ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXVI, № 1, 1983 Механика

# О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ НАКЛАДОК

МХИТАРЯН С. М., ТОРОСЯН Ф. С.

Обширный класс задач по исследованию напряженного состояния упругой бесконечной пластины с круговым отверстием, усиленной на обводе отверстия накладками в виде полных тонких колец, рассмотрен в монографии [1]. При этом в качестве основной физической модели для накладок в [1] принята теория кривых стержней. Работы [2, 3] основаны на допущении об одноосности напряженного состояния кольцеобразных накладок, заимствованном из работ [4, 5] применительно к прямолинейным накладкам. Однако, непосредственное перенесение этого допущения, которое с достаточной точностью справедливо в применении к последним, на случай кольцеобразных накладок любых размеров в известной мере неприемлемо, хотя для коротких накладок оно все же имеет место.

Кроме того, из-за такого подхода в [2, 3] возникают лишние осложнения в структуре разрешающего уравнения и дополнительные трудности аналитического и вычислительного характера.

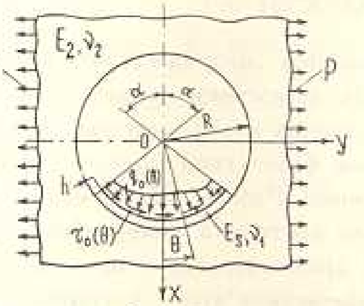
В настоящей работе исследуется напряженное состояние упругой бесконечной плоскости с круговым отверстием, усиленной на обводе отверстия одним или двумя одинаковыми и симметрично расположенными кольцеобразными накладками в виде неполных тонких колец. Последние здесь, в отличие от [1—3], где накладки загружены только тангенциальными силами, подвержены одновременному действию радиальных и тангенциальных сил произвольных интенсивностей. При этом предполагается, что бесконечная плоскость с отверстием находится в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния, а накладки трактуются в рамках теории тонких оболочек [6]. Последнее допущение принципиально согласуется с принятым в [1].

В рамках указанных предположений решение поставленных задач сводится к решению сингулярного интегрального уравнения, ядро которого представляется в виде суммы ядра Гильберта и некоторого регулярного ядра. На основе аппарата полиномов Якоби видоизмененного аргумента это уравнение сводится к эквивалентной бесконечной системе. Для одного частного случая проведен численный анализ решений.

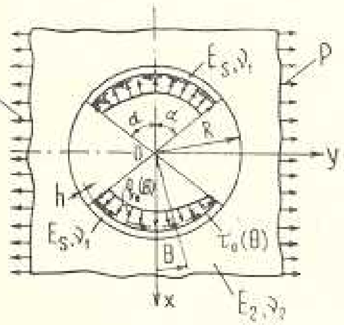
1. *Постановка задач и вывод разрешающих уравнений.* В первой задаче пусть бесконечная пластина с круговым отверстием радиуса $R$ вдоль дугового отрезка $\overset{\frown}{\bar{a}a}$ $(a = Re^{i\alpha})$ обвода отверстия усилена приваренной или

приклеенной к ней упругой кольцеобразной накладкой малой толщины $h$ ($h/R \leqslant 1/20$ [6]), которая одновременно нагружена тангенциальными и нормальными силами интенсивностей $\tau_0(\theta)$ и $q_0(\theta)$ соответственно (фиг. 1).

Во второй задаче на обводе отверстия имеются две одинаковые симметрично расположенные накладки, загруженные тангенциальными и нормальными силами, обладающими симметрией относительно точки $o$, то есть $\tau_0(\theta+\pi)=\tau_0(\theta)$, $q_0(\theta+\pi)=q_0(\theta)$ $(-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha)$ (фиг. 2).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Наконец, в третьей задаче на обводе отверстия имеются две одинаковые симметрично расположенные накладки, которые в данном случае загружены теми же силами, симметричными относительно оси $oy$, то есть $\tau_0(\theta+\pi)=\tau_0(-\theta)$, $q_0(\theta+\pi)=q_0(-\theta)$ $(-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha)$.

Во всех трех задачах пластина на бесконечности растягивается в направлении оси $oy$ силами постоянной интенсивности $p$. Предполагается также, что пластина с накладками находится в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния.

Требуется определить законы распределения тангенциальных $\tau(\theta)$ и нормальных $q(\theta)$ контактных напряжений вдоль отрезков креплений упругих накладок с основанием.

В дальнейшем подробно будет рассматриваться первая задача, а для второй и третьей задач соответствующие результаты будут приведены в готовом виде.

Приступив к выводу разрешающего уравнения первой задачи, отметим, что на линии соединения накладки с основанием должны иметь место следующие очевидные условия контакта:

$$\varepsilon_\theta^{(1)}=\varepsilon_\theta^{(2)},\quad \psi_1=\psi_2\quad (-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha) \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_\theta^{(1)}$ и $\psi_1$ — соответственно относительное удлинение срединной линии накладки по направлению $\theta$ и угол, на который поворачивается нормаль к этой линии, а $\varepsilon_\theta^{(2)}$ и $\psi_2$ — те же параметры, относящиеся к основанию, то есть

$$\varepsilon_\theta^{(2)}=\frac{1}{R}\frac{dv_\theta}{d\theta}+\frac{v_r}{R},\qquad \psi_2=\frac{1}{R}\frac{dv_r}{d\theta}-\frac{v_\theta}{R} \tag{1.2}$$

где $v_r$ и $v_\theta$ — соответственно радиальный и тангенциальный компоненты упругих перемещений граничных точек бесконечной пластины от внешних ($p$) и контактных напряжений ($\tau(\theta)$ и $q(\theta)$).

Очевидно, что условия (1.1) эквивалентны обычным условиям контакта, выраженным в перемещениях.

Пользуясь известным комплексным представлением решения плоской задачи теории упругости [7], легко получить, что компоненты перемещений $v_r$ и $v_\theta$ выражаются формулой:

$$2\mu(v_r+iv_\theta)=-\frac{(\varkappa+1)R}{2\pi}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}[q(u)+i\tau(u)]e^{-i(\theta-u)}\ln 2\left|\sin\frac{\theta-u}{2}\right|du-$$

$$-i\frac{(\varkappa-1)R}{4\pi}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}[q(u)+i\tau(u)]e^{-i(\theta-u)}(\pi-|\theta-u|)\operatorname{sign}(\theta-u)\,du+$$

$$+\frac{(\varkappa+1)R}{4}p(1-2e^{-2i\theta}) \qquad (1.3)$$

Здесь $\varkappa=3-4\nu_2$ при плоской деформации, $\mu=E_2/2(1+\nu_2)$, а $E_2$ и $\nu_2$ — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона для материала пластины.

Когда бесконечная пластина с отверстием толщины $d_2$ находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния и загружена только по части толщины шириной $d\,(d\leqslant d_2)$, то в (1.3) следует заменить $q(u)$ на $dq(u)/d_2$, $\tau(u)$ — на $d\tau(u)/d_2$, а $\varkappa$ — на $\varkappa^*=(3-\nu_2)/(1+\nu_2)$ [7].

Подставляя значения $v_r$ и $v_\theta$ из (1.3) в (1.2), для $\varepsilon_\theta^{(2)}$ и $\psi_2$ получим следующие выражения:

$$\varepsilon_\theta^{(2)}=-\frac{\varkappa+1}{8\pi\mu}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\tau(u)\operatorname{ctg}\frac{\theta-u}{2}du+\frac{\varkappa+1}{8\pi\mu}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}q(u)\,du-\frac{\varkappa-1}{4\mu}q(\theta)+$$

$$+\frac{\varkappa}{4\pi\mu R}(X\cos\theta+Y\sin\theta)+\frac{\varkappa+1}{4\mu}p\cos 2\theta+\frac{\varkappa+1}{8\mu}p \qquad (1.4)$$

$$\psi_2=-\frac{\varkappa+1}{8\pi\mu}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}q(u)\operatorname{ctg}\frac{\theta-u}{2}du-\frac{\varkappa+1}{8\pi\mu}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\tau(u)\,du+$$

$$+\frac{\varkappa-1}{4\mu}\tau(\theta)+\frac{\varkappa}{4\pi\mu R}(X\sin\theta-Y\cos\theta)+\frac{\varkappa+1}{4\mu}p\sin 2\theta$$

где $X$ и $Y$ — компоненты главного вектора внешних нагрузок по осям $ox$ и $oy$, действующих на накладку

$$X+iY=R\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}[q_0(u)+i\tau_0(u)]e^{iu}du=R\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}[q(u)+i\tau(u)]e^{iu}du \qquad (1.5)$$

Главный же момент внешних нагрузок будет

$$M = R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_0(u)\, du = R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau(u)\, du \tag{1.6}$$

Перейдем теперь к определению компонентов деформации накладки $\varepsilon_\theta^{(1)}$ и $\psi_1$.

Рассматривая накладку как тонкую цилиндрическую оболочку, находящуюся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния, при помощи уравнений равновесия (7.4) и (7.8) ([6], стр. 36, 37) и упругих соотношений (10.8) ([6], стр. 47) обнаружим, что компоненты деформации срединной линии накладки $\varepsilon_\theta^{(1)}$ и $\psi_1$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{D}{R^3}\frac{d^3\psi_1}{d\theta^3} + \frac{G}{R}\varepsilon_\theta^{(1)} = q_0(\theta) - q(\theta) \\ &\frac{D}{R^3}\frac{d^2\psi_1}{d\theta^2} - \frac{G}{R}\frac{d\varepsilon_\theta^{(1)}}{d\theta} = \tau_0(\theta) - \tau(\theta) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Легко заметить, что последнюю систему можно записать также в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varepsilon_\theta^{(1)}}{d\theta^2} + \varepsilon_\theta^{(1)} = \frac{R}{G}\left[ q_0(\theta) - q(\theta) - \frac{d}{d\theta}(\tau_0(\theta) + \tau(\theta))\right] \\ &\frac{d^4\psi_1}{d\theta^4} + \frac{d^2\psi_1}{d\theta^2} = \frac{R^3}{D}\left[\frac{d}{d\theta}(q_0(\theta) - q(\theta)) + \tau_0(\theta) - \tau(\theta)\right] \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь $D = E_s h^3/12(1-\nu_1^2)$ — жесткость накладки на изгиб, $G = E_s h/(1-\nu_1^2)$, а $E_s$ и $\nu_1$ — упругие постоянные накладки.

Для обобщенного плоского напряженного состояния накладки следует заменить $E_s$ на $E_s^* = E_s(1+2\nu_1)/(1+\nu_1)^2$, $\nu_1$ — на $\nu_1^* = \nu_1/(1+\nu_1)$, а $q(\theta)$ и $\tau(\theta)$ — на $dq(\theta)/d_1$ и $d\tau(\theta)/d_1$ соответственно, где $d_1$ — ширина накладки, $d$ — эффективная ширина контактной зоны, причем $d \leqslant \min(d_1, d_2)$.

Интегрируем уравнения (1.8) при следующих граничных условиях:

$$T(\theta)\big|_{\theta=\pm\alpha} = G\varepsilon_\theta^{(1)}\big|_{\theta=\pm\alpha} = 0, \qquad N(\theta)\big|_{\theta=\pm\alpha} = -\frac{D}{R^2}\frac{d^2\psi_1}{d\theta^2}\bigg|_{\theta=\pm\alpha} = 0$$

$$M(\theta)\big|_{\theta=\pm\alpha} = -\frac{D}{R}\frac{d\psi_1}{d\theta}\bigg|_{\theta=\pm\alpha} = 0$$

выражающих отсутствие на концевых сечениях накладки продольной силы $T(\theta)$, поперечной силы $N(\theta)$ и изгибающего момента $M(\theta)$, отнесенных к единице ширины накладки. В результате получим

$$\varepsilon_\theta^{(1)} = -\frac{R}{G}\int_{-\alpha}^{\theta}[q(u)\sin(\theta-u) - \tau(u)\cos(\theta-u)]\,du +$$

$$+\frac{R}{G}\int_{-\alpha}^{\theta}[q_0(u)\sin(\theta-u)-\tau_0(u)\cos(\theta-u)]\,du$$

$$\psi_1=-\frac{R^3}{D}\int_{-\alpha}^{\theta}[q_0(u)-q(u)]\,du+\frac{R^3}{D}\int_{-\alpha}^{\theta}(\theta-u)[\tau_0(u)-\tau(u)]\,du+$$

$$+\frac{R^3}{D}\int_{-\alpha}^{\theta}[q(u)\cos(\theta-u)+\tau(u)\sin(\theta-u)]\,du-$$

$$-\frac{R^3}{D}\int_{-\alpha}^{\theta}[q_0(u)\cos(\theta-u)+\tau_0(u)\sin(\theta-u)]\,du+C,\quad (C=\mathrm{const}) \tag{1.9}$$

Подставляя выражения $\varepsilon_\theta^{(1)}$, $\psi_1$ и $\varepsilon_\theta^{(2)}$, $\psi_2$ соответственно из (1.9) и (1.4) в систему (1.1), затем умножая первое из соотношений (1.1) на мнимую единицу $i$ и складывая со вторым, придем к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{ctg}\frac{u-\theta}{2}\chi(u)\,du+\int_{-\alpha}^{\alpha}R^{(j)}(\theta-u)\chi(u)\,du+\int_{-\alpha}^{\alpha}N^{(j)}(\theta+u)\overline{\chi(u)}\,du+$$

$$+2\,\mathrm{Re}\int_{-\alpha}^{\theta}K(\theta-u)\chi(u)\,du=i\,\mathrm{th}(\pi\gamma)\chi(\theta)+f^{(j)}(\theta),\quad (-\alpha<\theta<\alpha) \tag{1.10}$$

Здесь $j=1;\ 2;\ 3$ — соответствуют первой, второй, третьей задачам и введены следующие обозначения:

$$\chi(\theta)=[q(\theta)+i\tau(\theta)]/4\mu,\quad \mathrm{th}(\pi\gamma)=(\varkappa-1)/(\varkappa+1)$$

$$R^{(j)}(\theta-u)=\begin{cases}0, & j=1;\ 3\\ (2\pi)^{-1}\,\mathrm{tg}\dfrac{\theta-u}{2}, & j=2\end{cases}$$

$$N^{(j)}(\theta+u)=\begin{cases}0, & j=1;\ 2\\ (2\pi)^{-1}\,\mathrm{tg}\dfrac{\theta+u}{2}, & j=3\end{cases}$$

$$K(\theta-u)=\frac{2\mu}{\varkappa+1}\left\{\frac{R^3}{D}-\left(\frac{R^3}{D}+\frac{R}{G}\right)\cos(\theta-u)-\right.$$

$$\left.-i\left[\frac{R^3}{D}(\theta-u)-\left(\frac{R^3}{D}+\frac{R}{G}\right)\sin(\theta-u)\right]\right\}$$

$$f^{(1)}(\theta)=-i\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\chi(u)\,du-\frac{\varkappa}{4\pi\mu R(\varkappa+1)}ie^{-i\theta}(X+iY)+f(\theta)$$

$$f^{(2)}(\theta)=-i\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\chi(u)\,du+f(\theta)$$

$$f^{(3)}(\theta)=-i\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\chi(u)\,du+\frac{\varkappa Ye^{-i\theta}}{2\pi\mu R(\varkappa+1)}+f(\theta)$$

где

$$f(\theta)=\frac{R^3}{D(\varkappa+1)}\int_{-\alpha}^{\theta}(\theta-u)\,\tau_0(u)\,du-\frac{R^3}{D(\varkappa+1)}\int_{-\alpha}^{\theta}[q_0(u)\cos(\theta-u)+$$

$$+\tau_0(u)\sin(\theta-u)]\,du+i\frac{R}{G(\varkappa+1)}\int_{-\alpha}^{\theta}[q_0(u)\sin(\theta-u)-$$

$$-\tau_0(u)\cos(\theta-u)]\,du-i\frac{1}{4\mu}pe^{-2i\theta}-i\frac{1}{8\mu}p+C/(\varkappa+1)$$

Таким образом, решение поставленных задач сводится к решению сингулярных интегральных уравнений (1.10) при условиях (1.5) и (1.6), ядра которых представлены в виде суммы ядра Гильберта $(2\pi)^{-1}\operatorname{ctg}(u-\theta)/2$ и регулярных ядер в виде функций $R^{(j)}(\theta-u)$, $N^{(j)}(\theta+u)$ и $K(\theta-u)$.

Отметим, что силовые характерисгики упругих накладок определяются формулами

$$T(\theta)=R\int_{-\alpha}^{\theta}\cos(\theta-u)[\tau(u)-\tau_0(u)]\,du-$$

$$-R\int_{-\alpha}^{\theta}\sin(\theta-u)[q(u)-q_0(u)]\,du$$

$$N(\theta)=R\int_{-\alpha}^{\theta}\sin(\theta-u)[\tau(u)-\tau_0(u)]\,du+$$

$$+R\int_{-\alpha}^{\theta}\cos(\theta-u)[q(u)-q_0(u)]\,du$$

$$M(\theta)=2R^2\int_{-\alpha}^{\theta}\sin^2\frac{\theta-u}{2}[\tau(u)-\tau_0(u)]\,du+$$

$$+R^2\int_{-\alpha}^{\theta}\sin(\theta-u)[q(u)-q_0(u)]\,du$$

Рассмотрим частный случай, когда жесткость накладок на изгиб пренебрежимо мала, то есть $D = 0$. Тогда первое соотношение граничных условий (1.1) и система (1.7) приводят к следующему сингулярному интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2}\varphi'(u)\,du+\int_{-\alpha}^{\alpha}K^{(j)}(\theta, u)\,\varphi'(u)\,du=\lambda\varphi(\theta)+f_j(\theta) \quad (1.11)$$

$$(-\alpha<\theta<\alpha)$$

при граничных условиях

$$\varphi(-\alpha)=0, \quad \varphi(\alpha)=M/4\mu R^2$$

Здесь снова $j = 1;\ 2;\ 3$ для первой, второй и третьей задач, а

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{4\mu}\int_{-\alpha}^{\theta}\tau(u)\,du, \quad \lambda=\frac{4\mu R}{G(\varkappa+1)}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}$$

$$K^{(1)}(\theta, u)=0,\ K^{(2)}(\theta, u)=(2\pi)^{-1}\operatorname{tg}\frac{\theta-u}{2},\ K^{(3)}(\theta, u)=-(2\pi)^{-1}\operatorname{tg}\frac{\theta+u}{2}$$

$$f_1(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(u)\,du-\frac{1}{8\pi\mu}\int_{-\alpha}^{\alpha}[q_0(u)+p(u)]\,du-$$

$$-\frac{\varkappa}{4\pi\mu R(\varkappa+1)}(X\cos\theta+Y\sin\theta)+g(\theta)$$

$$f_2(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(u)\,du-\frac{1}{4\pi\mu}\int_{-\alpha}^{\alpha}[q_0(u)+p(u)]\,du+g(\theta)$$

$$f_3(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(u)\,du-\frac{1}{4\pi\mu}\int_{-\alpha}^{\alpha}[q_0(u)+p(u)]\,du+$$

$$+\frac{\varkappa}{2\pi\mu R(\varkappa+1)}Y\sin\theta+g(\theta)$$

В последних формулах

$$p(\theta)=\int_{-\alpha}^{\theta}\tau_0(u)\,du, \quad g(\theta)=-\lambda\frac{p(\theta)}{4\mu}+\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{1}{4\mu}q_0(\theta)-$$

$$-\frac{1}{4\mu}p\cos 2\theta-\frac{1}{8\mu}p$$

Тангенциальные контактные напряжения выражаются формулой

$$\tau(\theta)=4\mu\varphi'(\theta), \quad (-\alpha<\theta<\alpha)$$

а нормальные контактные напряжения определятся после определения $\tau(\theta)$ формулой

$$q(\theta) = -\int_{-\alpha}^{\theta} \tau(u)\, du + q_0(\theta) + \int_{-\alpha}^{\theta} \tau_0(u)\, du = -4\mu\varphi(\theta) + q_0(\theta) + p(\theta)$$

2. *Сведение разрешающих уравнений к бесконечным системам линейных уравнений.* Решение (1.10) представим рядом [8]

$$\chi(\theta) = w(\theta) \sum_{m=0}^{\infty} Z_m P^{(\sigma,\rho)}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \Big/ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

с неизвестными коэффициентами $Z_m$ $(m = 0, 1, 2,\ldots)$.

Здесь

$$w(\theta) = \frac{1}{2}\left(\sec\frac{\theta}{2}\right)^{2+\sigma+\rho}\left(\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\right)^{\sigma}\left(\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\right)^{\rho}$$

$$\sigma = -\frac{1}{2} - i\gamma, \qquad \rho = -\frac{1}{2} + i\gamma$$

$P_m^{(\sigma,\rho)}(x)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, $(\operatorname{Re}(\sigma, \rho) > -1)$ — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x)^{\sigma}(1+x)^{\rho}$.

Сведение (1.10) к бесконечной системе основано на следующих соотношениях для многочленов Якоби [9, 10]:

$$-i\operatorname{th}(\pi\gamma)\, w(\theta)\, P_m^{(\sigma,\rho)}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2}\, w(u)\, P_m^{(\sigma,\rho)}\left(\operatorname{tg}\frac{u}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) du =$$

$$= \left(4\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}\pi\gamma\right)^{-1}\sec^2\frac{\theta}{2}\, P_{m-1}^{(-\sigma,-\rho)}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right), \quad (m=1, 2,\ldots)$$

$$-i\operatorname{th}(\pi\gamma)\, w(\theta) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2}\, w(u)\, du = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{sch}(\pi\gamma)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

Используя эти соотношения и свойства ортогональности многочленов Якоби [11, 12], известным способом получим бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $Z_m$ $(m=1, 2, \ldots)$, которая квазивполне регулярна [8, 13].

Следует отметить, что коэффициент $Z_0$ и постоянная $C$ определяются при помощи соотношений (1.5) и (1.6).

Отметим также, что решение разрешающего уравнения (1.11) можно построить при помощи аппарата ортогональных многочленов Чебышева как это сделано в работах [2, 14].

3. *Числовой пример.* Подробно рассмотрим третью задачу, когда внешние нагрузки, действующие на накладки, отсутствуют, и на пластине в бесконечности действуют только растягивающие напряжения $p$ в направлении оси $oy$. При этом

$$\tau_0(\theta)=0, \quad q_0(\theta)=0, \quad p(\theta)=0, \quad X=Y=0$$

кроме того,

$$q(-\theta)=q(\theta), \quad \tau(-\theta)=-\tau(\theta), \quad \varphi(-\theta)=\varphi(\theta)$$

и разрешающее уравнение (1.11) задачи примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}(u-\theta)\,\varphi'(u)\,du=\lambda\varphi(\theta)+f_3(\theta) \quad (-\alpha<\theta<\alpha), \quad (\tau(\theta)=4\mu\varphi'(\theta)) \tag{3.1}$$

а граничные условия — вид

$$\varphi(-\alpha)=\varphi(\alpha)=0$$

Функция $f_3(\theta)$ в обсуждаемом частном случае выражается формулой

$$f_3(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(u)\,du-\frac{1}{8\mu}p-\frac{1}{4\mu}p\cos 2\theta$$

Нормальное контактное напряжение будет даваться формулой

$$q(\theta)=-\int_{-\alpha}^{\theta}\tau(u)\,du=-4\mu\varphi(\theta)$$

Уравнение (3.1) запишем в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\beta}^{\beta}\operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2}\,\varphi_*'(u)\,du=\lambda\varphi_*(\theta)+f_*(\theta), \quad (-\beta<\theta<\beta), \quad |\beta|<\pi \tag{3.2}$$

$$\varphi_*(-\beta)=\varphi_*(\beta)=0$$

где обозначено

$$\beta=2\alpha, \quad \varphi_*(\theta)=\varphi\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad f_*(\theta)=f_3\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Решение уравнения (3.2) представим в виде [2, 14]

$$\varphi_*'(\theta)=\frac{\sec\theta/2}{\sqrt{2\cos\theta-2\cos\beta}}\sum_{m=1}^{\infty}X_m T_{2m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) \tag{3.3}$$

$$\varphi_*(\theta)=-\csc\beta\sum_{m=1}^{\infty}X_m(2m-1)^{-1}\sqrt{2\cos\theta-2\cos\beta}\,\sec\frac{\theta}{2}\times$$
$$\times U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) \tag{3.4}$$

Здесь $T_n(x)$ и $U_n(x)$ ($|x| \leqslant 1$) — соответственно многочлены Чебышева первого и второго рода.

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.2) и используя соотношение [14]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta}\operatorname{ctg}\frac{u-\theta}{2}\,\frac{\sec\frac{u}{2}\,T_{2m-1}\left(\operatorname{tg}\frac{u}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)du}{\sqrt{2\cos u-2\cos\beta}}=$$

$$=\frac{1}{2}\csc\frac{\beta}{2}\,U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\sec^2\frac{\theta}{2},\quad (m=1,2,\ldots)$$

известным способом получим бесконечную систему линейных уравнений относительно коэффициентов $X_m$ ($m = 1, 2, \ldots$):

$$X_n+\sum_{m=1}^{\infty}X_m a_{n,m}=\frac{1}{2}\left(\pi\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\left(\frac{p}{E_2}\,b_n^{(1)}+Ab_n^{(2)}\right),\quad (n=1,2,\ldots)$$

где

$$a_{n,m}=\lambda_m\int_{-\alpha}^{\alpha}U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\sec^2\frac{\theta}{2}\times$$

$$\times(2\cos\theta-2\cos\beta)\,d\theta$$

$$\lambda_m=\lambda\left[(2m-1)\,4\pi\sin^2\frac{\beta}{2}\right]^{-1}$$

$$b_n^{(1)}=-\frac{1+\nu_2}{2}\int_{-\beta}^{\beta}\cos\theta\sec\frac{\theta}{2}\sqrt{2\cos\theta-2\cos\beta}\;U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)d\theta=$$

$$=\pi(1+\nu_2)\sin\beta\,(2n-1)(-1)^n\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2n-1}$$

$$b_n^{(2)}=\int_{-\beta}^{\beta}\sec\frac{\theta}{2}\sqrt{2\cos\theta-2\cos\beta}\;U_{2n-2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)d\theta=$$

$$=4\pi\sin\frac{\beta}{2}(-1)^{n-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2n-1}$$

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta}\varphi_{\pm}(u)\,du-\frac{1}{8\mu}\,p=\sec\frac{\beta}{2}\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}X_m(2m-1)^{-1}(-1)^m\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2m-1}-p/8\mu \tag{3.5}$$

Коэффициенты $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ представим в виде

$$X_m = \frac{p}{E_2} X_m^{(1)} + A X_m^{(2)} \tag{3.6}$$

где $X_m^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ представляют собой решения бесконечных систем

$$X_n^{(j)} + \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(j)} a_{n,m} = \frac{1}{2}\left(\pi \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^{-1} b_n^{(j)}$$

Постоянная $A$ определяется из соотношения (3.5), которое после постановки в него (3.6) примет вид

$$A = \frac{p}{E_2} \frac{\sec\frac{\beta}{2}\sum\limits_{m=1}^{\infty} X_m^{(1)}(2m-1)^{-1}(-1)^m\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2m-1} - (1+\nu_2)/4}{1 - \sec\frac{\beta}{2}\sum\limits_{m=1}^{\infty} X_m^{(2)}(2m-1)^{-1}(-1)^m\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2m-1}}$$

Для числовых расчетов ядро $a_{n,m}$ удобно представить в виде быстро сходящегося ряда [14]

$$a_{n,m} = -\frac{16}{\pi}\lambda(2n-1) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}\right)^{2k+1}}{[(2k-2n+2)^2-(2m-1)^2][(2k+2n)^2-(2m-1)^2]}$$

Числовые расчеты проведены для случая $\varkappa = 3-4\nu_2$ при следующих значениях физических и геометрических параметров:

$$\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3, \quad E_2/E_s = 2;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0,\ h/R = 0{,}05,$$

$$2\alpha = 30^\circ;\ 60^\circ,\ (2\beta = 60^\circ;\ 120^\circ).$$

Бесконечные системы решались методом редукции, причем ограничивались лишь решением системы из шести уравнений, поскольку ее решение с точностью, по крайней мере, до пяти цифр совпало с решением системы из пяти уравнений.

Числовые результаты приведены в табл. 1.

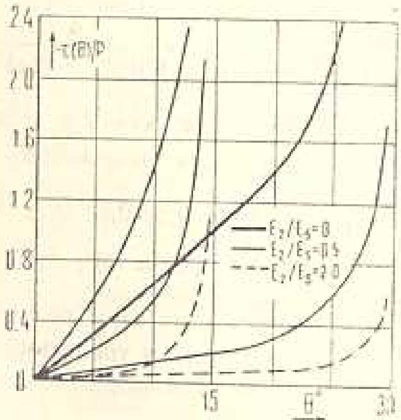
$$x_n = -\frac{E_2}{p} X_n$$

На фиг. 3 показаны закономерности изменения контактного тангенциального напряжения в зависимости от материалов контактирующих пар и длин участков контакта. Замечено, что при уменьшении значений отношения $E_2/E_s$, то есть когда материал стрингеров становится более жестким, контактные тангенциальные напряжения под упругими криволинейными стрингерами увеличиваются.

Далее определены значения нормального напряжения $\sigma_\theta(r, \theta)$ в точке $(R, 0)$ для различных контактирующих пар и длин участков контакта. Эти результаты приведены в табл. 2.

*Таблица 1*

| | | $E_2/E_s$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 1 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 0 |
| $2\alpha=30°$ | $x_1$ | 0,0454 | 0,0762 | 0,1163 | 0,1780 | 0,2026 | 0,2497 |
| | $x_2$ | 0,0163 | 0,0169 | 0,0132 | 0,0040 | −0,0026 | −0,0132 |
| | $x_3$ | 0,0069 | 0,0056 | 0,0038 | 0,0019 | 0,0010 | 0 |
| | $x_4$ | 0,0030 | 0,0021 | 0,0013 | 0,0006 | 0,0003 | 0,0001 |
| | $x_5$ | 0,0014 | 0,0010 | 0,0006 | 0,0003 | 0,0001 | 0 |
| $2\alpha=60°$ | $x_1$ | 0,0410 | 0,0739 | 0,1243 | 0,2123 | 0,2789 | 0,4079 |
| | $x_2$ | 0,0098 | 0,0093 | 0,0023 | −0,0185 | −0,0378 | −0,0791 |
| | $x_3$ | 0,0085 | 0,0086 | 0,0076 | 0,0065 | 0,0065 | 0,0080 |
| | $x_4$ | 0,0039 | 0,0030 | 0,0020 | 0,0008 | 0 | −0,0011 |
| | $x_5$ | 0,0021 | 0,0015 | 0,0010 | 0,0006 | 0,0003 | −0,0001 |
| | $x_6$ | 0,0012 | 0,0008 | 0,0006 | 0,0003 | 0,0001 | −0,0001 |




Фиг. 3.

*Таблица 2*

| | | $E_2/E_s$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 1 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 0 |
| $\sigma_\theta/p$ | $2\alpha=30°$ | 2,642 | 2,327 | 1,870 | 1,197 | 0,788 | 0,173 |
| | $2\alpha=60°$ | 2,802 | 2,620 | 2,313 | 1,729 | 1,263 | 0,331 |

Общеизвестно, что отверстия в пластинах являются зонами концентрации напряжений, в частности замечаются концентрации нормального напряжения $\sigma$ в точках $(R, 0)$ и $(R, \pi)$ (фиг. 2), равного утроенному значению внешнего растягивающего напряжения $p$ [7]. Из табл. 2 видно, что эти напряжения при наличии кольцеобразных накладок на границе отверстия пластины заметно уменьшаются, причем, как и следовало ожидать, этот эффект заметнее при малых значениях отношения $E_2/E_1$.

В итоге можно утверждать, что усиление круговой границы пластины накладками благоприятно влияет на напряженное состояние пластины в целом.

## ԿԼՈՐ ԱՆՑՔՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱՆՎԵՐՋ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Ֆ. Ս. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Աշխատանքում դիտարկվում են մի քանի կոնտակտային խնդիրներ՝ կլոր անցքով առաձգական հարթության համար, որն իր եզրագծի աղեղային հատվածներով ուժեղացված է բարակ առաձգական վերադիրներով։ Վերադիրների համար որպես ֆիզիկական մոդել ընդունվում է բարակ գլանային թաղանթների լարվածային վիճակի մոդելը՝ Կիրխհոֆ-Լյավի հիպոթեզների շրջանակներում։ Խնդիրների որոշիչ հավասարումները հանգում են Հիլբերտի և որոշ ռեգուլյար կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման։ Օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով այդ հավասարման համար ստացված է էֆեկտիվ լուծում։ Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր։ Ստացված են թվային արդյունքներ։*

## ON SOME PROBLEMS OF CONTACT INTERACTION BETWEEN THE ELASTIC INFINITE PLANE WITH A CIRCULAR HOLE AND CIRCULAR STIFFENERS

S. M. MKHITARIAN, F. S. TOROSSIAN

S u m m a r y

Certain contact problems for an elastic plane with a circular hole, reinforced above the arc segment of its boundary with elastic stiffeners of a small thickness are considered. The solution of the above problems is reduced to that of singular integral equations. By the method of the Jacobi orthogonal polynomials the efficient solution for these equations is founded. For this particular case, the numerical results are obtained.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Шереметьев М. П.* Пластинки с подкрепленным краем. Львов: изд-во Львовс ун-та, 1960.
2. *Шагинян С. С.* Передача нагрузки от кольцевой накладки к плоскости с кругов отверстием.— Изв. АН СССР, МТТ, 1972, 5, с. 178—183.
3. *Шагинян С. С.* Некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отверстие усиленной на своей границе упругими накладками.— Изв. АН Арм.ССР, Мех ника, 1974, 27, № 1, с. 3—17.
4. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.— Ingr-Arc 1932, 3, Nr. 2, s. 123—129.
5. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением.— ПММ, 1968, 32, № 2, с. 632—646.
6. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упруг сти. М.: Наука, 1966.
8. *Мхитарян С. М., Торосян Ф. С.* О контактном взаимодействии кругового диска бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевы покрытием.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1978, 31, № 5, с. 3—19.
9. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцеплени или трения.— ПММ, 1966, 30, № 3, с. 551—563.
10. *Карпенко Л. Н.* Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравне ния при помощи многочленов Якоби.— ПММ, 1966, 30, № 3, с. 564—569.
11. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие транцендентные функции, ч. 1, М.: Наука, 1973.
13. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Контактная задача о вдавливании штампа в упру гую полуплоскость с тонким усиливающим покрытием.— ПММ, 1975, 39, № 5 с. 857—875.
14. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической контактной задаче для полуплоскост с упругими накладками.— ПММ, 1971, 35, № 1, с. 172—178.



Институт механики АН Армянской ССР
Ленинаканский филиал ЕрПИ им. К. Маркса



Поступила в редакцию
7. IV. 1981