

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С УГЛАМИ

АРСЕНЯН В. А., ЗАРГАРЯН С. С.

Настоящая работа посвящена реализации численного решения интегрального уравнения плоской теории упругости для областей с углами [1].

Ранее в [2] предлагалось решать плоскую задачу для конечных односвязных областей с углами путем выделения в окрестности углов асимптотики решения краевой задачи при однородных условиях на полукасательных, образующих угол области. В [3] была реализована возможность выделения особенностей для напряжений в окрестности угловых точек в бесконечной области путем введения компенсирующих нагрузок.

Цель настоящей работы — показать высокую эффективность выделения асимптотики решения интегральных уравнений в окрестности угловых точек контура и ее гладкого сопряжения с кубическими сплайнами на оставшейся части контура при численном решении интегральных уравнений плоской теории упругости для областей с углами.

На примере плоской задачи для бесконечной плоскости с прямоугольным отверстием, находящимся под действием гидростатической нагрузки, приводится алгоритм численного решения интегрального уравнения методом последовательных приближений и дается анализ, который показывает каким образом расхождения от значения корня трансцендентного уравнения для показателя степени главного члена асимптотики решения вблизи угловых точек контура влияют на точность удовлетворения граничного условия. Этот численный анализ подтверждает необходимость использования асимптотики решения интегральных уравнений в окрестности угловых точек контура для удовлетворения граничного условия задачи с заданной точностью.

1. Пусть D^- — бесконечная область, составляющая внешность прямоугольника L с основанием b и высотой h , обход в положительном направлении которого совершается так, чтобы область D^+ оставалась слева. Оси ox и oy направим по осям симметрии прямоугольника так, чтобы ось ox была параллельна его основанию.

Граничное условие задачи записывается так:

$$\varphi(t) + \overline{t\varphi'(t)} + \overline{\varphi(t)} = f(t) + C \quad (1.1)$$

где

$$f(t) = i \int_a^t (X_n + iY_n) ds \quad (1.2)$$

C — подлежащая определению комплексная постоянная, X_n и Y_n — проекции действующего по контуру полного напряжения на ox и oy , s — длина контура, отсчитываемая от произвольно фиксируемой точки контура.

Разыскивая комплексные потенциалы в виде интегралов типа Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(s) d\tau(s)}{\tau(s) - z} \quad (1.3)$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(s)} d\tau(s)}{\tau(s) - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(s) d\overline{\tau(s)}}{\tau(s) - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau(s)\omega(s) d\tau(s)}{(\tau(s) - z)^2} + \frac{b}{z} \quad (1.4)$$

полагая, что

$$b = \frac{i}{M} \int_L \{ \omega(s) d\overline{\tau(s)} - \overline{\omega(s)} d\tau(s) \} \quad (1.5)$$

$$C = -\frac{1}{N} \int_L \omega(s) ds \quad (1.6)$$

и подставляя граничные значения (1.3) и (1.4) в (1.1), почти всюду на L получаем следующее уравнение:

$$\omega(z) + \frac{1}{\pi} \int_L \omega(s) d_s F(\sigma, s) - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\omega(s)} \exp(2iF(\sigma, s)) dF(\sigma, s) + \frac{b}{\tau(z)} = f(z) + C \quad (1.7)$$

где $\omega(s)$ — комплексная непрерывная функция, производная которой в окрестности угловых точек контура удовлетворяет условию H^* [5].

В (1.5) и (1.6) M и N — действительные числа, принимаемые по удобству в процессе решения [6], а в (1.7) функция $F(\sigma, s)$ представляет угол видимости, равный

$$F(\sigma, s) = \arg[\tau(z) - \tau(s)] \quad (1.8)$$

Здесь σ и s — длины дуг контура, отсчитываемые от некоторой фиксированной точки контура, отличной от угловой. Свойства угла $F(\sigma, s)$ описаны в [4].

Учитывая, что к интегральному уравнению (1.7) можно применять теорию Фредгольма [1], будем решать это уравнение методом последовательных приближений, полагая

$$\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \omega_n(z) \quad \text{при } \lambda = 1 \quad (1.9)$$

Подставив (1.9) в (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \omega_0(z) = f(z); \quad \omega_n(z) = -\frac{1}{\pi} \int_L \omega_{n-1}(s) d_s F(z, s) + \\ + \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\omega_{n-1}(s)} \exp(2iF(z, s)) d_s F(z, s) + \frac{i}{M\tau(z)} \int_L \{ \omega_{n-1}(s) d\tau(s) - \\ - \overline{\omega_{n-1}(s)} d\tau(s) \} - \frac{1}{N} \int_L \omega_{n-1}(s) ds \end{aligned} \quad (1.10)$$

Интегралы, входящие в (1.7) и (1.10), понимаются в смысле Стильбеса.

Для численного решения интегрального уравнения (1.7) разбиваем узловыми точками равномерным делением на n_1 сегментов длиной Δ_1 каждое основание и n_2 сегментов длиной Δ_2 каждую боковую сторону прямоугольника. Множество T точек $\tau(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, 2(n_1 + n_2)$, расположенных в середине между узловыми, назовем множеством основных опорных точек. Сегменты длиной Δ_1 и Δ_2 будем называть Δ_i окрестностью основных опорных точек. Крайние сегменты, пересечением которых являются угловые точки, обозначим через Δ_1^* и Δ_2^* . Выберем целое нечетное число $m \geq 3$ и между двумя соседними основными опорными точками, не примыкающими к угловым точкам, на разных расстояниях поместим $(m-1)$ дополнительных опорных точек, множество которых обозначим через D .

На каждой Δ_i^* окрестности крайних опорных точек, примыкающих к угловым, поместим k дополнительных опорных точек $\tau(s_k)$, сгущающихся по мере приближения к угловой, расположение которых определим из условия

$$\Delta F(\tau, s) = \arg[\tau(\sigma_j^0) - \tau(s_{k+1})] - \arg[\tau(\sigma_j^0) - \tau(s_k)] = \text{const} \quad (1.11)$$

Здесь $\tau(\sigma_j^0) \in \Delta_1^*$, если $\tau(s_k) \in \Delta_2^*$ и, наоборот, $\tau(\sigma_j^0) \in \Delta_2^*$, если $\tau(s_k) \in \Delta_1^*$.

Точки $\tau(s_k)$ будем откладывать на Δ_1^* от основной опорной точки $\tau(\sigma_j^0) \in \Delta_1^*$ по обе стороны от нее так, чтобы сама точка $\tau(\sigma_j^0)$ совпала с одной из дополнительных. Пусть $T \cup D = Q$. Для вычисления интегралов, входящих в (1.10), будем пользоваться множеством узловых точек R_i образуемых угловыми точками и множеством точек, расположенных в серединах соседних точек множества Q , не примыкающих к угловым.

Для приближенного решения уравнения (1.7) в (1.10) заменим интегралы Стильбеса интегральными суммами Стильбеса:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_L \omega_{n-1}(s) d_s F(\sigma_k, s) &= \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^q \omega_{n-1}(\sigma_j) [F(\sigma_k, \sigma_{j+1}) - F(\sigma_k, \sigma_j)] \\ \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\omega_{n-1}(s)} \exp(2iF(\sigma_k, s)) d_s F(\sigma_k, s) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^q \overline{\omega_{n-1}(\sigma_j)} [\exp(2iF(\sigma_k, \sigma_{j+1})) - \exp(2iF(\sigma_k, \sigma_j))] \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\tau_j \in Q$; $\tau_k \in T$; $s_j \in R$; $g = 8(x-1) + 2(m-1)(n_1 + n_2 - 4) + 2(n_1 + n_2)$ — число точек множества Q , причем

$$F(\tau_k, s_{j+1}) - F(\tau_k, s_j) = \frac{1}{2i} \left[\ln \frac{\tau(s_{j+1}) - \tau(\tau_k)}{\tau(s_{j+1}) - \tau(\tau_k)} - \ln \frac{\tau(s_j) - \tau(\tau_k)}{\tau(s_j) - \tau(\tau_k)} \right] \quad (1.13)$$

Пусть s_j^* ($s_1^* = 0$; $s_2^* = b$; $s_3^* = b + h$; $s_4^* = 2b + h$) — дуговые координаты вершин прямоугольника, а $\tau(s_j^*) = \alpha_j$ — угловые точки, являющиеся пересечением сторон прямоугольника L_j , причем $L_j \cap L_{j+1} = \alpha_{j+1}$ для $j = 1, 2, 3$ и $L_4 \cap L_1 = \alpha_1$.

Следуя [1], принимаем, что при отсутствии сосредоточенных воздействий в угловых точках контура в окрестности последних $\omega(s)$ имеет следующее представление на каждой стороне L_j ($j = 1, 2, 3, 4$) прямоугольника, если $\pi < \beta - \alpha < 2\pi$:

$$\omega_j^+(s) = \sum_{r=1}^{v_1} A_{r,j}^+ (s - s_j^*)^{r-1} + \sum_{r=0}^{v_2} E_{r,j}^+ (s - s_j^*)^r \quad (1.14)$$

в случае простых корней трансцендентного уравнения [7]

$$\sin^2 \lambda (\beta - \alpha) = \lambda^2 \sin^2 (\beta - \alpha) \quad (1.15)$$

полученного в [1] при изучении асимптотики решения уравнения (1.7).

В (1.14) знак (+) соответствует разложению в окрестности начала L_j , а знак (—) разложению у конца L_j . Числа v_1 и v_2 выбираются в соответствии с принимаемой точностью приближенного решения; β и α — углы, образуемые полукасательными, проведенными к угловой точке с фиксированным направлением так, чтобы $(\beta - \alpha)$ представлял угол упругой области в угловой точке контура.

Ввиду непрерывности $\omega(s)$ на всем L имеем также, что в (1.14) имеют место условия:

$$E_{0,j}^- = E_{0,j}^+; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad E_{0,5}^- = E_{0,1}^+$$

Пронумеруем точки множества T от 1 до $2(n_1 + n_2)$, начиная с $\tau(s_1^*) \in L_1$, двигаясь по L в положительном направлении.

Распространим область определения представления (1.14) на отрезки длиной $\Delta_i^* + \Delta_i(l-2) + \Delta_i/2$, $i = 1, 2$, примыкающие слева и справа к каждой угловой точке, удерживая в последних $(l-1)$ членов, где $l = v_1 + v_2 + 2$. На остальных $n_1 - 2l$ сегментах средней части оснований и $n_2 - 2l$ сегментах средней части боковых сторон прямоугольника искомую функцию $\omega(s)$ будем представлять в виде кубического неперiodического сплайна [8]

$$\omega_{j,k}(s) = \sum_{m=0}^3 d_{j,k}^{(m)} (s_k - s)^m \quad (1.16)$$

где k принимает значения:

$$k = \begin{cases} l, l+1, \dots, n_1-l & \text{при } j=1 \\ n_1+l, n_1+l+1, \dots, n_1+n_2-l & \text{при } j=2 \\ n_1+n_2+l, n_1+n_2+l+1, \dots, 2n_1+n_2-l & \text{при } j=3 \\ 2n_1+n_2+l, 2n_1+n_2+l+1, \dots, 2n_1+2n_2-l & \text{при } j=4 \end{cases}$$

Для гладкого сопряжения представления (1.14) со сплайном (1.16) в точках контура с дуговыми координатами s_k ($k=l; n_1 \pm l; n_1+n_2 \pm l; 2n_1+n_2 \pm l; 2n_1+2n_2-l$) потребуем выполнения следующих условий:

$$\omega_j^+(s_k) = d_{j,k}^{(0)}; \quad \Omega_j^+(s_k) = d_{j,k}^{(1)} \quad (1.17)$$

для $j=1$ и $k=n_1-l$, $j=2$ и $k=n_1+n_2-l$; $j=3$ и $k=2n_1+n_2-l$, $j=4$ и $k=2(n_1+n_2)-l$.

Здесь принято обозначение $\omega_j^+(s) = \Omega_j(s)$.

Определяя первоначально коэффициенты сплайна (1.16) и представления (1.14) для известной в (1.10) функции $\omega_0(s) = f(s)$ в основных опорных точках T , значения этой функции в дополнительных опорных точках D будем определять из этого сплайна и принимаемого представления. Подставив эти значения $\omega_0(z_k^0)$ в (1.12), определим значения $\omega_1(z_k^0)$ по (1.10) в точках множества T . Продолжая таким образом последовательные приближения, можно прийти к искомому численному решению (1.9). Дополнительные опорные точки, используемые в (1.12), повышают точность вычисления интегралов n -ного приближения по значениям искомой функции предыдущего приближения.

Произвол в выборе действительных чисел M и N , входящих в (1.5) и (1.6), позволяет управлять сходимостью последовательных приближений не только в случае гладкого контура, как это показано в [6], но и при использовании представления (1.14) для случая контуров с угловыми точками.

2. Принимая в (1.1) $f(t) = -pt$, рассмотрим задачу о действии гидростатической нагрузки с интенсивностью p по контуру прямоугольного отверстия с отношением сторон $b/h = 3/2$.

Ввиду симметрии задачи имеем, что в (1.6) $C = 0$.

Последовательные приближения (1.10) оказываются сходящимися при значении параметра $M = 6l$, входящего в функционал (1.5). При этом, полагая в (1.14) $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, а $\lambda = 0,5445$, получаем, что граничное условие, контролируемое по формулам для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \omega'(t) + \overline{\omega'(t)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \left[\frac{\omega'(\tau) d\tau}{\tau-t} - \frac{\overline{\omega'(\tau) d\tau}}{\bar{\tau}-\bar{t}} \right] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= [\overline{\omega'(t)} - \omega'(t)] \frac{d\bar{t}}{dt} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\bar{\tau}-\bar{t}}{\tau-t} \left[\frac{\omega'(\tau) d\tau}{\tau-t} - \frac{\overline{\omega'(t) d\tau}}{\bar{\tau}-\bar{t}} \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

дает для нормальных и касательных напряжений на контуре наибольшую

относительную погрешность в 3% по отношению к величине интенсивности p для случая, если в (1.9) ограничиваться итерацией с номером $n = 26$, при $n_1 = 30$, $n_2 = 20$, $m = 3$, $\kappa = 8$, а, следовательно, в (1.12) $q = 340$. При этом имеем, что

$$\left| \frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{\omega_n} \right| < 0.001 \quad (2.2)$$

Удвоявая число точек множества T , то есть полагая, что $n_1 = 60$ и $n_2 = 40$ при тех же значениях m и κ , получаем, что относительная погрешность (2.2) последовательных приближений (1.10) достигается при $n = 34$. При этом крайние основные опорные точки сегментов Δ_1^* и Δ_2^* приближаются к угловой, и напряжения дают несколько увеличенную наибольшую относительную погрешность в $3,8\%$ в одной из этих точек.

Точность вычисления последовательных приближений (1.10) контролируется согласно (2.2) и вычислением напряжений на контуре (см. столбцы для σ_x и σ_y табл. 1).

Таблица 1

x	y	$\operatorname{Re} \omega(t)$	$\operatorname{Im} \omega(t)$	σ_x/p	σ_y/p
0,03	0,4	-0,0011	0,1301	0,403	1,008
0,07	0,4	0,0018	0,156	0,403	1,009
0,11	0,4	0,0144	0,2	0,405	1,009
0,15	0,4	0,0404	0,258	0,402	1,009
0,19	0,4	0,0817	0,3256	0,395	1,009
0,23	0,4	0,1385	0,3988	0,381	1,009
0,27	0,4	0,21	0,4745	0,360	1,009
0,31	0,4	0,2948	0,5507	0,327	1,008
0,35	0,4	0,3917	0,6265	0,283	1,007
0,39	0,4	0,5	0,7023	0,224	1,009
0,43	0,4	0,6199	0,7795	0,139	1,008
0,47	0,4	0,754	0,8611	0,012	1,007
0,51	0,4	0,9085	0,9525	-0,211	0,996
0,55	0,4	1,1006	1,0644	-0,614	1,006
0,59	0,4	1,4062	1,2392	-7,992	1,023
0,6	0,39	1,5018	1,1398	0,962	-8,804
0,6	0,35	1,3302	0,8393	1,005	-1,018
0,6	0,31	1,2165	0,6564	0,999	-0,568
0,6	0,27	1,1268	0,5175	1,009	-0,336
0,6	0,23	1,0529	0,4054	1,009	-0,208
0,6	0,19	0,9922	0,3119	1,010	-0,123
0,6	0,15	0,9433	0,2323	1,012	-0,067
0,6	0,11	0,9060	0,1627	1,012	-0,03
0,6	0,07	0,8801	0,1002	1,011	-0,007
0,6	0,03	0,8657	0,0421	1,011	0,005

На фиг. 1 приведен график тангенциальных нормальных напряжений на контуре рассматриваемой пластинки под действием гидростатического давления, показанный для четверти контура.

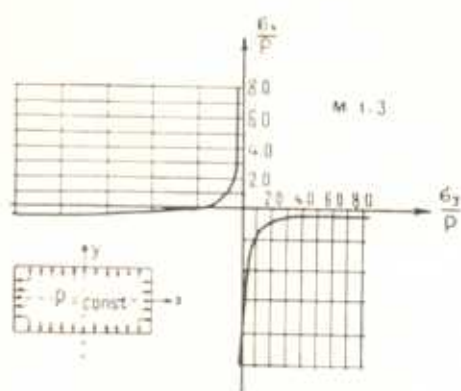
Введение асимптотики (1.14) существенно влияет на точность получаемого приближенного решения. Для оценки необходимости введения представлений (1.14) проведен следующий анализ, устанавливающий расхождение от точного решения (при

$\lambda_1^{(3)} = 0,5445$ для угла $\beta - \alpha = 3/2\pi$)

тех решений, которые получаются при решении интегрального уравнения со значениями λ_1^i , отличными от этого значения $\lambda_1^{(3)}$. В результате анализа установлено, что отклонения показателя λ_1 в (1.14) (при $\gamma_1 = 1$) от значения $\lambda_1 = 0,5445$, являющегося корнем уравнения (1.15) при $\beta - \alpha = 3/2\pi$, приводят к отклонению напряжений (2.1) как в основных, так и в дополнительных опорных точках границы в окрестности углов, хотя интегральное уравнение (1.7) в основных опорных точках удовлетворяется точно. Это приводит к отклонению построенного таким образом решения от заданных на границе напряжений. При этом отметим, что последовательные приближения (1.10) оказываются сходящимися и при отклоняющихся от $\lambda_1 = 0,5445$ значениях показателя λ_1 . Как показано на фиг. 2, напряжения σ_y , вычисленные в окрестности угловой точки 1 на стороне

L_1 при $\gamma_1 = 1$ и при λ_1 , принимающем в (1.14) значения $\lambda_1^{(1)} = 0,1$; $\lambda_1^{(2)} = 0,3$; $\lambda_1^{(4)} = 0,7$; $\lambda_1^{(5)} = 0,9$ и $\lambda_1^{(6)} = 1$, отличаются от заданного $\sigma_y = p$ (см. графики № 1, 2, 4, 5, 6). При $\lambda_1^{(3)} = 0,5445$ (график № 3) эти напряжения практически совпадают с заданными. Здесь начало оси абсцисс помещено в угловой точке 1, а ось направлена по L_1 . При этом точки деления указаны в процентах от b — длины основания L_1 . Таким образом, для построения приближенного решения интегрального уравнения (1.7) необходимо решение (1.7) представлять в виде ее асимптотики (1.14) в окрестности угловых точек контура, а дальше гладко продолжать это решение посредством сплайнов (1.16). Использование других методов численного интегрирования уравнения (1.7), отличных от рассматриваемых, приводит к большим погрешностям из-за процессов численного дифференцирования искомой функции $\omega(t)$ в интегралах выражений (2.1).

Уравнение (1.15) имеет в интервале $0 < \text{Re } \lambda < 1$ для угла $\beta - \alpha = 3/2\pi$ два действительных корня: $\lambda_1 = 0,5445$ и $\lambda_2 = 0,9085$. Если принять в (1.14) $\gamma_1 = 2$, $\lambda_1 = 0,5445$ и изменять лишь λ_2 , то при $\lambda_2 > 0,5445$, в том числе и для $\lambda_2 = 0,9085$, влияние этого второго члена с показателем λ_2 на величину напряжений пренебрежимо мало.

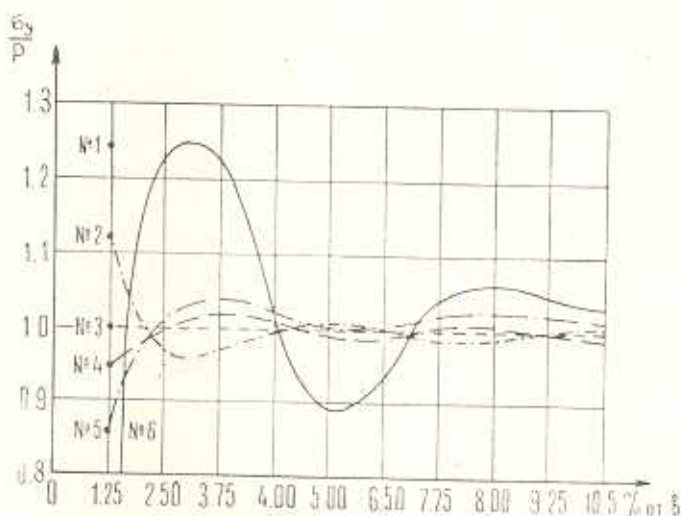


Фиг. 1.

Для рассматриваемого случая гидростатической нагрузки, действующей по контуру прямоугольного отверстия с отношением сторон $b/h = 3/2$, приближенные значения коэффициентов главных членов асимптотики (1.14) для случая $n_1 = 60$ и $n_2 = 40$ равны:

$$A_{1,1}^+ = A_{1,3}^+ = 2,988 - i1,541, \quad A_{1,1}^- = A_{1,3}^- = 2,988 + i1,541$$

$$A_{1,2}^+ = A_{1,4}^+ = 2,582 - i1,527, \quad A_{1,2}^- = A_{1,4}^- = 2,582 + i1,527$$



Фиг. 2.

Эти значения меняются в зависимости от способа разбиения контура и числа точек множества T , так как они вместе с другими коэффициентами $A_{r,j}^{\pm}$, $E_{r,j}^{\pm}$ и $d_{j,k}^{(m)}$ определяются последовательными приближениями (1.10) с учетом (1.12), (1.13), (1.14), (1.16) и (1.17). Однако изменения всех коэффициентов, представляющих искомую функцию $\omega(t)$ в зависимости от числа точек множества T и способа разбиения контура, происходит таким образом, что граничное условие удовлетворяется достаточно точно в указанных выше пределах.

ԱՌՍԶԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԹՎԱՅԻՆ
 ԼՈՒՅՈՒՄԸ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Վ. Ա. ԱՐՄԵՆՅԱՆ, Ս. Ս. ԶԱՐԿԱՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հաջորդական մոտավորությունների եղանակով լուծվում է Շերման-Լաուրելիսի բնդհանրացված ինտեգրալ հավասարումը անկյուններ ունեցող տիրույթների համար: Նկարագրելով այդ դեպքում տիրույթի անկյունների շրջափակում ինտեգրալ հավասարման լուծման ապիմպոտտիկան այդ հավասար-

ման թվային լուծումը ցույց է տրվում ուղղանկյունաձև անցքով անվերջ հար-
թույնություն լարվածային զիճակի որոշման խնդրի վրա:

Խնդրի լուծումը ներկայացվում է աղյուսակի և գրաֆիկների միջոցով:

NUMERICAL SOLUTIONS OF PLANE PROBLEMS OF ELASTICITY FOR REGIONS WITH ANGLES

V. A. ARSENIAN, S. S. ZARGARIAN

S u m m a r y

The integral equation of Sherman-Laurichella for plane problems of elasticity for regions with an angular point on the contour was solved by the numerical iterative method. Owing to the asymptotic representation of the solution of the integral equation at the neighbourhood of angular points of the contour, high accuracy of the numerical solution was obtained.

As an example, the problem for an infinite region bounded internally by a rectangular hole is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заргарян С. С. Плоская задача теории упругости для многосвязных областей с углами. Пятый всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. КазССР. Алма-Ата: Аниот. докл. изд. «Наука», 1981, с. 160.
2. Заргарян С. С. Плоская задача теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе внешних силах.— Докл. АН Арм.ССР, 1975, т. 60, № 1, с. 43—50.
3. Александров А. Я., Зиновьева Б. М., Куришин А. М. Об одном численном методе решения задач теории упругости с учетом особенностей напряженного состояния вблизи угловых точек и линий.— Изв. АН СССР, 1980, № 3, с. 39—49.
4. Данилюк И. И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975, 295 с.
5. Мухомелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 511 с.
6. Арсенян В. А., Заргарян С. С., Магдировян В. Р. О решении интегральных уравнений плоской задачи теории упругости методом последовательных приближений.— Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1982.
7. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.— J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No. 4, p. 526—528.
8. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972, 316 с.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса
Кироваканский филиал ЕрПИ

Поступила в редакцию
22. I. 1982