

О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ  
 ОКОЛО ПАРАБОЛОИДНОЙ ТРЕЩИНЫ  
 В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

МАРТЫНЕНКО М. А., УЛИТКО А. Ф.

Впервые задача о равновесии упругого пространства, ослабленного разрезом по части параболоидной поверхности, рассматривалась в работе [1]. В ней авторы использовали точные решения основных граничных задач для параболоида вращения в виде интегралов Ханкеля и с помощью метода парных уравнений свели задачу к системе интегро-дифференциальных уравнений фредгольмового типа. Однако, при решении системы парных уравнений не было использовано интегральное условие для одной из введенных функций, вследствие чего полученная система интегро-дифференциальных уравнений оказалась незамкнутой. В [2] были представлены формулы для аналитического исследования лишь локального поля перемещений и напряжений вблизи граничной окружности параболоидного разреза; вопрос о численном решении задачи в названных работах не рассматривался.

Ниже задача о параболоидном разрезе в упругом теле приведена в замкнутой системе интегро-дифференциальных уравнений фредгольмового типа, исследовано локальное напряженно-деформируемое состояние у границы разрыва сплошности материала и получены численные значения ряда физических характеристик при конкретном нагружении поверхностей разреза.

1. Пусть упругое пространство ослаблено разрезом по части параболоидальной поверхности  $\xi = \xi_0$ ,  $0 \leq \eta \leq \eta_0$  (фиг. 1). Предполагается, что поверхности разреза не вступают в контактное взаимодействие, а поля напряжений и перемещений удовлетворяют следующим условиям:

$$Z_n^{(1)} = -Z_n^{(2)} = f_1(\eta), \quad R_n^{(1)} = -R_n^{(2)} = f_2(\eta) \quad (\xi = \xi_0; 0 \leq \eta < \eta_0) \quad (1.1)$$

$$Z_n^{(1)} = -Z_n^{(2)}, \quad R_n^{(1)} = -R_n^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)} \quad (\xi = \xi_0; \eta_0 \leq \eta < \infty)$$

Согласно [3], общее решение внутренней задачи (индекс 1) по отношению к поверхности параболоида вращения записывается в виде

$$2Gu_z^{(1)} = \int_0^\infty \left[ \bar{\beta}(\tau, \xi) I_0 - \left( \tau \xi I_1 + 2 \frac{m-1}{m} I_0 \right) \bar{\alpha}(\tau) \tau^{-1} \right] J_0(\tau \eta) \tau d\tau \quad (1.2)$$

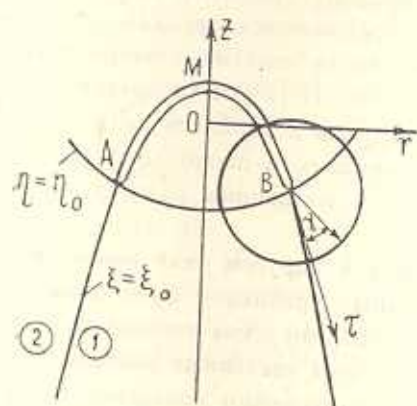
$$2Gu_r^{(1)} = \int_0^\infty \left[ \bar{\beta}(\tau, \xi) I_1 - \left( \tau \xi I_0 - 2 \frac{m-1}{m} I_1 \right) \bar{\alpha}(\tau) \tau^{-1} \right] J_1(\tau \eta) \tau d\tau$$

$$hZ_n^{(1)} = \int_0^{\infty} [\bar{\beta}(\tau, \xi) \tau I_1 - \xi \tau I_0 \bar{\alpha}(\tau)] J_0(\tau \eta) \tau d\tau \quad (1.3)$$

$$i h R_n^{(1)} = - \int_0^{\infty} \left[ \bar{\beta}(\tau, \xi) (\tau I_0 - \xi^{-1} I_1) - \left( \tau \xi I_1 - I_0 + 2 \frac{m-1}{m \tau \xi} I_1 \right) \bar{\alpha}(\tau) \right] J_1(\tau \eta) \tau d\tau$$

$$\bar{\alpha}(\tau) = \alpha'(\tau), \quad \bar{\beta}(\tau, \xi) = \beta(\tau) - \xi^2 \alpha(\tau) - \frac{1}{2} \alpha''(\tau), \quad I_p = I_p(\tau \xi)$$

Решение для внешней задачи (индекс 2) получим из (1.2), (1.3), если  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  заменим новыми неизвестными плотностями  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{\beta}_1$ , а  $I_0$ ,  $I_1$  — функциями Макдональда  $K_0$ ,  $K_1$ . При этом, в проекциях вектора напряжений знаки необходимо поменять на противоположные. Удовлетворяя граничным условиям (1.1), приходим к следующей взаимосвязанной системе парных интегральных уравнений относительно  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$ :



Фиг. 1.

где

$$L_{11}(\tau, \xi_0) = \frac{\tau}{\Delta} \left[ \bar{\beta} (K_0 + K_1 \tau^{-1} \xi_0^{-1}) - \bar{\alpha}(\tau) \tau^{-1} \left( \tau \xi_0 K_1 + K_0 + 2 \frac{m-1}{m \tau \xi_0} K_1 \right) \right]$$

$$L_{12}(\tau, \xi_0) = \frac{\tau}{\Delta} [\bar{\beta} K_1 - \xi_0 K_0 \bar{\alpha}(\tau)], \quad L_{21}(\tau, \xi_0) = \tau [\bar{\beta} I_1 - \xi_0 I_0 \alpha(\tau)] \quad (1.5)$$

$$L_{22}(\tau, \xi_0) = \bar{\beta} (\tau I_0 - \xi_0^{-1} I_1) \tau - \left( \tau^2 \xi_0 I_1 - \tau I_0 + 2 \frac{m-1}{m \tau \xi_0} I_1 \right) \bar{\alpha}(\tau)$$

$$\Delta = \tau^2 \xi_0 [(K_0)^2 - (K_1)^2] - 2 \frac{m-1}{m} (K_1)^2, \quad I_p = I_p(\tau \xi_0)$$

$$K_p = K_p(\tau \xi_0), \quad \bar{\beta} = \bar{\beta}(\tau, \xi_0)$$

$$\int_0^{\infty} L_{11}(\tau, \xi_0) J_0(\tau \eta) d\tau = 0$$

$$\int_0^{\infty} L_{12}(\tau, \xi_0) J_1(\tau \eta) d\tau = 0 \quad (\eta_0 \leq \eta < \infty)$$

$$\int_0^{\infty} L_{21}(\tau, \xi_0) J_0(\tau \eta) d\tau = h f_1(\eta) \quad (1.4)$$

$$\int_0^{\infty} L_{22}(\tau, \xi_0) J_1(\tau \eta) d\tau = -h f_2(\eta)$$

$$(0 \leq \eta < \eta_0)$$

В соответствии с общей идеей метода парных уравнений [4] решение взаимосвязанной системы (1.4) будем искать в виде

$$L_{11}(\tau, \xi_0) = \int_0^{\tau_0} \psi(t) \sin \tau t dt, \quad L_{12}(\tau, \xi_0) = \int_0^{\tau_0} \varphi(t) \cos \tau t dt \quad (1.6)$$

где  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  — новые вспомогательные функции, непрерывные на отрезке  $[0, \tau_0]$  вместе со своими первыми производными. Введенные интегралы тождественно удовлетворяют первым двум уравнениям системы (1.4) на основании разрывных интегралов Вебера [5] и следующего условия:

$$\int_0^{\tau_0} \varphi(t) dt = 0 \quad (1.7)$$

Выражая из равенств (1.5), (1.6) неизвестные плотности  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\alpha}$  через введенные интегралы и подставляя их значения в последние два уравнения системы (1.4), приходим к системе интегро-дифференциальных уравнений Фредгольмового типа относительно функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$

$$\frac{1}{2} \varphi'(x) - \frac{m-4}{4m\xi_0} \psi(x) + \int_0^{\tau_0} [K_{11}(x, t) \psi(t) + K_{12}(x, t) \varphi(t)] dt = g_1(x) \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{2} \psi'(x) + \frac{m-4}{4m\xi_0} \varphi(x) - \int_0^{\tau_0} [K_{21}(x, t) \psi(t) + K_{22}(x, t) \varphi(t)] dt = g_2(x)$$

$$\psi(0) = 0, \quad \int_0^{\tau_0} \varphi(t) dt = 0$$

где

$$\begin{aligned} K_{11}(x, t) &= \frac{27m-12}{32m} \begin{cases} t & t < x \\ x & t > x \end{cases} + \bar{K}_{11}(x, t) \\ K_{12}(x, t) &= -\frac{3m+16}{32m\xi_0^3} \begin{cases} 2 & t < x \\ 1 & t = x \\ 0 & t > x \end{cases} + \bar{K}_{12}(x, t) \\ K_{21}(x, t) &= -\frac{3}{32\xi_0} \begin{cases} 0 & t < x \\ 1 & t = x \\ 2 & t > x \end{cases} + \bar{K}_{21}(x, t) \\ K_{22}(x, t) &= \frac{27m-12}{32m\xi_0^3} \begin{cases} 0 & t < x \\ x-t & t > x \end{cases} + \bar{K}_{22}(x, t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{11}(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \tau^2 \xi_0^2 (K_0 I_0 - K_1 I_1) + \xi_0 (K_1 I_0 - K_0 I_1) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{m-1}{m} K_1 I_1 + \frac{m-4}{4m\xi_0} - \frac{27m-12}{32m\xi_0^3} \right] \tau \sin \tau x \sin \tau t d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{12}(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \left( \tau^2 \xi_0^2 + \frac{3m-2}{m} \right) (K_0 I_1 - K_1 I_0) + 2\tau \xi_0 (K_1 I_1 - K_0 I_0) + \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{m-1}{m \tau \xi_0} I_1 K_1 + \frac{1}{2} + \frac{3m+16}{16m \tau^2 \xi_0^2} \right] \tau \cos \tau t \sin \tau x d\tau \\ \bar{K}_{21}(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \tau^2 \xi_0^2 (I_1 K_0 - K_1 I_0) + \frac{1}{2} + \frac{3}{16 \tau^2 \xi_0^2} \right] \tau \sin \tau t \cos \tau x d\tau \end{aligned}$$

Значение  $\bar{K}_{22}(x, t)$  получается из  $\bar{K}_{11}(x, t)$  путем замены функций  $\sin \tau x$ ,  $\sin \tau t$  функциями  $\cos \tau x$ ,  $\cos \tau t$ . Заметим, что выражения в квадратных скобках, входящие в  $K_{ij}(x, t)$ , имеют порядок  $\tau^{-5}$  и  $\tau^{-4}$  при больших значениях  $\tau \gg 1$ . Выделение указанных асимптотических значений в ядрах гарантирует быструю сходимость численного процесса при приближенном решении системы (1.8). После того, как  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  будут найдены, поле перемещений, например, во внешней области определяется по формулам

$$\begin{aligned} 2G u_x^{(2)} &= \int_0^{\infty} \left[ \tau K_0 \alpha_1 + \left( \tau \xi \frac{\xi_0^2 + \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} K_1 - 2 \frac{m-1}{m} K_0 \right) \beta_1 \right] J_0(\tau \eta) d\tau + \\ &\quad + \eta \frac{\xi^2 - \xi_0^2}{\xi^2 + \eta^2} \int_0^{\infty} \beta_1 K_0 J_1(\tau \eta) \tau d\tau \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} 2G u_r^{(2)} &= \int_0^{\infty} \left[ \tau K_1 \alpha_1 + \left( \tau \xi \frac{\xi_0^2 + \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} K_0 + 2 \frac{m-1}{m} K_1 \right) \beta_1 \right] J_1(\tau \eta) d\tau - \\ &\quad - \eta \frac{\xi^2 - \xi_0^2}{\xi^2 + \eta^2} \int_0^{\infty} \beta_1 K_1 J_0(\tau \eta) \tau d\tau \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1(\tau) &= (I_1 - \tau \xi_0 I_0) \int_0^{\eta_0} \varphi(t) \cos \tau t dt - \tau \xi_0 I_1 \int_0^{\eta_0} \psi(t) \sin \tau t dt \\ \alpha_1(\tau) &= \left( \tau^2 \xi_0^2 I_1 - \tau \xi_0 I_0 + 2 \frac{m-1}{m} I_1 \right) \int_0^{\eta_0} \varphi(t) \cos \tau t dt + \\ &\quad + \tau^2 \xi_0^2 I_0 \int_0^{\eta_0} \psi(t) \sin \tau t dt. \quad I_p = I_p(\tau \xi_0), \quad K_p = K_p(\tau \xi) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Значения перемещений во внутренней области приведены в [6], [7]. Поле напряжений находится по известному полю перемещений. Ввиду громоздкости этих выражений они здесь не приводятся. Приведем выражения для проекций вектора усилий на поверхности параболоида вне разреза, полученные на основании (1.11), (1.8) и (1.3).

$$\begin{aligned}
 hR_n &= \frac{1}{2} \frac{\varphi(\eta_0) \eta_0}{\eta \sqrt{\eta^2 - \eta_0^2}} - \int_0^{\eta} \frac{g_1(x) x dx}{\eta \sqrt{\eta^2 - x^2}} - \\
 &- \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{x dx}{\eta \sqrt{\eta^2 - x^2}} \int_0^{\eta_0} [K_{11}(x, t) \psi(t) + K_{12}(x, t) \varphi(t)] dt \\
 &\quad x > t, \quad \eta > \eta_0 \\
 hZ_n &= \frac{1}{2} \frac{\psi(\eta_0)}{\sqrt{\eta^2 - \eta_0^2}} - \int_0^{\eta_0} \frac{g_2(x) dx}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} + \\
 &+ \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{dx}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} \int_0^{\eta_0} [K_{21}(x, t) \psi(t) + K_{22}(x, t) \varphi(t)] dt \\
 &\quad x > t, \quad \eta > \eta_0
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Отсюда видно, что проекции вектора усилий имеют корневую особенность при  $\eta \rightarrow \eta_0$ . Для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений найдем компоненты тензора напряжений в параболоидальных координатах на поверхностях с нормалью  $\bar{n} = \bar{e}_z$  по формулам

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} &= R_n^{(1)} \cos \alpha + Z_n^{(1)} \sin \alpha, & \sigma_{z\eta} &= R_n^{(1)} \sin \alpha - Z_n^{(1)} \cos \alpha \\
 \cos \alpha &= \eta (\xi^2 + \eta^2)^{-1/2}, & \sin \alpha &= \xi (\xi^2 + \eta^2)^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

После этого, коэффициенты интенсивности напряжений находятся из следующих соотношений [8]:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \sigma_{zz} |_{z=\xi_0} \sqrt{2\rho_0}, & k_2 &= \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \sigma_{z\eta} |_{z=\xi_0} \sqrt{2\rho_0} \\
 \rho_0 &= (\eta - \eta_0) \sqrt{\xi_0^2 + \eta^2}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

В результате предельного перехода получим

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{\eta_0 \varphi(\eta_0) + \xi_0 \psi(\eta_0)}{2\sqrt{\eta_0} (\xi_0^2 + \eta_0^2)^{3/4}} \\
 k_2 &= \frac{\xi_0 \varphi(\eta_0) - \eta_0 \psi(\eta_0)}{2\sqrt{\eta_0} (\xi_0^2 + \eta_0^2)^{3/4}}
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Для исследования напряженного состояния вблизи граничной окружности параболоидального разреза введем локальную полярную систему координат  $(\rho, \gamma)$ , как показано на фиг. 1.

Связь между параболическими и полярными координатами в окрестности разреза определяем следующими приближенными зависимостями:

$$(\xi - \xi_0) \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \approx \rho \sin \gamma, \quad (\eta - \eta_0) \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \approx \rho \cos \gamma \quad (1.16)$$

Подставляя (1.11) в (1.10) и осуществляя асимптотическое интегрирование точного решения вблизи граничной окружности разреза, а затем переходя к проекциям вектора перемещения на оси  $\rho$ ,  $\gamma$ , получим

$$\begin{aligned} 2Gu_\rho &\approx \frac{\sqrt{\xi}}{2\sqrt{2}} \left\{ k_1 \left[ (2x-1) \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{3\gamma}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - k_2 \left[ (2x-1) \sin \frac{\gamma}{2} - 3 \sin \frac{3\gamma}{2} \right] \right\} + \dots \\ 2Gu_\gamma &\approx \frac{\sqrt{\rho}}{2\sqrt{2}} \left\{ k_1 \left[ \sin \frac{3\gamma}{2} - (2x+1) \sin \frac{\gamma}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - k_2 \left[ (2x+1) \cos \frac{\gamma}{2} - 3 \cos \frac{3\gamma}{2} \right] \right\} + \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

где  $x = (3\pi - 4)/m$ , что соответствует плоской деформации.

При этом были использованы асимптотические значения функций Бесселя и Макдональда при  $\tau \gg 1$  [5], а также полученные приближенные значения интегралов следующего типа:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp(-\tau(\xi - \xi_0 - i\eta_0)) J_1(\tau\eta) d\tau &\approx \frac{iV\bar{h}}{\sqrt{2\rho\eta_0}} \exp\left(i\frac{\gamma}{2}\right) + \dots \\ \int_0^\infty \exp(-\tau(\xi - \xi_0 - i\eta_0)) J_1(\tau\eta) \tau^{-1} d\tau &\approx \frac{\sqrt{2\rho}}{V\eta_0 h} \exp\left(-i\frac{\gamma}{2}\right) + \dots \end{aligned}$$

Аналогично осуществлялось асимптотическое интегрирование компонент тензора напряжений у устья разреза. В полярной системе координат они имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma &\approx \frac{1}{2\sqrt{2\rho}} \left[ k_1 (1 + \cos \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} - 3k_2 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \right] + \dots \\ \sigma_\rho &\approx \frac{1}{2\sqrt{2\rho}} \left[ k_1 (3 - \cos \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} + k_2 (3 \cos \gamma - 1) \sin \frac{\gamma}{2} \right] + \dots \\ \sigma_{\rho\gamma} &\approx \frac{1}{2\sqrt{2\rho}} \left[ k_1 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} + k_2 (3 \cos \gamma - 1) \cos \frac{\gamma}{2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.18)$$

На основании известных критериев хрупкого разрушения материалов [8] и использования формул (1.17), (1.18) определяются предельные на-

грузки и начальное направление распространения трещины. Например, согласно критерию максимальных растягивающих напряжений угол начального направления распространения трещины находится по формуле [9]

$$\gamma_* = 2 \arctg \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_2^2}}{4k_2} \quad (1.19)$$

а критическое значение нагрузки — из соотношения

$$\cos^3 \frac{\gamma_*}{2} \left( k_1 - 3k_2 \operatorname{tg} \frac{\gamma_*}{2} \right) = \frac{k_{1c}}{\sqrt{\pi}} \quad (1.20)$$

Рассмотрим всестороннее растяжение упругого пространства на бесконечности. В этом случае поверхности разреза будут испытывать давление интенсивности  $q$ . В правых частях системы уравнений (1.8) будут стоять функции

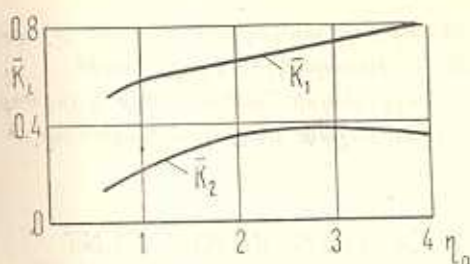
$$g_1(x) = 4qx/\pi, \quad g_2(x) = 2q/\pi \quad (1.21)$$

Для решения системы применялся конечно-разностный метод, вследствие чего задача была приведена к системе алгебраических уравнений.

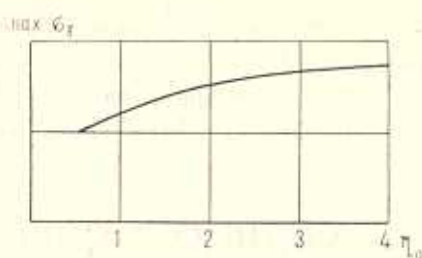
На фиг. 2 показана зависимость коэффициентов напряжений  $\bar{k}_1 = k_1 q^{-1}$ ,  $\bar{k}_2 = -k_2 q^{-1}$  от величины разреза при  $\xi_0 = 1$ ,  $m = 3$ .

Из графика видно, что при увеличении разреза  $\bar{k}_1$  возрастает, а  $\bar{k}_2$  достигает наибольшего значения по модулю при  $\eta_0 \approx 2,7$ .

На фиг. 3 представлено значение максимального растягивающего напряжения при различных  $\eta$  и  $\xi_0 = 1$ ,  $m = 3$ .



Фиг. 2

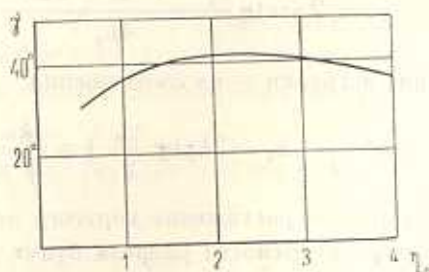


Фиг. 3

Исходя из критерия максимальных растягивающих напряжений, можно сделать вывод, что при рассматриваемой нагрузке и данной геометрии объемлющая трещина ( $\xi = \xi_0$ ,  $\eta = \eta_2$ ) параболоидной формы более опасная, чем объемлемая ( $\xi = \xi_0$ ,  $\eta = \eta_1$ ,  $\eta_1 < \eta_2$ ). Этого нельзя сказать относительно трещин, например, сферической формы [7], [10], где  $\max \sigma_T$  возрастают только при увеличении разреза до определенного значения. Отсюда видно существенное влияние кривизны поверхности трещин на напряженное состояние тела, а следовательно, и на оценку его прочности.

На фиг. 4 даны значения предполагаемых начальных углов разрушения  $\gamma_*$  в зависимости от геометрии разреза.

В заключение заметим, что полученные решения осесимметричных задач о параболоидальной и сферической трещинах в упругих телах можно применить для оценки прочности тела с трещинами более сложной геометрии.



Фиг. 4.

В этом случае реальную трещину следует заключить между трещинами сферической и параболоидальной формы и получить двустороннюю оценку предельных нагрузок.

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՏԱՐԱՅՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՊԱՐԱԲՈՒԼՈՒԴԱԶԵՎ ՀԱՔԻ ՄՈՏ  
 ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՅԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Մ. Ա. ՄԱՐՏԻՆԵՆԿՈ, Ա. Ֆ. ԱԼԻՏԿՈ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հուծվել է առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրը պարաբոլիդաձև ճարտվ տարածության հավասարակշռության մասին:

Քվալին արդյունքներ ստացվել են այն դեպքի համար, երբ կտրվածքի մակերևույթները բեռնավորված են հավասարաչափ բաշխված ճնշումով:

ON THE CONCENTRATION OF TENSION ADJACENT  
 TO THE PARABOLIC FRACTURE IN AN ELASTIC SPACE

M. A. MARTINENKO, A. F. ULITKO

S u m m a r y

The axial symmetrical problem of the theory of elasticity in space equilibrium with fracture of paraboloidal form has been solved. Numerical results were obtained for the case of loading of the section surface by equal pressure.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Куценко Г. В., Улитко А. Ф. Равновесие упругого пространства, ослабленного параболическим разрезом.—ДАН УССР, сер. А, 1976, № 2, с. 144—148.
2. Мартыненко М. А. К исследованию напряженного состояния упругого пространства, ослабленного параболическим разрезом. В кн. «Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебры». Киев: Наукова думка, 1978, с. 181—184.
3. Улитко А. Т. Осесимметрична деформація пружного параболоїда обертання.—Доп. АН УССР, сер. А, 1968, № 12.
4. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977, 220 с.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 798 с.
6. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 264 с.
7. Скрипка В. И., Улитко А. Ф. Равновесие упругого параболоида вращения, нагруженного в вершине осевой сосредоточенной силой.—ПМ, 1973, 9, № 5, с. 10—15.
8. Разрушение. Ред. Г. Либовиц, т. 2, М.: Мир, 1975. 763 с.
9. Панасюк В. В., Саврук М. П., Давышин А. П. Распределение напряжений около трещины в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
10. Мартыненко М. А., Улитко А. Ф. Напряженное состояние вблизи вершины сферического разреза в неограниченной упругой среде.—ПМ, 1978, 14, № 9, с. 15—23.

Киевский технологический институт  
пищевой промышленности  
Киевский госуниверситет

Поступила в редакцию  
8. V. 1981