

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В ЗАДАЧАХ  
 О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
 ОБОЛОЧЕК В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

АЛЕКСАНДРОВ В. М., СТРЕЛЬНИКОВ Г. П.

Исследуется динамика взаимодействия тонкой цилиндрической оболочки с идеальной сжимаемой жидкостью. Рассматриваются следующие задачи:

1) задача о вынужденных колебаниях оболочки конечной длины, заземленной в бесконечном цилиндрическом экране и помещенной в бесконечную акустическую среду;

2) задача о вынужденных колебаниях оболочки конечной длины, заземленной в бесконечном цилиндрическом экране и содержащей внутри себя жидкости;

3) задача о вынужденных колебаниях оболочки конечной длины без доньев, помещенной в бесконечную акустическую среду.

Указанные задачи с помощью интегрального преобразования Фурье сведены: а) к интегро-дифференциальным уравнениям относительно комплексной амплитуды прогиба оболочки (задачи 1 и 2), б) к системе дифференциального интегрального уравнения относительно амплитуды прогиба оболочки и контактного давления на ее поверхности (задача 3). Далее, в отличие от известных методов [1—3] решения подобных задач, в работе предлагается единый подход, основанный на использовании метода специальных [4—5] и классических [6—7] ортогональных многочленов. Это позволило достаточно просто получить эффективные формулы для определения комплексной амплитуды прогиба оболочки, потенциала скорости и функции направленности. Для задачи 3), которая является задачей со смешанными краевыми условиями, такие результаты, по-видимому, получены впервые. Рассмотрены некоторые числовые примеры.

1. *Постановка задач.* Уравнение осесимметричных гармонических изгибных колебаний тонкой упругой цилиндрической оболочки относительно комплексной амплитуды прогиба  $W$  имеет следующий вид [8]:

$$DW^{IV}(x) + TW''(x) + \left(\frac{Eh}{a^2} - \rho h \omega^2\right) W(x) = \pm p(x) \mp q(x) \quad (1.1)$$

Здесь  $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ ,  $E, \nu$  — упругие постоянные,  $h, a$  — толщина и радиус оболочки,  $\rho$  — плотность материала оболочки,  $\omega$  — частота колебаний,  $T$  — сжимающее (растягивающее) усилие, действующее вдоль оси  $x$ ,  $p$  — давление жидкости на оболочку,  $q$  — действующее

щая нагрузка. Верхний знак соответствует давлению на внешнюю поверхность оболочки, нижний — давлению на внутреннюю. Здесь и далее предполагается, что все функции имеют гармоническую зависимость по времени вида  $f(x, t) = f(x) e^{i\omega t}$ . Движение идеальной сжимаемой жидкости, вызванное колебаниями оболочки, определяется потенциалом скорости, амплитуда  $\varphi$  которого удовлетворяет в цилиндрической системе координат уравнению Геймгольца [9]

$$\Delta \varphi(r, x) + k^2 \varphi(r, x) = 0 \quad (1.2)$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число,  $c$  — скорость звука в жидкости. Будем рассматривать следующие задачи взаимодействия упругой оболочки с жидкостью.

**Задача 1.** Оболочка закреплена в жесткий цилиндрический экран бесконечной длины, помещена в безграничную идеальную-сжимаемую жидкость и возбуждается нагрузкой, действующей на внутреннюю поверхность. Предполагается, что действующее продольное усилие — сжимающее ( $T > 0$ ).

Задача описывается уравнениями (1.1), (1.2), граничными условиями

$$W(\pm b) = W'(\pm b) = 0 \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = \begin{cases} -i\omega W(x), & |x| \leq b \\ 0, & |x| > b \end{cases} \quad (1.4)$$

и условиями излучения на бесконечности

$$\varphi = O(1/\sqrt{r}), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + ik\varphi \right) = 0 \quad (1.5)$$

Решение уравнения (1.2) ищем в форме интеграла Фурье [10]

$$\varphi(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} A(\eta) H_0(\sqrt{k^2 - \eta^2} r) e^{-i\eta x} d\eta \quad (1.6)$$

Неизвестная функция  $A(\eta)$  определяется из условия (1.4)

$$A(\eta) = \frac{i\omega W_*(\eta)}{H_1(\sqrt{k^2 - \eta^2} a) \sqrt{k^2 - \eta^2}} \quad (1.7)$$

Здесь  $H_n(x)$  — функция Ханкеля второго рода порядка  $n$ ,  $W_*(\eta)$  — трансформанта Фурье функции  $W(x)$ , контур  $\Gamma$  в соотношении (1.6) совпадает с вещественной осью, обходя точку ветвления  $-k$  снизу, а  $+k$  — сверху в области комплексного переменного  $\eta + i\eta'$ .

Используя обращение преобразования Фурье и соотношение (1.7) для потенциала скорости, получим

$$\varphi(r, x) = \frac{i\omega}{2\pi} \int_{-b}^b W(u) du \int_{\Gamma} \frac{H_0(\sqrt{k^2 - \eta^2} r) e^{-i\eta(x-u)}}{H_1(\sqrt{k^2 - \eta^2} a) \sqrt{k^2 - \eta^2}} d\eta \quad (1.8)$$

Далее нам понадобится связь между давлением и потенциалом скорости [9]

$$p(r, x) = -i \omega \rho_* \varphi(r, x) \quad (1.9)$$

где  $\rho_*$  — плотность жидкости.

Определяя акустическое давление на поверхности оболочки с помощью равенств (1.8) и (1.9) и подставляя его в (1.1), получим интегро-дифференциальное уравнение относительно комплексной амплитуды прогиба оболочки, записанное в безразмерных переменных

$$D_* \bar{W}^{IV}(z) + T_* \bar{W}''(z) + P_* \bar{W}(z) = \pm F_* \int_{-1}^1 W(y) L\left(\frac{y-z}{\lambda}\right) dy \mp \bar{q}(z) \quad (1.10)$$

с граничными условиями

$$\bar{W}(\pm 1) = \bar{W}'(\pm 1) = 0 \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{W} &= aW, \quad x = bz, \quad u = by, \quad D_* = \frac{\mu^3 \kappa^4}{12(1-\nu^2)}, \quad \lambda = \frac{a}{b} \\ \nu &= \frac{h}{a}, \quad T_* = \frac{T_0^2}{aE}, \quad \bar{q} = \frac{q}{E}, \quad F_* = \frac{aR_* k^2}{\pi \lambda} \\ \alpha &= \frac{c^2 \rho}{E}, \quad R_* = \frac{\rho_*}{\rho}, \quad k_* = ka, \quad P_* = \mu(1 - \alpha k^2) \\ L(t) &= \int_0^\infty \frac{H_0(\sqrt{k_*^2 - \xi^2}) \cos \xi t}{H_1(\sqrt{k_*^2 - \xi^2}) \sqrt{k_*^2 - \xi^2}} d\xi \end{aligned} \quad (1.12)$$

**Задача 2.** Оболочка закреплена в жесткий цилиндрический экран бесконечной длины, содержит внутри себя идеальную сжимаемую жидкость и возбуждается нагрузкой, действующей на внешнюю поверхность. Предполагается, что продольное усилие — растягивающее ( $T < 0$ ). Задача описывается уравнениями (1.1), (1.2) и граничными условиями (1.3), (1.4). Ограниченное при  $r = 0$  решение задачи акустики имеет вид [10]

$$\varphi(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} A(\eta) J_0(\sqrt{k^2 - \eta^2} r) \exp(-i\eta x) d\eta \quad (1.13)$$

Определяя  $A(\eta)$  из граничного условия (1.4), получим для потенциала скорости выражение

$$\varphi(r, x) = \frac{i\omega}{2\pi} \int_{-b}^b W(u) du \int_{\Gamma} \frac{J_0(\sqrt{k^2 - \eta^2} r) \exp(-i\eta(x-u))}{J_1(\sqrt{k^2 - \eta^2} a) \sqrt{k^2 - \eta^2}} d\eta \quad (1.14)$$



Здесь  $J_\nu(x)$  — функция Бесселя порядка  $\nu$ , контур  $\Gamma$  совпадает с действительной осью, обходя полюса  $-k$  и  $+k$  соответственно снизу и сверху в области комплексного переменного  $\eta + i\eta'$ . Используя соотношения (1.9), (1.14) и процедуру, изложенную выше, получим интегро-дифференциальное уравнение изгибных колебаний оболочки относительно  $\bar{W}(z)$ , имеющего вид (1.10) с ядром

$$L(t) = \int_0^\infty \left[ \frac{J_0(\sqrt{k_*^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{k_*^2 - \xi^2}) \sqrt{k_*^2 - \xi^2}} - \frac{2}{k_*^2 - \xi^2} \right] \cos t\xi d\xi + \frac{\pi i \exp(-i|t|k_*)}{k_*} \quad (1.15)$$

где последнее слагаемое в равенстве (1.15) представляет половину вычета в полюсе.

**Задача 3.** Оболочка без доньев помещается в бесконечную идеальную жидкость и возбуждается нагрузкой, действующей на внутреннюю поверхность. Предполагается, что оболочка короткая, то есть  $\lambda$  — велико, продольное усилие отсутствует ( $T = 0$ ). Задача описывается уравнениями (1.1), (1.2) и граничными условиями

$$\text{для оболочки} \quad W''(\pm b) = W'''(\pm b) = 0 \quad (1.16)$$

$$\text{для жидкости} \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = -i\omega W(x), \quad |x| \leq b \quad (1.17)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=a}, \quad |x| < \infty \quad (1.18)$$

$$p_1|_{r=a} = p_2|_{r=a}, \quad |x| > b \quad (1.19)$$

На бесконечности выполняется условие (1.5).

Здесь

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1, & 0 \leq r \leq a \\ \varphi_2, & r \geq a \end{cases}$$

Давления  $p_{1,2}$  связаны с потенциалами скорости  $\varphi_{1,2}$  соотношением (1.9).

Решения задачи акустики  $\varphi_1, \varphi_2$ , удовлетворяющие уравнению (1.1) и граничному условию (1.5), будем искать, используя интегральное преобразование Фурье в форме

$$\varphi_1(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} A(\eta) \frac{H_1(\sqrt{k^2 - \eta^2} a)}{I_1(\sqrt{k^2 - \eta^2} a)} J_0(\sqrt{k^2 - \eta^2} r) \exp(-i\eta x) d\eta \quad (1.20)$$

$$\varphi_2(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} A(\eta) H_0(\sqrt{k^2 - \eta^2} r) \exp(-i\eta x) d\eta \quad (1.21)$$

Контур  $\Gamma$  совпадает с вещественной осью, обходя особую точку  $-k$  снизу,  $a+k$  — сверху в области комплексного переменного  $\eta + i\eta'$ . Используя соотношения (1.20), (1.21), (1.9) и граничное условие (1.19), определим неизвестное контактное давление  $p(x) = p_2(a, x) - p_1(a, x)$

$$-\frac{\rho_* \omega}{a\pi^2} \int_{\Gamma} A(\gamma) \frac{\exp(-i\gamma x)}{t J_1(ta)} d\gamma = \begin{cases} p(x), & |x| \leq b \\ 0, & |x| > b \end{cases} \quad (1.22)$$

$$t = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$$

Здесь использовано известное соотношение между функциями Бесселя [11]

$$J_\nu(z) H_{\nu-1}(z) - H_\nu(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi i z}$$

Обращая формулу (1.22), найдем

$$A(\gamma) = -\frac{\pi t a}{2\rho_* \omega} J_1(ta) \int_{-b}^b p(u) \exp(i\gamma u) du \quad (1.23)$$

Граничное условие (1.17) и выражение (1.23) позволяют получить интегральное уравнение относительно комплексной амплитуды контактного давления.

$$\int_{-b}^b p(u) du \int_0^\infty t^2 J_1(ta) H_1(ta) \cos \gamma(u-x) d\gamma = -\frac{i\rho_* \omega^2}{a} W(x) \quad (1.24)$$

$$|x| \leq b$$

причем на концах оболочки

$$p(\pm b) = 0 \quad (1.25)$$

Переходя к безразмерным переменным в уравнениях (1.24), (1.1) и граничных условиях (1.16), (1.25) указанным выше способом, приходим к системе двух уравнений относительно амплитуды контактного давления и амплитуды прогиба

$$\int_{-1}^1 \bar{p}(y) L\left(\frac{y-z}{k}\right) dy = -iE_* \bar{W}(z), \quad |z| \leq 1 \quad (1.26)$$

$$D^* \bar{W}^{IV}(z) - P_* \bar{W}(z) = \bar{p}(z) - \bar{q}(z) \quad (1.27)$$

При граничных условиях

$$\bar{p}(\pm 1) = 0 \quad (1.28)$$

$$\bar{W}''(\pm 1) = \bar{W}''''(\pm 1) \quad (1.29)$$

где

$$E_* = R_* a k^2 \lambda$$

$$L(t) = \int_0^{\infty} s^2 J_1(s) H_1(s) \cos \xi t d\xi \quad (1.30)$$

$$s = \sqrt{k_*^2 - \xi^2}$$

Далее черта для всех задач опускается.

*Замечание 1.* В задачах 1, 3 предполагается, что  $k_* < 1/\sqrt{\alpha}$ .

*Замечание 2.* В задаче 2 предполагается, что  $k_* < \min(\nu_*, 1/\sqrt{\alpha})$ , где  $\nu_* \neq 0$  — первый корень функции  $J_1(z)$ .

2. *Метод решения задач 1, 2.* Неизвестную функцию  $W(z)$  в задачах 1, 2 ищем в виде ряда по системе специальных ортогональных полиномов  $\{Q_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$  [5]

$$W(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k Q_{k+3}(z) \quad (2.1)$$

которые удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$\int_{-1}^1 Q_{k+3}^{IV}(z) Q_{j+3}(z) dz = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad k, j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

и граничным условиям

$$Q_{k+3}(\pm 1) = \dot{Q}_{k+3}(\pm 1) \quad (2.3)$$

Подставляя разложение (2.1) в формулу (1.10) и используя условия нормировки (2.2), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно

$$\sum_{k=1}^{\infty} [D_* \delta_{j,k} + T_* V_{j,k} + P_* S_{j,k} + F_* G_{j,k}] B_k = \mp C_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

где

$$V_{j,k} = \int_{-1}^1 Q_{k+3}^{IV}(z) Q_{j+3}(z) dz, \quad S_{j,k} = \int_{-1}^1 Q_{k+3}(z) Q_{j+3}(z) dz$$

$$C_j = \int_{-1}^1 q(z) Q_{j+3}(z) dz$$

$$G_{j,k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q_{k+3}(y) Q_{j+3}(z) L\left(\frac{y-z}{i}\right) dy dz \quad (2.5)$$

$\delta_{j,k}$  — символ Кронекера. В соотношении (2.5) нетрудно перейти от трой-

ного интеграла к одномерному. Для этого достаточно представить  $Q_{k+3}(x)$  в виде разложения по полиномам Лежандра  $\{P_m\}_{m=5}^{\infty}$ :

$$Q_{k+3}(y) = \frac{1}{\sqrt{2(2k+3)}} \left\{ \frac{1}{2k+5} [P_{k+3}(y) - P_{k+1}(y)] - \frac{1}{2k+1} [P_{k+1}(y) - P_{k-1}(y)] \right\} \quad (2.6)$$

и воспользоваться интегралом [12]

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \exp(ix) dx = i \sqrt{\frac{2\pi}{a}} J_{n+0.5}(z) \quad (2.7)$$

Решение системы (2.4) получено методом редукции, сходимость которого исследуется численно.

Используя полученный результат, определим характеристики дальнего акустического поля для задачи 1. С этой целью подставим разложение для  $W(z)$  (2.1) в соотношение (1.8), воспользуемся при этом формулами (2.6), (2.7) и разложением функции Ханкеля  $H_0(z)$  при больших значениях аргумента [4]. Получим для комплексной амплитуды потенциала скорости дальнего поля следующее выражение:

$$\varphi(R, \theta) = \sqrt{\frac{\omega b a^2 i}{\pi k_*^5 \sin^5 \theta}} \frac{\sum_{m=1}^N i^m \sqrt{2m+3} B_m J_{m+1+0.5}\left(\frac{k_*}{\lambda} \sin \theta\right)}{R K_* \cos \theta H_1(k_* \cos \theta) \exp(i(k_* / a) R)} \quad (2.8)$$

Здесь  $R, \theta$  — координаты полярной системы координат:

$$r = R \cos \theta, \quad x = R \sin \theta$$

Применяя полученное выражение, получим амплитудное значение функции направленности по давлению

$$|\Phi(\theta)| = \frac{|\varphi(R, \theta)|}{|\varphi(R, 0)|}$$

Рассмотрим конкретный пример для задачи 1. Определим амплитудно-частотную характеристику оболочки, разность фаз между действующей нагрузкой и прогибом оболочки в ее центре и функцию направленности при следующих значениях безразмерных параметров:

$$\mu = 0,01, \quad \lambda = 1, \quad \nu = 0,03, \quad \alpha = 0,07692, \quad R_* = 0,12987$$

$$T_* = 2,5 \cdot 10^{-6}, \quad 0,9 \leq k_* \leq 2,5$$

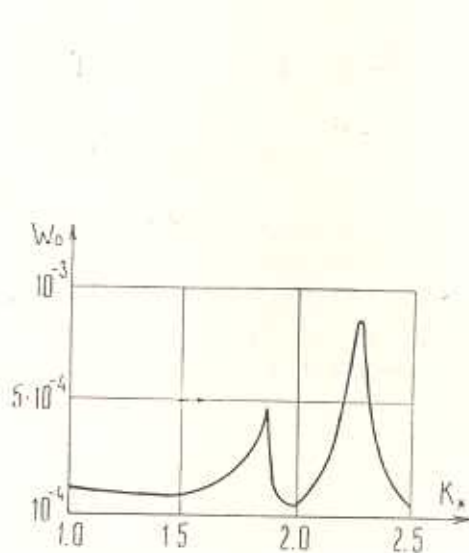
Воспользовавшись формулой (2.1), определим прогиб оболочки в центре

$$W(0, t) = \operatorname{Re} [W_0 \exp(i(\varphi + \omega t))] = W_0 \cos(\varphi + \omega t)$$

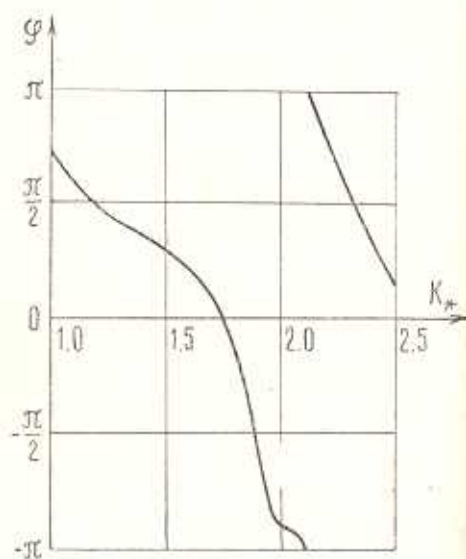
Здесь  $W_0, \varphi$  — модуль и фаза комплексной амплитуды прогиба в центре



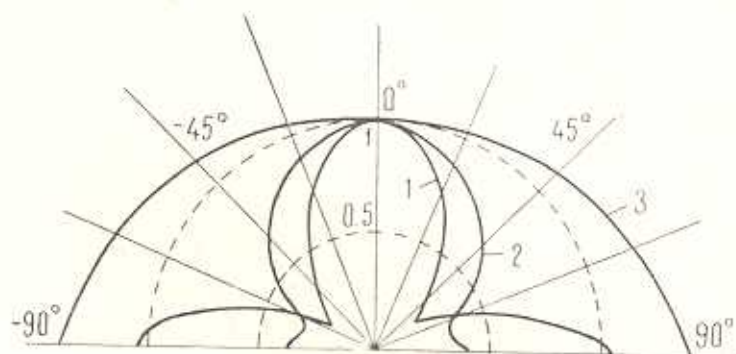
оболочки. На фиг. 1, 2 приведены зависимости  $W_0$  и  $\varphi$  от  $k_*$ , а на фиг. 3— диаграмма направленности излучения. Анализ результатов показывает, что в окрестности частот, при которых достигается максимум модуля комплексной амплитуды, оболочка приобретает свойства направленного излучения. Появляются два пика угловой характеристики излучения (см. кривая 1, фиг. 3). При дальнейшем изменении частоты характеристика направленности приобретает вначале вид кривой 2, а затем—вид кривой 3 на фиг. 3. Затем картина повторяется.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

3. Метод решения задачи 3 при больших  $\lambda$ . Приближенное решение уравнения (1.27) ищем в форме

$$W(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k Q_{k+1/2}(z) \quad (3.1)$$

где  $\{Q_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$  — система специальных ортогональных полиномов, удовлетворяющих условию нормировки



$$\int_{-1}^1 Q_{k+5}^{IV}(z) Q_{j+5}(z) dz = \begin{cases} 1, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad k, j = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

и граничным условиям

$$Q_{k+5}''(\pm 1) = Q_{k+5}''''(\pm 1) = 0 \quad (3.3)$$

Заметим, что полиномы  $Q_m(z)$  можно выразить через присоединенные функции Лежандра  $P_m^4(z)$  следующим образом:

$$Q_{k+5}(z) = \sqrt{\frac{(2k+7)(k-1)!}{2(k+7)!}} P_{k+3}^4(z), \quad k = 1, 2, \dots$$

Ядро  $L(t)$  уравнения (1.26) в окрестности нуля имеет степенную особенность, поэтому представим его в форме

$$L(t) = \frac{i}{\pi t^2} + M(t) \quad (3.4)$$

$$M(t) = \int_0^\infty \left[ s^2 J_1(s) H_1(s) + \frac{i}{\pi} \xi \right] \cos \pi t d\xi \quad (3.5)$$

Исходя из представлений (3.1), (3.4), (3.5), решение уравнения (1.26) может быть построено следующим образом:

$$p(y) = E_\pi \sum_{k=1}^\infty B_k p_k(y) \quad (3.6)$$

Неизвестные функции  $p_k(y)$  удовлетворяют интегральному уравнению

$$\frac{i\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p_k(y)}{(y-z)^2} dy = - \int_{-1}^1 M\left(\frac{y-z}{\lambda}\right) p_k(y) dy - i Q_{k+5}(z) \quad (3.7)$$

и граничным условиям (1.28).

Интеграл, стоящий в левой части соотношения (3.7), понимается как производная по  $z$  от сингулярного интеграла Коши. Заметим, что обобщенными собственными функциями этого интегрального оператора являются полиномы Чебышева второго рода.

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}}{(y-z)^2} U_n(y) dy = -(n+1) \pi U_n(z) \quad (3.8)$$

Учитывая вышеизложенное, представим  $p_k(y)$  в виде следующего ряда:

$$p_k(y) = \sqrt{1-y^2} \sum_{m=1}^\infty C_m^k U_{m-1}(y) \quad (3.9)$$

Подставляя разложение (3.9) в уравнение (3.7) и воспользовавшись известным свойством ортогональности полиномов Чебышева [4]

$$\int_{-1}^1 U_m(y) V_n(y) \sqrt{1-y^2} dy = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (3.10)$$

получим для коэффициентов  $C_m^k$  систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\frac{i \cdot \frac{\pi}{2}}{2} \delta_{n,m} + W_{n,m} \right] C_m^k = -iT_n^k \quad (3.11)$$

где

$$T_n^k = \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} U_{n-1}(y) Q_{k+s}(y) dy$$

$$W_{n,m} = \int_0^{\infty} \left[ s^2 J_1(s) H_1(s) + \frac{i}{\pi} \zeta \right] f\left(\frac{\zeta}{\lambda}\right) d\zeta \quad (3.12)$$

$$f(t) = \begin{cases} (-1)^{(3n+m)/2} (\pi/t)^2 nm J_n(t) J_m(t), & n+m - \text{четно} \\ 0, & n+m - \text{нечетно} \end{cases}$$

В соотношении (3.12) использовано преобразование Фурье от полиномов Чебышева [6]

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} U_n(y) \exp(-i\alpha y) dy = (-i)^n \frac{\pi}{\alpha} J_{n+1}(\alpha) (n+1) \quad (3.13)$$

Определение  $C_m^k$  из системы (3.11) позволяет теперь найти неизвестные  $B_n$ . Подставляя разложения (3.1), (3.6) с учетом (3.9) в уравнение (1.27) и используя условие (3.2), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно  $B_n$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [D_* \delta_{j,k} + P_* S_{j,k} - E_* V_{j,k}] B_k = G_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.14)$$

где

$$V_{j,k} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^k T_m^j; \quad S_{j,k} = \int_{-1}^1 Q_{k+s}(z) Q_{j+s}(z) dz; \quad G_j = - \int_{-1}^1 q(z) Q_{j+s}(z)$$

Решение систем (3.11), (3.14) строится методом редукции, сходимость которого исследуется численно.

Используя полученные результаты, определим характеристики дальнего поля. Подставляя разложения (3.1) в формулу (1.20) и принимая во

внимание (3.13), получим для комплексной амплитуды потенциала скорости выражение

$$\varphi(R, \theta) = \frac{E_0 V \sqrt{\pi \cos^3 \theta} E_0 J_1(k_0 \cos \theta) \sum_{k=1}^N B_k \sum_{m=1}^M C_m^k (-i)^m J_m\left(\frac{k_0}{\lambda} \sin \theta\right)}{2\rho_0 \omega R \sin \theta}$$

Здесь  $R, \theta$  — координаты полярной системы координат.

ԱՌՈՒՍՏԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԳՎԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆՔՆԵՐԻ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ  
ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ԿՆԳԻՐՆԵՐՈՒՄ ՕՐԹՈԳՈՆԱԿ  
ԲԱԶՄԱՆԳԱՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Գ. Պ. ՍՏՐԵՆՆԻԿՈՎ

Ա մ փ ո փ ո մ մ

Ուսումնասիրվում է վերջավոր երկարությամբ թաղանթի ստիպողական տատանումների խնդիրը: Գիտարկվում են հետևյալ դեպքերը՝ անվերջ դրանային կերանի մեջ գտնվող թաղանթը տեղադրված է անվերջ ահուստիկ միջավայրի մեջ, հեղուկ պարունակող անվերջ դրանային կերանի մեջ գտնվող թաղանթը տեղադրված է անվերջ ահուստիկ միջավայրի մեջ:

Խնդիրները լուծվել են ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության և օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդի կիրառումով:

THE METHOD OF THE ORTHOGONAL POLYNOMIALS  
IN THE PROBLEMS OF THE FORCED VIBRATIONS OF THE  
CYLINDRICAL SHELLS IN THE ACOUSTIC MEDIUM

V. M. ALEXANDROV, G. P. STRELNICOV

S u m m a r y

The problem of forced vibrations of the finite length shell is investigated. The cases under consideration are: the shell in the infinite cylindrical shield placed in the infinite acoustic medium; the shell in the infinite cylindrical shield containing fluid inside; the shell without bottoms placed in the infinite acoustic medium. The problems are solved with the use of the Fourier integral transform and the method of orthogonal polynomials.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гонткевич В. С. Собственные колебания оболочки с жидкостью. Киев: Наукова думка, 1964.



2. *Ильямов М. А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1964.
3. *Горшков А. Г.* Динамическое взаимодействие оболочек и пластин с окружающей средой.— МТТ, 1976, № 2.
4. *Александров В. М., Ворович И. И., Солодовник М. Д.* Эффективное решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве.— МТТ, 1973, № 4.
5. *Александров В. М., Шацких А. С.* Универсальная программа расчета изгиба балочных плит на линейно-деформируемом основании. Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, 1970, 46—51.
6. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение в контактной задаче.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
7. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
8. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975.
9. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1975.
10. *Лепендин А. Ф.* Акустика. М.: Высшая школа, 1978.
11. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977.
12. *Бейтман Г., Эрлейн А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969, т. 1, 2.

Институт проблем механики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
21.V. 1981