на участках границы с фиксированными напряжениями скорости последних равны нулю.

так как в общем случае ему может не соответствовать решение задачи для некоторых приращений внешних сил. Поэтому следует ожидать, что при произвольных $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ необходимое условие неустойчивости $I_1 \leqslant 0$ охватывает и потерю устойчивости в форме скачка. Доказательство этого положения можно получить, отправляясь от второго определения, предусматривающего возможность скачков. Согласно [17] из этого определения вытекает следующее необходимое и достаточное условие неустойчивости:

$$I_1 > 0 \tag{2.3}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{S_*} (\dot{\sigma}_{ni2} - \dot{\sigma}_{ni1})\, \dot{u}_i dS \tag{2.4}$$

S_* — граница, отделяющая объем V_2 от области упругих деформаций V_1; $\dot{u}_i$ — скорость смещений; $\dot{\sigma}_{ni2}$ — предельные значения скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij2}$, получаемых в результате решения задачи для объема V_2 при заданных на S_* скоростях $\dot{u}_i$ и неизменных граничных условиях на остальной части поверхности объема V_2; $\dot{\sigma}_{ni1}$ — аналогичные значения, получаемые при решении задачи для области упругих деформаций V_1; нормаль к S_* считается внешней по отношению к V_1 (внутренней относительно V_2). Если существуют такие скорости $\dot{u}_i$, для которых выполняется (2.3), то исследуемое состояние равновесия неустойчиво. Условие (2.3) включает и потерю устойчивости в форме скачка, поскольку в общем случае $\dot{\sigma}_{ni2} \neq \dot{\sigma}_{ni1}$, то есть скорости напряжений на S_* могут испытывать разрыв.

Пусть полю $\dot{u}_i$ в V_2 соответствуют скорости необратимых деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$. Их можно рассматривать как дисторсии в части V_2 объема V. Тогда решение задачи для V при дисторсии $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ и фиксированных граничных условиях на границе тела S дает самоуравновешенные скорости напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{S}$ и отвечающие им скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{S}$, определяемые по $\dot{\sigma}_{ij}^{S}$ линейными соотношениями закона Гука. Сумма $\dot{\varepsilon}_{ij}^{S} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ удовлетворяет уравнениям совместности, то есть ей в V отвечает поле $\dot{u}_i^{S+p}$. Оно не совпадает с полем $\dot{u}_i$ в V_2 и на S_*. Поэтому разность

$$\dot{u}_i^{f} = \dot{u}_i - \dot{u}_i^{S+p} \tag{2.5}$$

в общем случае нулю не равна. Согласно (2.5) решение $\dot{\sigma}_{ij1}$ в упругом объеме V_1 при заданных на S_* скоростях $\dot{u}_i$ представляется суммой поля $\dot{\sigma}_{ij}^{S}$ и поля $\dot{\sigma}_{ij}^{f}$, получаемого при решении задачи для V_1 при заданных на S_* скоростях $\dot{u}_i^{f}$. Тогда на S_*

$$\dot{\sigma}_{ni1} = \dot{\sigma}_{ni}^{S} + \dot{\sigma}_{ni}^{f} \tag{2.6}$$

В упругом объеме V_1 полю $\dot{\sigma}_{ij}^f$ соответствуют деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}^f$, получаемые по закону Гука. Подстановка (2.6) в (2.4) дает

$$I = \int\limits_{S_*} [\dot{\sigma}_{ni2} - (\dot{\sigma}_{ni}^S + \dot{\sigma}_{ni}^f)]\,\dot{u}_i dS$$

и после преобразования интеграла по S_* в объемные интегралы (с учетом выбранного направления нормали и определений $\dot{\sigma}_{ni}^S$, $\dot{\sigma}_{ni}^f$) функционал I принимает вид

$$I = -\int\limits_{V_1} [\dot{\sigma}_{ij2} - \dot{\sigma}_{ij}^S)\,\dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int\limits_{V_1} \dot{\sigma}_{ij}^f (\dot{\varepsilon}_{ij}^S + \dot{\varepsilon}_{ij}^f)\, dV \tag{2.7}$$

Интеграл

$$A = -\int\limits_{V_1} \dot{\sigma}_{ij}^f \dot{\varepsilon}_{ij}^S dV$$

в силу соотношения $\dot{\sigma}_{ij}^f \dot{\varepsilon}_{ij}^S = \dot{\sigma}_{ij}^S \dot{\varepsilon}_{ij}^f$, выполняющегося в V_1, преобразуется в интеграл по поверхности $A = -\int\limits_{S_*} \dot{\sigma}_{ni}^S \dot{u}_i^f dS$, который в свою очередь преобразуется в интеграл по объему V_2 после использования (2.5)

$$A = \int\limits_{V_1} \dot{\sigma}_{ij}^S [\dot{\varepsilon}_{ij} - (\dot{\varepsilon}_{ij}^p + \dot{\varepsilon}_{ij}^S)]\, dV \tag{2.8}$$

Теперь можно учесть, что упругая деформация $\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ связана с $\dot{\sigma}_{ij2}$ законом Гука. Тогда, поскольку скорости $\dot{\varepsilon}_{ij}^S$ связаны этим же законом с $\dot{\sigma}_{ij}^S$, справедливо равенство $\dot{\sigma}_{ij}^S (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) = \dot{\varepsilon}_{ij}^S \dot{\sigma}_{ij2}$. Отсюда

$$\dot{\sigma}_{ij}^S [\dot{\varepsilon}_{ij} - (\dot{\varepsilon}_{ij}^p + \dot{\varepsilon}_{ij}^S)] = (\dot{\sigma}_{ij2} - \dot{\sigma}_{ij}^S)\,\dot{\varepsilon}_{ij}^S \tag{2.9}$$

и (2.8) можно записать в виде

$$A = \int\limits_{V_1} (\dot{\sigma}_{ij2} - \dot{\sigma}_{ij}^s)\,\dot{\varepsilon}_{ij}^S dV$$

Представляя в (2.7) $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в виде суммы упругой и необратимой частей, $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$, и подставляя полученное выражение для A, имеем

$$I = -C_1 - I_1 \tag{2.10}$$

где

$$C_1 = \int\limits_{V_1} \dot{\sigma}_{ij}^f \dot{\varepsilon}_{ij}^f dV + \int\limits_{V_1} (\dot{\sigma}_{ij2} - \dot{\sigma}_{ij}^S)(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \dot{\varepsilon}_{ij}^S)\, dV \tag{2.11}$$

I_1 выражается формулой (2.2), причем смысл величин $\dot\sigma_{ij2}$ в (2.10) и $\dot\sigma_{ij}$ в (2.2) совпадает.

Величина C_1 является неотрицательной, так как связь $\dot\sigma_{ij}^f$ с $\dot\varepsilon_{ij}^f$ и $\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma_{ij}^S$ с $\dot\varepsilon_{ij}^e-\dot\varepsilon_{ij}^S$ выражается законом Гука. Поэтому для того, чтобы выполнялось неравенство $I\geqslant 0$, необходимо, чтобы было $I_1\leqslant 0$. Таким образом, действительно, условие $I_1\leqslant 0$, полученное в [14], является необходимым условием потери устойчивости и в тех случаях, когда устойчивость теряется в форме скачка. Заметим, однако, что в (2.10) поле $\dot\varepsilon_{ij}^p$ не вполне произвольно — оно порождается некоторыми скоростями $\dot u_i$ на S_*. По-видимому, это ограничение следует иметь в виду при использовании функционала (2.2).

3. Равенство (2.10) позволяет получить еще одно необходимое условие неустойчивости, удобное в приложениях. Для этого введем в V_1 поля $\dot u_{i1}^f$, $\dot\varepsilon_{ij1}^f$, $\dot\sigma_{ij1}^f$, которые компенсируют различие в скоростях напряжений $\dot\sigma_{ij2}^f$ и $\dot\sigma_{ij}^S$. Они отличаются от введенных в предыдущем пункте полей $\dot u_i^f$, $\dot\varepsilon_{ij}^f$, $\dot\sigma_{ij}^f$, которые компенсировали различие в скоростях смещений $\dot u_i$ и $\dot u_i^{S+p}$. Поля $\dot u_{i1}^f$, $\dot\varepsilon_{ij1}^f$, $\dot\sigma_{ij1}^f$ решают задачу теории упругости для объема V_1 при заданных на S_* скоростях $\dot\sigma_{ni1}^f=\dot\sigma_{ni2}-\dot\sigma_{ni}^S$ и неизменных условиях на остальной части границы V_1. Тогда скорости смещений $\dot u_{i1}=\dot u_{i1}^f+\dot u_i^S$ соответствуют на S_* скорости напряжений

$$\dot\sigma_{ni}=\dot\sigma_{ni2}=\dot\sigma_{ni1}^f+\dot\sigma_{ni}^S \tag{3.1}$$

Составим выражение

$$I_2=I+\int\limits_{V_1}(\dot\sigma_{ij}^f\dot\varepsilon_{ij}^f+\dot\sigma_{ij1}^f\dot\varepsilon_{ij1}^f)\,dV+2\int\limits_{V_1}(\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma_{ij}^S)(\dot\varepsilon_{ij}^e-\dot\varepsilon_{ij}^S)\,dV$$

Оно отличается от I неотрицательными слагаемыми. Поэтому, если $I_2<0$, то и $I<0$. Отсюда отрицательность I_2 является достаточным условием устойчивости. Использование (2.10), (2.11), (2.2) дает

$$I_2=\int\limits_{V_1}\dot\sigma_{ij1}^f\dot\varepsilon_{ij1}^f\,dV+\int\limits_{V_2}(\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma_{ij}^S)(\dot\varepsilon_{ij}^e-\dot\varepsilon_{ij}^S)\,dV-\int\limits_{V_2}(\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma_{ij}^S)\dot\varepsilon_{ij}^p\,dV$$

С учетом того, что $\dot\varepsilon_{ij}^e-\dot\varepsilon_{ij}^S=\dot\varepsilon_{ij}-(\dot\varepsilon_{ij}^p+\dot\varepsilon_{ij}^S)$, из (2.9) следует

$$I_2=\int\limits_{V_1}\dot\sigma_{ij1}^f\dot\varepsilon_{ij1}^f\,dV+\int\limits_{V_2}\dot\sigma_{ij2}[\dot\varepsilon_{ij}-(\dot\varepsilon_{ij}^p+\dot\varepsilon_{ij}^S)]\,dV-\int\limits_{V_2}(\dot\sigma_{ij2}-\dot\sigma_{ij}^S)(\dot\varepsilon_{ij}^p+\dot\varepsilon_{ij}^S)\,dV$$

Преобразование объемных интегралов в поверхностные с учетом (3.1) приводит I_2 к виду

$$I_2=\int\limits_{S_*}\dot\sigma_{ni1}^f\dot u_{i1}^f\,dS+\int\limits_{S_*}\dot\sigma_{ni}(\dot u_i^{S+p}-\dot u_i)\,dS+\int\limits_{S_*}\dot\sigma_{ni1}^f\dot u_i^{S+p}\,dS$$

и, поскольку в V_1 выполняются равенства $\dot{\sigma}_{ij1}^{f}\dot{\varepsilon}_{ij1} = \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij1}^{f}$, $\dot{u}_i^{S+p} + \dot{u}_i^{f} = \dot{u}_{i1}$, получаем окончательное выражение

$$I_2 = \int_{S_*} \dot{\sigma}_{ni}(\dot{u}_{i1} - \dot{u}_{i2})dS \tag{3.2}$$

Здесь для единообразия обозначено $\dot{u}_{i2} = \dot{u}_i$. Достаточным условием устойчивости, как отмечалось, является $I_2 < 0$. Необходимое условие неустойчивости имеет вид $I_2 \geqslant 0$.

Величины, входящие в формулу (3.2) для I_2, в соответствии с принятыми соглашениями имеют следующий простой механический смысл: $\dot{\sigma}_{ni}$ — произвольное поле скоростей напряжений на поверхности S_*, отделяющей зону необратимых деформаций V_2 от упругой области V_1; $\dot{u}_{i1}$ — скорости смещений, получаемые в результате решения задачи для V_1 при заданных на S_* скоростях $\dot{\sigma}_{ni}$ и неизменных прочих условиях вне S_*; $\dot{u}_{i2}$ — скорости смещений, получаемые в аналогичной задаче для V_2.

4. В случаях, когда падающие диаграммы описывают не поведение элемента среды, а граничные условия или взаимодействие на соприкасающихся поверхностях, схема анализа устойчивости, использованная в [17], и описанные выше результаты допускают естественное обобщение. Достаточно принять во внимание, что диаграммы для граничных значений величин идеализируют реальные условия передачи усилий через нагружающие элементы конечных размеров. Точно также диаграммы, описывающие взаимодействие соприкасающихся поверхностей, фактически отражают процессы, происходящие в реальных малых, но конечных, неровностях и прилежащих к ним приповерхностных слоях. Тогда упомянутые элементы, неровности и тонкие слои можно считать объемом V_2, в котором происходит разупрочнение, и перейти к пределу, устремив его толщину к нулю. Разумеется, аналогичную операцию можно выполнить и в случае, когда процессы носят обратимый характер.

В результате все приведенные условия и выражения остаются применимыми с очевидными изменениями в трактовке входящих в них членов. А именно, поскольку поверхность S_* может теперь рассматриваться как совокупность сколь-угодно близких друг к другу поверхностей Σ' и Σ'' с противоположными направлениями нормалей в смежных точках, скорости $\dot{\sigma}'_{ni1}$ на Σ' и $\dot{\sigma}''_{ni1}$ на Σ'' равны по величине и противоположны по знаку. Точно также $\dot{\sigma}'_{ni2} = -\dot{\sigma}''_{ni2}$. Тогда, считая для определенности поверхность Σ, совпадающей с Σ', имеем

$$I = \int_{\Sigma} (\dot{\sigma}_{ni2} - \dot{\sigma}_{ni1})\,\Delta\dot{u}_i\,dS \tag{4.1}$$

где $\Delta\dot{u}_i = \dot{u}_i - \dot{u}''_i$; величины без штрихов относятся к поверхности

$\Sigma = \Sigma'$. В случае, когда Σ' — внешняя граница тела, на которой задана зависимость напряжений от смещений, поверхность Σ'' считается закрепленной, то есть $\dot{u}_i'' = 0$. Для соприкасающихся шероховатых поверхностей $\dot{u}_i$ — скорость смещения поверхности, ограничивающей объем, по отношению к которому нормаль является внешней; $\dot{u}_i''$ — скорость смещения соприкасающейся поверхности; $\Delta\dot{u}_i$ — разность этих величин (скорость взаимных смещений соприкасающихся поверхностей). При разупрочнении на контакте $\dot{\sigma}_{ni2}\Delta\dot{u}_i > 0$*. Зависимость $\dot{\sigma}_{ni2}(\Delta\dot{u}_i)$ отражается диаграммой взаимодействия поверхностей [12].

Использование (4.1) предполагает задание произвольных $\Delta\dot{u}_i$, определение $\dot{\sigma}_{ni2}$ непосредственно по диаграмме взаимодействия, подсчет $\dot{\sigma}_{ni1}$ путем решения соответствующей задачи при заданных разрывах $\Delta\dot{u}_i$ на Σ и неизменных условиях вне Σ, вычисление интеграла I по (4.1) и определение его знака. Если $I < 0$ для любых $\Delta\dot{u}_i$, то состояние устойчиво. В противном случае оно неустойчиво.

Точно также выражение для I_2 приводится к виду

$$I_2 = \int\limits_{\Sigma} \dot{\sigma}_{ni} (\Delta\dot{u}_{i1} - \Delta\dot{u}_{i2}) dS$$

где $\dot{\sigma}_{ni}$ — произвольные скорости напряжений на Σ; $\Delta\dot{u}_{i2}$ — отвечающие $\dot{\sigma}_{ni}$ скорости взаимных смещений поверхностей, определяемые по диаграмме их взаимодействия; $\Delta\dot{u}_{i1}$ — скорости взаимных смещений, получаемые в результате решения соответствующей задачи при заданных на Σ' скоростях напряжений $\dot{\sigma}_{ni}$, на Σ'' — скоростях напряжений $-\dot{\sigma}_{ni}$ (нормаль направлена от Σ' к Σ'') и неизменных условиях вне Σ. Как и в предыдущем пункте, если для любого поля $\dot{\sigma}_{ni}$ функционал I_2 отрицателен, то состояние устойчиво. Выполнение условия $I_2 \geqslant 0$ является необходимым условием неустойчивости.

При упрочнении на контактах $\dot{\sigma}_{ni2}\Delta\dot{u}_i < 0$. Тогда, поскольку при обычных в теории упругости условиях на внешних границах интеграл по Σ от $\dot{\sigma}_{ni1}\Delta\dot{u}_i$ положителен в силу положительной определенности потенциала скоростей деформаций, из (4.1) следует, что $I < 0$, то есть состояние равновесия устойчиво в смысле принятого определения. Отсюда вытекает, что в важном частном случае упрочнения на контактах, когда векторы скоростей проскальзывания $(-\Delta\dot{u}_\tau)$ и касательного напряжения $(\dot{\sigma}_{\tau 2})$ сонаправлены $(-\Delta\dot{u}_\tau\dot{\sigma}_{\tau 2} > 0)$, а нормальные смещения непрерывны $(\Delta\dot{u}_n = 0)$, имеет место устойчивость. Этот ре-

* В дальнейшем для краткости формулировок обсуждается лишь случай взаимодействующих шероховатых поверхностей. Все заключения остаются в силе и для участков внешних границ, на которых задана связь напряжений и смещений, причем на них в соответствии со сделанным замечанием следует считать $\dot{u}_i'' = 0$, то есть $\Delta\dot{u}_i = \dot{u}_i$.

зультат сохраняется также при $\Delta \dot{u}_n \neq 0$, если вектор скоростей нормальных смещений $(-\Delta \dot{u}_n)$ сонаправлен вектору скоростей нормальных напряжений $\dot{\sigma}_n$ $(-\Delta \dot{u}_n \dot{\sigma}_{n2} > 0)$. При линейной связи $\dot{\sigma}_{n i 2} = a_{ij} \Delta \dot{u}_j$ и отрицательно определенной матрице с коэффициентами a_{ij} те же соображения, которые приводят к неравенству $I < 0$, будучи использованы для разности решений, свидетельствуют о единственности решения соответствующей задачи теории упругости. Если указанная связь относится к внешней границе, то легко устанавливается и теорема существования решения [22].

5. Нетрудно получить условие неустойчивости в большом, если повторить рассуждения, приводящие к (4.1), исходя из схемы для этого случая, использованной в [17]. Это условие для конечных приращений на контактирующих поверхностях имеет вид

$$-\Delta Э \geqslant \int\limits_{\Sigma} g dS \tag{5.1}$$

где $-\Delta Э$ — освобождаемая энергия, равная взятому со знаком минус изменению потенциальной энергии; из рассуждений, приведенных в [17], следует равенство

$$-\Delta Э = -\int\limits_{\Sigma} \left[\int\limits_{\Delta u_{i0}}^{\Delta u_i} \sigma_{ni1} d(\Delta u_i) \right] dS$$

g — поглощение энергии на единице поверхности Σ, определяемое по диаграмме взаимодействия поверхностей;

$$g = -\int\limits_{\Delta u_{i0}}^{\Delta u_i} \sigma_{ni2} d(\Delta u_i)$$

Δu_{i0} — разность смещений соприкасающихся вдоль Σ поверхностей в исследуемом состоянии равновесия; Δu_i — разность смещений соприкасающихся вдоль Σ поверхностей, получаемая добавлением к Δu_{i0} произвольных приращений.

Использование (5.1) упрощает оценки устойчивости, особенно в случаях, когда Δu_i принимает значение, отвечающее переходу к остаточному сцеплению на контактах. Тогда начальное Δu_{i0} и конечное Δu_i значения разности смещений на Σ оказываются фиксированными, и в каждой точке Σ можно по диаграммам взаимодействия поверхностей выбрать путь перехода от Δu_{i0} к Δu_i таким образом, чтобы значение g было минимальным. Минимальным окажется и значение правой части (5.1). Левая же часть (5.1) для упругой среды не зависит от пути перехода и может быть найдена методами теории упругости. В частности, если в линейно упругой среде совершается переход от полного сцепления на контактах к такому состоянию, что составляющие усилий, отвечающие разрывным компонентам смещений, обращаются в нуль (например, происходит проскальзывание с обращением в нуль касательных напряжений на Σ), то

$$-\Delta Э = -\frac{1}{2}\int_{\Sigma} \sigma_{ni0}\Delta u_i \, dS \tag{5.2}$$

Здесь σ_{ni0} — напряжения в исходном состоянии полного сцепления; Δu_i — разности смещений u_i'' и u_i' соприкасающихся поверхностей Σ'' и Σ' в конечном состоянии ($\Delta u_i = u_i'' - u_i'$); нормаль, как и выше, считается направленной от Σ' к Σ''. Формула (5.2) позволяет легко подсчитать приток энергии при рассмотрении проскальзывания на контактах слоев — достаточно решить две задачи теории упругости (при полном сцеплении и гладком контакте).

Рассмотрение перехода от полного сцепления к полному проскальзыванию рельефно обнаруживает общую важную особенность задач о потере устойчивости из-за разупрочнения на контактах — наличие сильного масштабного эффекта, если контактные условия остаются неизменными. Действительно, с пропорциональным ростом всех размеров напряжения остаются неизменными, а $-\Delta Э$ согласно (5.2) увеличивается пропорционально кубу характерного размера. Поскольку значения g при неизменных диаграммах взаимодействия не изменяются, правая часть (5.1) увеличивается пропорционально квадрату характерного размера*. Поэтому с увеличением линейного масштаба неизбежно достигается критический размер, при котором происходит потеря устойчивости при разупрочнении. Заметим, однако, что, хотя общая выделяющаяся энергия увеличивается, энергия, рассчитанная на единицу объема, остается неизменной. Наличие сильного масштабного эффекта в связи с рассмотрением устойчивости глиняных откосов отмечалась в [11].

В (5.1) можно принять g минимальным значением g_*. Тогда получается необходимое условие неустойчивости в большом

$$-\Delta Э/\Delta S \geqslant g_* \tag{5.3}$$

где ΔS — площадь поверхности Σ. Если площадь ΔS мала по сравнению с характерными размерами, то (5.3) принимает вид условия неустойчивости Гриффитса $-dЭ/dS \geqslant g_*$.

6. Задачи, связанные с разупрочнением сплошной среды, редко решаются в замкнутой форме и требуют применения численных методов. Последние зачастую приводят к разбиению границы на конечное число участков и замене континуума граничных значений скоростей напряжений и смещений дискретной системой обобщенных скоростей усилий $\dot{P}_\alpha$ и смещений Δu_α в m узловых точках (здесь и ниже используются векторные

* Для плоской задачи $-\Delta Э$ растет пропорционально квадрату, а правая часть (5.1) — первой степени характерного размера.

обозначения; индекс α относится к номеру узла на границе; $\alpha = 1, \ldots, m$). Подобная дискретизация имеет, например, место при использовании метода конечных элементов и основных вариантов метода граничных интегральных уравнений.

Для каждого из узлов связь величин $\dot{P}_{\alpha 2}$ и $\Delta\dot{u}_{\alpha 2}$, характеризующая свойства контакта, непосредственно следует из зависимости между $\dot{\sigma}_{ni2}$ и $\Delta\dot{u}_i$. Связь $\dot{P}_{\alpha 1}$ и $\Delta\dot{u}_{\alpha 1}$ получается в результате решения задачи для рассматриваемого объема V. Тогда равенства $\dot{P}_{\alpha 2}=\dot{P}_{\alpha 1}$, $\Delta\dot{u}_{\alpha 2}=$ $=\Delta\dot{u}_{\alpha 1}$ дают конечную систему уравнений для нахождения приближенного решения исходной задачи при заданных скоростях внешних сил или смещений границы.

Остановимся, прежде всего, на зависимости $\Delta\dot{u}_{\alpha 2}(\dot{P}_{\alpha 2})$ для узла α. В достаточно общем случае она, как и исходная зависимость $\Delta\dot{u}_2(\dot{\sigma}_{n2})$ может быть выражена соотношением вида [6]

$$-\Delta\dot{u}_{\alpha 2}= B_{\alpha}\dot{P}_{\alpha 2}+\sum_{k=1}^{n} V_{\alpha k}\dot{\lambda}_{\alpha k} \tag{6.1}$$

где первый член в правой части отвечает обратимой (упругой) составляющей скорости смещений; B_{α} — положительно определенная матрица упругих податливостей; второй член характеризует необратимые скорости смещений; $V_{\alpha k}$ — вектор, который определяет направление течения, соответствующее k-той моде течения; $\dot{\lambda}_{\alpha k}$ — множитель, отвечающий k-той моде; поскольку направление течения определено вектором $V_{\alpha k}$, можно считать, что $\dot{\lambda}_{\alpha k} \geqslant 0$; $\Delta\dot{u}_{\alpha 2}$, $\dot{P}_{\alpha 2}$, $V_{\alpha k}$ — векторы-столбцы.

При использовании соотношений типа (6.1) предполагается, что определяющие соотношения для контактных условий в узле α представляются в пространстве обобщенных усилий $P_{\alpha 2}$ кусочно гладкой поверхностью нагружения, которая является совокупностью M гладких поверхностей $\varphi_{\alpha k} = 0$ ($k = 1, \ldots, M$). Знак функций $\varphi_{\alpha k}$ всегда можно выбрать так, чтобы упругая область, отвечающая достигнутому состоянию, в пространстве $P_{\alpha 2}$ занимала область, в которой $\varphi_{\alpha k}<0$ ($k=1,\ldots, M$). Число мод n определяется числом поверхностей $\varphi_{\alpha k}=0$, которые пересекаются в достигнутой точке поверхности нагружения (если эта точка не является точкой пересечения, то $n = 1$). Вектор-столбец внешней нормали к $\varphi_{\alpha k} = 0$ обозначается $N_{\alpha k}$. Каждый из векторов $V_{\alpha k}$ также связан с поверхностью $\varphi_{\alpha k} = 0$ и считается направленным вне упругой области, то есть $V^{*}_{\alpha k}N_{\alpha k} > 0$ (верхняя звездочка здесь и ниже означает транспонирование). При ассоциированном законе течения $V_{\alpha k} = N_{\alpha k}$ — течение происходит по нормали к поверхности $\varphi_{\alpha k} = 0$ вне упругой области. Тот факт, что в общем случае каждая из функций $\varphi_{\alpha k}(P_{\alpha 2})$ содержит параметры, зависящие от всех активированных мод, может быть выражен равенством [6]

$$\dot{\varphi}_{\alpha k} = N_{\alpha k}^{*}\dot{P}_{\alpha 2} - \sum_{j=1}^{n} H_{\alpha kj}\dot{\lambda}_{\alpha j} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{6.2}$$

где $H_{\alpha kj}$ — коэффициенты квадратной $n \times n$ матрицы, характеризующие влияние на k-тую поверхность $\varphi_{\alpha k} = 0$ моды течения j, связанной с поверхностью $\varphi_{\alpha j} = 0$; при упрочнении на контактах H_α — неотрицательно определенная матрица; при разупрочнении диагональные члены отрицательны, чему соответствует перемещение поверхности нагружения внутрь упругой зоны в пространстве $P_{\alpha 2}$.

Соотношения (6.1), (6.2) линейны. Однако, зависимость между $\dot{\varphi}_{\alpha k}$ и $\dot{\lambda}_k$ нелинейна: $\dot{\varphi}_{\alpha k}\dot{\lambda}_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Это соотношение выражает тот факт, что, если пластическое течение по моде k не происходит, то $\dot{\lambda}_k = 0$, а, если оно имеет место, то изображающая точка остается на поверхности $\varphi_{\alpha k} = 0$ в процессе течения $(\dot{\varphi}_{\alpha k} = 0)$.

Вводя векторы $\dot{\lambda}_\alpha^{*} = [\dot{\lambda}_{\alpha 1} \ldots \dot{\lambda}_{\alpha n}]$, $\dot{\varphi}_\alpha^{*} = [\dot{\varphi}_{\alpha 1} \ldots \dot{\varphi}_{\alpha n}]$ и матрицы $N_\alpha = [N_{\alpha 1} \ldots N_{\alpha n}]$, $V_\alpha = [V_{\alpha 1} \ldots V_{\alpha n}]$, предыдущие соотношения можно записать в виде

$$-\Delta\dot{u}_{\alpha 2} = B_\alpha \dot{P}_{\alpha 2} + V_\alpha \dot{\lambda}_\alpha$$

$$\dot{\varphi}_\alpha = N_\alpha^{*}\dot{P}_{\alpha 2} - H_\alpha \dot{\lambda}_\alpha, \quad \dot{\lambda}_\alpha \geqslant 0, \quad \varphi_\alpha \leqslant 0, \quad \dot{\varphi}_\alpha^{*}\dot{\lambda}_\alpha = 0$$

Для системы всех m узлов можно ввести векторы $\Delta\dot{u}_2^{*} = [\Delta\dot{u}_{12}^{*} \ldots \Delta\dot{u}_{m2}^{*}]$, $\dot{\lambda}^{*} = [\dot{\lambda}_1^{*} \ldots \dot{\lambda}_m^{*}]$, $\dot{\varphi}_1^{*} = [\dot{\varphi}_1^{*} \ldots \dot{\varphi}_m^{*}]$, $\dot{P}_2^{*} = [\dot{P}_{12}^{*} \ldots \dot{P}_{m2}^{*}]$ и матрицы

$$B = \begin{vmatrix} B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & B_m \end{vmatrix}; \quad V = \begin{vmatrix} V_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & V_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & V_m \end{vmatrix}; \quad N = \begin{vmatrix} N_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & N_m \end{vmatrix}; \quad H = \begin{vmatrix} H_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & H_1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & H_m \end{vmatrix}$$

Тогда обобщенная зависимость скоростей узловых смещений от скоростей узловых сил на поверхности взаимодействия выражается соотношениями

$$-\Delta\dot{u}_2 = B\dot{P}_2 + V\dot{\lambda}$$

$$\dot{\varphi} = N^{*}\dot{P}_2 - H\dot{\lambda}, \quad \dot{\lambda} \geqslant 0, \quad \varphi \leqslant 0, \quad \dot{\varphi}^{*}\dot{\lambda} = 0 \tag{6.3}$$

Уравнения вида (6.3), содержащие среди неизвестных вектор $\dot{\lambda}$, подробно изучены при задании вектора $\dot{P}_2$ или $\Delta\dot{u}_2$ [5, 23, 24]. Однако в (6.3) эти величины заранее неизвестны. Они могут быть найдены только после присоединения дополнительных соотношений, получающихся из решения задачи для объема V. При заданных вне поверхности взаимодействия Σ граничных условиях и произвольном векторе скоростей узловых усилий $\dot{P}_1$ на Σ, решая дискретизированную задачу для V, получаем зависимость

$$\Delta\dot{u}_1 = A\dot{P}_1 - \Delta\dot{U} \tag{6.4}$$

где A и $\Delta\dot{U}$ — матрица и вектор, зависящие только от координат узловых точек на Σ и условий задачи вне поверхности Σ. Для линейно-упругой среды матрица A в большинстве случаев задания условий вне Σ является положительно определенной. Поскольку должно быть $\dot{P}_1 = \dot{P}_2 = \dot{P}$, $\Delta\dot{u}_1 = \Delta\dot{u}_2$ (6.3), (6.4) дают окончательную систему

$$\Delta\dot{U} = S^{-1}\dot{P} + V\dot{\lambda}$$

$$\dot{\varphi} = N^*\dot{P} - H\dot{\lambda}, \quad \dot{\lambda} \geqslant 0, \quad \dot{\varphi} \leqslant 0, \quad \dot{\varphi}^*\dot{\lambda} = 0 \tag{6.5}$$

где $S^{-1} = A + B$ — симметричная положительно определенная матрица.

Система уравнений (6.5) относительно $\dot{P}$ и $\dot{\lambda}$ аналогична по виду (6.3), но в отличие от (6.3) в ней роль обобщенных скоростей смещений играет известный вектор $\Delta\dot{U}$. Это позволяет очевидным образом распространить все важные заключения работ [5, 23, 24], касающиеся устойчивости и связи с квадратичным программированием, на рассматриваемые в этом пункте задачи, которые получаются при дискретизации поверхности взаимодействия и переходе к обобщенным узловым усилиям и смещениям. Не останавливаясь на этом, обратимся к другому аспекту дискретизации. А именно, используя результаты теории квадратичного программирования, можно сравнить дискретный аналог условия неустойчивости (2.3) с условиями разрешимости соответствующих математических задач.

7. Для определенности рассмотрим дискретизированную систему (6.5) предыдущего пункта при ассоциированном течении ($V = N$). Решая первое из уравнений (6.5) относительно $\dot{P}$ и подставляя в выражение для $\dot{\varphi}$, можно записать систему (6.5) в несколько более удобном для последующего анализа виде

$$-\dot{\varphi} = D\dot{\lambda} - N^*S\Delta\dot{U}, \quad -\dot{\varphi} \geqslant 0, \ \dot{\lambda} \geqslant 0, \ \dot{\varphi}^*\dot{\lambda} = 0 \tag{7.1}$$

где $D = H + N^*SN$.

По определению (4.1) функционал I в рассматриваемом дискретном случае равен $(\dot{P}_2 - \dot{P}_1)^*\Delta\dot{u}$. Выражение для него получается из (6.3), (6.4) при $\Delta\dot{u}_1 = \Delta\dot{u}_2 = \Delta\dot{u}$, $\Delta\dot{U} = 0$. Оно имеет вид

$$I = -\dot{\lambda}^*D\dot{\lambda} - (\dot{P}_2 - \dot{P}_1)^*\frac{AB}{A+B}(\dot{P}_2 - \dot{P}_1) \tag{7.2}$$

причем по одному из условий (7.1) $\dot{\lambda} \geqslant 0$.

Согласно теории квадратичного программирования положительной определенности матрицы D необходимо и достаточно, чтобы задача (7.1) имела единственное решение при любом $\Delta\dot{U}$ (например, [25]). В силу положительной определенности A и B из (7.2) следует, что этого условия достаточно также для отрицательной определенности функционала I. Таким образом, однозначной разрешимости задачи (7.1) достаточно, чтобы функционал I был отрицательно определенным и, тем самым, гарантировалась устойчивость в смысле определения [17].

Можно доказать и в известном смысле обратное утверждение, касающееся необходимого условия. Если при некотором не равном нулю неотрицательном векторе $\dot{\lambda}_1$ выполняется неравенство

$$\dot{\lambda}_1^* D \dot{\lambda}_1 \leqslant 0 \tag{7.3}$$

то существует такое $\Delta\dot{u}$, что $I \geqslant 0$, то есть имеет место неустойчивость в смысле определения [17].

Это утверждение в соответствии с существом рассматриваемой проблемы ниже доказывается при условии, что матрица $H + N^*B^{-1}N$ положительно определенная (противоположному случаю отвечает, так называемое, закритическое разупрочнение элементов механической системы, а на практике происходит их саморазрушение).

Доказательство основано на другом выражении для I, легко следующем из (6.3), (6.4) при

$$\Delta\dot{u}_1 = \Delta\dot{u}_2 = \Delta\dot{u}, \ \Delta\dot{U} = 0$$

$$I = -\Delta\dot{u}^* (A^{-1} + B^{-1}) \Delta\dot{u} + \dot{\lambda}^* (H + N^* B^{-1} N) \dot{\lambda} \tag{7.4}$$

При этом из (6.3) вытекает, что входящий в (7.4) вектор $\dot{\lambda}$ является решением задачи

$$-\dot{\varphi} = (H + N^*B^{-1}N)\dot{\lambda} + N^*B^{-1}\Delta\dot{u}, \quad -\dot{\varphi} \geqslant 0, \quad \dot{\lambda} \geqslant 0, \quad \dot{\varphi}^*\dot{\lambda} = 0 \tag{7.5}$$

Из положительной определенности матрицы $H + N^*B^{-1}N$ следует, что к (7.5) применима теорема Куна-Таккера. Согласно этой теореме [25] вектор $\dot{\lambda}$ является решением задачи

$$\max \{ \Psi \equiv -\dot{\mu}^* (H + N^*B^{-1}N)\dot{\mu} - 2\dot{\mu}^* N^* B^{-1} \Delta\dot{u} \mid \dot{\mu} \geqslant 0 \}$$

причем, если $\dot{\mu} = \dot{\lambda}$ — решение, то $\max \Psi = \Psi_0 = \dot{\lambda}^* (H + N^*B^{-1}N)\dot{\lambda}$. Тогда представление (7.4) в виде $I = -\Delta\dot{u}^* (A^{-1} + B^{-1}) \Delta\dot{u} + \Psi_0$ и замена Ψ_0 на заведомо не большее значение, равное Ψ при произвольном неотрицательном $\dot{\mu}$, дает

$$I \geqslant -\Delta\dot{u}^*(A^{-1} + B^{-1})\Delta\dot{u} - \dot{\mu}^*(H + N^*B^{-1}N)\dot{\mu} - 2\dot{\mu}^*N^*B^{-1}\Delta\dot{u}\Big|_{\dot{\mu} \geqslant 0} \tag{7.6}$$

Вектор $\Delta\dot{u}$ произволен. Поэтому можно, например, при любом $\dot{\mu} \geqslant 0$ положить $\Delta\dot{u} = -ASN\dot{\mu}$. Тогда из (7.6) следует $I \geqslant -\dot{\mu}^* D \dot{\mu}$, и, взяв в качестве $\dot{\mu}$ вектор $\dot{\lambda}_1$, фигурирующий в условии теоремы, получаем $I \geqslant -\dot{\lambda}_1^* D \dot{\lambda}_1$ что с учетом (7.3) дает доказываемое неравенство $I \geqslant 0$.

Особое место занимает случай, когда матрица D не является положительно определенной, но (7.3) выполняется только на таких векторах $\dot{\lambda}_1$, которые не удовлетворяют условию $\dot{\lambda}_1 \geqslant 0$. Функционал I при этом согласно (7.2) отрицателен. Однако, единственное решение

(7.1) существует не при любом $\Delta\dot{U}$. Пример задачи с системой (7.1), включающий такой случай, рассмотрен в [26]. Оказывается, что решение существует при любых внешних воздействиях $\Delta\dot{U}$, но при некоторых из них оно теряет единственность, испытывая разветвление, причем однородная задача не имеет отличных от нуля решений и малым $\Delta\dot{U}$ на каждой ветви отвечают малые $\dot{\lambda}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{P}$. Согласно критериям работ [14, 17] ситуация устойчива. По-видимому, такая ее оценка отвечает реальности, поскольку энергия не выделяется, деформирование требует ее притока извне и на практике без динамических эффектов осуществляется та ветвь, для которой затраты внешней энергии минимальны.

ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐԸ ԱՄՐԱՊՆԴՄԱՆ ՎԵՐԱՑՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա. Մ. ԼԻՆԿՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ամրապնդումը կորցնող էլեմենտներ պարունակող միջավայրերի համար ուսումնասիրվել են հայտնի և ստացվել են նոր կայունության բավարար պայմանները։ Տրվել է արտաքին սահմանի և շփվող միջավայրերի կոնտակտի վրա ամրապնդման վերացման հետ կապված խնդիրների համար տեսության ընդհանրացումը։

Ցույց է տրված, որ համադրեցության մակերևույթի դիսկրետ էլեմենտների տրոհման դեպքում խնդիրը կարող է բերվել քառակուսային ծրագրավորման (Ք. Ծ) հայտնի խնդրին։ Սահմանվել է ֆիզիկական անկայունության հայտանիշի կապը ՔԾ խնդրի լուծելիության պայմանների հետ։ Աշխատանքի արդյունքները առաջարկվում է օգտագործել ափերի փոխազդեցությունների ճաքերի տարածման, մեծադյուս լեռնանցքների զանգվածների կայունության, լեռնային հարվածների և երկրաշարժերի ուսումնասիրության ժամանակ։

THE PROBLEM OF STABILITY WITH ALLOWANCE FOR SOFTENING

A. M. LINKOV

S u m m a r y

The known sufficient conditions of stability for the media containing softening elements are investigated and new ones are developed. The theory is generalized for the problems concerning softening on the contacts of the bodies and on their exterior boundaries. It is shown that by dividing the contact surface on discrete elements the problem

may be reduced to the known one in the theory of quadratic programming (QP). The connection between the physical stability and solubility conditions for the problem of QP is stated. The results are supposed to be applied in the following fields: the growth of cracks with interacting surfaces, the stability of the rock massif consisting of the system of blocks, the mechanics of rock bursts and earthquakes.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Palmer A. C., Maier G., Drucker D. C.* Normality relations and convexity of yield surfaces for unstable materials or structural elements.—J. Appl. Mech., 1966, vol. 31, No. 2, p. 464—470. (Русск. перев.: Пальмер А., Майер Д., Друкер Д. Соотношение нормальности и выпуклости поверхностей текучести для неустойчивых материалов или элементов конструкций.—Прикладная механика, серия Е, ИИЛ, 1967, № 2).
2. *Ибрагимов В. А., Клюшников В. Д.* Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой.— Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 4.
3. *Линьков А. М.* Об учете запредельных деформаций при решении задач горной геомеханики.— Тр. ВНИМИ, сб. 103, 1977, с. 71—76.
4. *Maier G., Hueckel T.* Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials.—Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 1979, vol. 16, No. 2, p. 77—92.
5. *Maier G.* Behavior of elastic-plastic trusses with unstable bars.—J. Engin. Mech. Div. Proc. ASCE, 1966, vol. 92, EM 3, p. 67—91.
6. *Maier G.* "Linear" flow-laws of elastoplasticity: a unified general approach.—Accademia Nazionale dei Lincei. Estratto dai Rendiconti della Classe di Sienza fisiche, matematiche e naturali. Serie VIII, 1969, vol. 47, No. 5, p. 132—142.
7. *Salamon M. D. G.* Stability, instability and design of pillar workings.—Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 1970, vol. 7, No. 6, p. 613—631.
8. *Линьков А. М., Петухов И. М.* Проектирование целиков с учетом опасности горных ударов.— Тр. ВНИМИ, сб. 113, 1979.
9. *Леонов М. Я., Панасюк В. В.* Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі.—Прикладна механіка, 1959, т. 5, № 4.
10. *Dugdale D. S.* Yielding of steel sheets containing slits.—J. Mech. Phys. Solids, 1969, vol. 8, No. 2, p. 100—104.
11. *Palmer A. C., Rice J. R.* The growth of slip in progressive failure of over-consolidated clay.—Proc. Roy. Soc. London, A. 332, 1973, p. 527—548.
12. *Линьков А. М.* О механике блочного массива горных пород.— Физ.-техн. проблемы разраб. полезных ископ., 1979, № 4, с. 3—9.
13. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979, 384 с.
14. *Maier G.* On elastic-plastic structures with associated stress-strain relations allowing for work softening.—Mechanica, 1967, vol. 2, No. 1, p. 55—64.
15. *Maier G.* Extremum theorems for the analysis of elastic-plastic structures containing unstable elements.—Mechanica, 1967, vol. 2, No. 4, p. 235—242.
16. *Maier G.* On structural instability due to strainsoftening. In: "Instability of Continuous Systems. IUTAM Symposium Herrenalb 1969", Editor H. Leipholz, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer-Verlag, 1971, p. 411—417.
17. *Линьков А. М.* Об условиях устойчивости в механике разрушения.— Доклады АН СССР, 1977, т. 233, № 1, с. 45—48.
18. *Petuckhov I. M., Linkov A. M.* The theory of post-failure deformations and the problem of stability in rock mechanics.—Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 1979, vol. 16, No. 2, p. 57—76.

19. *Новожилов В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности.— ПММ, 1969, т. 33, № 2, с. 212—222.
20. *Andersson H., Bergkvist H.* Analysis of a non-linear crack model.— J. Mech. Phys. Solids, 1970, vol. 18, No. 1, p. 1—28.
21. *Линьков А. М.* О критерии типа Друкера в теории трещин. В сб. «Исследования по упругости и пластичности», сб. 10. Ленинград, изд. Ленинградского университета, 1974, с. 47—65.
22. *Линьков А. М.* Об одном интегральном соотношении в плоской задаче теории упругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 6, с. 82—85.
23. *Maier G.* A quadratic programming approach for certain nonlinear structural problems.—Mechanica, 1968, vol. 3, No. 2, p. 121—130.
24. *Maier G.* Some theorems for plastic strain rates and plastic strains.—Journal de Mécanique, 1969, vol. 8, No. 1, p. 5—19.
25. *Зангвилл У. И.* Нелинейное программирование. М.: «Советское радио», 1973. 312 с.
26. *Maier G., Zavelani A., Dotreppe J.-C.* Equilibrium branching due to flexural softening.— J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, 1973, vol. 99, No. EM4, p. 897—901.

ВНИИ горной геомеханики
и маркшейдерского дела

Поступила в редакцию
16. III. 1981