ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

# ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

МАЙБОРОДА В. П., ТРОЯНОВСКИЙ И. Е.

В [1] динамические задачи для слоистых, в том числе и вязкоупругих, конструкций ставятся и решаются в рамках теории многослойных оболочек. В настоящей работе задачи динамической устойчивости слоистых вязкоупругих конструкций ставятся и решаются с привлечением трехмерных уравнений движения линейной теории вязкоупругости.

1. Рассматривается составное тело, занимающее объем $V=\sum\limits_{n=1}^{N} V_n$, ограниченный поверхностью $\sum=\sum_u+\sum_p$. Каждый из $N$ объемов $V_n$ заполнен вязкоупругой средой, свойства которой зависят от номера $n$. На тело действуют массовые силы

$$f_i=f_{i0}(\vec{x})+q_{ij}(\vec{x})u_j+h_{ij}(\vec{x})\frac{\partial u_j}{\partial t}$$

на части $\sum_u$ поверхности заданы нулевые смещения, на $\sum_p$ — поверхностные силы

$$p_i=p_{i0}(\vec{x})+q_{ij}(\vec{x})u_j+r_{ij}(\vec{x})\frac{\partial u_j}{\partial t}$$

Здесь $i, j=1, 2, 3$, $f_{0i}$, $q_{ij}$, $h_{ij}$, $p_{0i}$, $q_{ij}$, $r_{ij}$ — заданные функции радиуса-вектора $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$. На границах раздела непрерывны перемещения и нормальные и касательные к поверхности раздела напряжения. Подлежат определению частоты и показатели демпфирования малых колебаний системы около положения равновесия.

Физические свойства $n$-го тела описываются соотношениями [2]

$$\sigma_{ij}=\bar{\lambda}_n\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\bar{\mu}\varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$

$$i, j, k=1, 2, 3, \; n=1, \dots, N$$

где $\sigma_{ij}$, $\varepsilon_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций, $\bar{\lambda}_n$, $\bar{\mu}_n$ — операторы Вольтерра,

$$\tilde{\lambda}_n\varphi \equiv \lambda_n \left[ \varphi(t) - \int_0^t R_{\lambda n}(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \right]$$

$$\tilde{\mu}_n\varphi \equiv \mu_n \left[ \varphi(t) - \int_0^t R_{\mu n}(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \right] \qquad (1.2)$$

$\lambda_n$, $\mu_n$, $R_{\lambda n}$, $R_{\mu n}$ — параметры Ламе и ядра релаксации среды, занимающий объем $V_n$, $\varphi$ — произвольная функция времени. Предполагается малость интегральных членов в (1.2).

Пусть функция $\varphi$ в (1.2) имеет вид

$$\varphi(t) = \psi(t)\, e^{-i\omega_R t}$$

где $\omega_R$ — действительная константа, $\psi$ — медленно меняющаяся функция времени, $i$ — мнимая единица. С помощью метода замораживания [3] вместо (1.2) можно записать приближенные соотношения

$$\lambda_n\varphi \cong \tilde{\lambda}_n\varphi \equiv \lambda_n [1 - \Gamma^c_{\lambda n}(\omega_R) - i\Gamma^s_{\lambda n}(\omega_R)]\,\varphi$$

$$\Gamma^c_{\lambda n}(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda n}(\tau)\cos\omega_R\tau\,d\tau, \qquad \Gamma^s_{\lambda n}(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda n}(\tau)\sin\omega_R\tau\,d\tau$$

второе из соотношений (1.2) преобразуется аналогично.

Постановка математической задачи о малых колебаниях системы около положения равновесия существенно зависит от наличия свободных членов $f_{i0}$, $p_{i0}$ в выражениях для массовых и поверхностных сил. Если эти величины равны нулю, то положение равновесия достигается при нулевых перемещениях и напряжениях. В этом случае искомые перемещения $u_i$ задачи о собственных колебаниях должны удовлетворять уравнениям движения

$$\vec{x} \in V_n:\quad \tilde{\mu}_n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\tilde{\lambda}_n + \tilde{\mu}_n)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \rho_n \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + q_{ij}u_j + h_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

и граничным условиям

$$\vec{x} \in \Sigma_u:\quad u_i = 0$$

$$\vec{x} \in \Sigma_p:\quad \left[\tilde{\lambda}_n \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \tilde{\mu}_n\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]\nu_j - q_{ij}u_j - r_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 \qquad (1.4)$$

$$i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3;\ n = 1, \ldots, N;$$

кроме того, перемещения $u_i$ должны иметь вид

$$u_i(x,\ x_2,\ x_3,\ t) = \vartheta_i(x_1,\ x_2,\ x_3)\,e^{-i\omega t} \qquad (1.5)$$

Здесь $\vartheta_j$ — компоненты нормали к поверхности, $\omega = \omega_R + i\omega_I$ — искомая комплексная собственная частота, $\vartheta_i$ — искомая комплексная собственная форма колебаний, $\rho_n$ — плотность материала $n$-го тела. Физически $\omega_R$ представляет собой частоту, $\omega_I$ — коэффициент демпфирования собственных колебаний.

Подстановка (1.5) в (1.3), (1.4) приводит к однородной краевой задаче вида

$$\vec{x} \in V_n: \quad \bar{\mu}_n(\omega_R)\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x_j \partial x_j} + [\bar{\lambda}_n(\omega_R) + \bar{\mu}_n(\omega_R)]\frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial x_i \partial x_j} + \rho_n \omega^2 \vartheta_i + q_{ij}\vartheta_j - i\omega h_{ij}\vartheta_j = 0$$

$$\vec{x} \in \textstyle\sum_n: \quad \vartheta_i = 0 \tag{1.6}$$

$$\vec{x} \in \textstyle\sum_p: \quad \left[\bar{\lambda}_n(\omega_R)\frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \bar{\mu}_n(\omega_R)\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x_i}\right)\right]\vartheta_j - q_{ij}\vartheta_j + i\omega r_{ij}\vartheta_j = 0$$

Это — задача о собственных значениях с нелинейно входящим комплексным параметром.

В случае, когда некоторые из функций $f_{i0}$, $p_{i0}$ отличны от нуля, положение равновесия не совпадает с начальным состоянием системы. В этом случае к постановке задачи устойчивости необходимо привлекать соотношения геометрически нелинейной теории вязкоупругости. Такое обобщение связано с принципиальными трудностями: физические соотношения вязкоупругости при конечных деформациях исследованы в настоящее время недостаточно. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся постановкой и решением частной задачи динамической устойчивости. А именно, предполагается несжимаемость всех элементов системы. Кроме того, предполагается, что в положении равновесия равны нулю все компоненты вектора перемещений и, следовательно, девиаторов напряжений и деформаций, а отлично от нуля лишь среднее нормальное напряжение. Тогда при рассмотрении малых колебаний около положения равновесия можно использовать соотношения линейной теории; необходимо учесть лишь, что метрики деформированной и недеформированной систем не совпадают.

Задача о малых колебаниях системы ставится так:

$$\vec{x} \in V_n: \quad \mu_n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + q_{ij}u_j + h_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} - \rho_n \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

$$\vec{x} \in \textstyle\sum_n: \quad u_i = 0 \tag{1.7}$$

$$\vec{x} \in \textstyle\sum_p: \quad \left[\sigma\delta_{ij} + \bar{\mu}_n\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]\vartheta_j - g_{ij}u_j - r_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_j}u_i\vartheta_j - \sigma_0\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \vartheta_i\vartheta_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\vartheta_j = 0$$

Здесь $\sigma_0$ — среднее напряжение в положении равновесия, $\sigma$ — его отклонение при колебаниях. Задача (1.7) записана в эйлеровой системе координат. Подчеркнутые члены, отличающие задачу (1.7) от (1.3), (1.4), появились вследствие учета того обстоятельства, что границы деформированной и недеформированной систем не совпадают.

Замена (1.5) сводит задачу (1.7) к задаче о собственных значениях. Вопрос об устойчивости положения равновесия системы в зависимости от знаков мнимых частей собственных значений параметра $\omega$. Положение равновесия устойчиво, если мнимые части всех собственных значений отрицательны, и неустойчиво, если мнимая часть одного из собственных значений положительна.

2. Рассматривается бесконечный цилиндр, состоящий из касательных слоев. Внутренняя поверхность соединена с абсолютно жестким сердечником, вращающимся с постоянной угловой скоростью $\Omega$, внешняя поверхность свободна от нагрузок. Все слои несжимаемы, предполагается плоское деформированное состояние (осевые смещения равны нулю). Вводится цилиндрическая система координат, вращающаяся вместе с сердечником с угловой скоростью $\Omega$.

Под действием центробежной силы инерции в положении относительного равновесия возникает напряженное состояние, рассмотренное выше: все перемещения и касательные напряжения равны нулю, нормальные напряжения в положении относительного равновесия определяются формулой

$$\sigma_{0rr} = \sigma_{0\varphi\varphi} = \sigma_{0zz} = \sigma_0 = \Omega^2 \int_r^{r_N} r\rho(r)\,dr$$

где $r_N$ — внешний радиус цилиндра, $\rho$ — плотность, являющаяся ступенчатой функцией текущего радиуса $r$: $\rho = \rho_n$ при $r_{n-1} < r < r_n$, $r_{n-1}$, $r_n$ — внутренний и внешний радиусы $n$-го слоя.

В задаче об устойчивости положения равновесия в качестве искомых функций принимаются перемещения $u_r$, $u_\varphi$, касательное напряжение $\sigma_{r\varphi}$ и отклонение $\sigma_{rr}$ нормального радиального напряжения от равновесного значения $\sigma_{0rr}$. В учетом сил инерции Кориолиса задача устойчивости принимает вид

$$r_{n-1} < r < r_n, \quad n = 1, \ldots, N:$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi}{r} + \frac{3}{\overline{E}_n}\sigma_{r\varphi}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{4\overline{E}_n}{3r}\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \rho_n \frac{\partial^2 u_r}{\partial t} - 2\rho_n \Omega \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} = -\frac{4\bar{E}_n}{3r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \varphi} - \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} + \right.$$

$$+ \rho_n \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} + 2\rho_n \Omega \frac{\partial u_r}{\partial t}$$

$$r = r_0: \quad u_r = u_\varphi = 0$$

$$r = r_N: \quad \sigma_{rr} - r_N \rho_N \Omega^2 u_r = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0$$

На окружностях $r = r_n$, $n = 1, \ldots, N-1$ непрерывны $u_r$, $u_\varphi$, $\sigma_{rr} - 2\rho(r)\Omega^2 u_r$, $\sigma_{r\varphi}$. Здесь $r_0$—внутренний радиус цилиндра, $\bar{E}_n = 3\bar{\mu}_n$. Задача (2.1) записана в эйлеровых координатах. Первое из уравнений (2.1) представляет собой уравнение несжимаемости, следующие три получены путем исключения деформаций и окружного $\sigma_{\varphi\varphi}$ и среднего $\sigma$ напряжений из соотношений Коши, закона Гука и уравнений равновесия для возмущений. Подчеркнутое слагаемое в граничном условии возникло в результате переноса этого условия с деформированной на недеформированную внешнюю поверхность.

Решение задачи устойчивости ищется в виде

$$(u_r, u_\varphi, \sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}) = (\vartheta_r, i\vartheta_\varphi, \tau_{rr}, i\tau_{r\varphi}) \exp(-im_\varphi - i\omega t) \tag{2.2}$$

Подстановка (2.2) в (2.1) приводит к задаче на собственные значения вида

$$r_{n-1} < r < r_n:$$

$$\frac{d\vartheta_r}{dr} = -\left(\frac{\vartheta_r}{r} + \frac{m}{r}\vartheta_\varphi\right)$$

$$\frac{d\vartheta_\varphi}{dr} = \frac{m}{r}\vartheta_r + \frac{\vartheta_\varphi}{r} + \frac{3}{\bar{E}_n}\tau_{r\varphi}$$

$$\frac{d\tau_{rr}}{dr} = -\frac{m}{r}\tau_{r\varphi} + \frac{4\bar{E}_n}{3r}\left(\frac{\vartheta_r}{r} + \frac{m}{r}\vartheta_\varphi\right) - \rho_n\omega^2\vartheta_r - 2\rho_n\omega\Omega\vartheta_\varphi$$

$$\frac{d\tau_{r\varphi}}{dr} = \frac{4\bar{E}_n m}{3r}\left(\frac{\vartheta_r}{r} + \frac{m}{r}\vartheta_\varphi\right) + \frac{m}{r}\tau_{rr} - \frac{2}{r}\tau_{r\varphi} - \rho_n\omega^2\vartheta_\varphi - 2\rho_n\omega\Omega\vartheta_r$$

$$r = r_0: \quad \vartheta_r = \vartheta_\varphi = 0$$

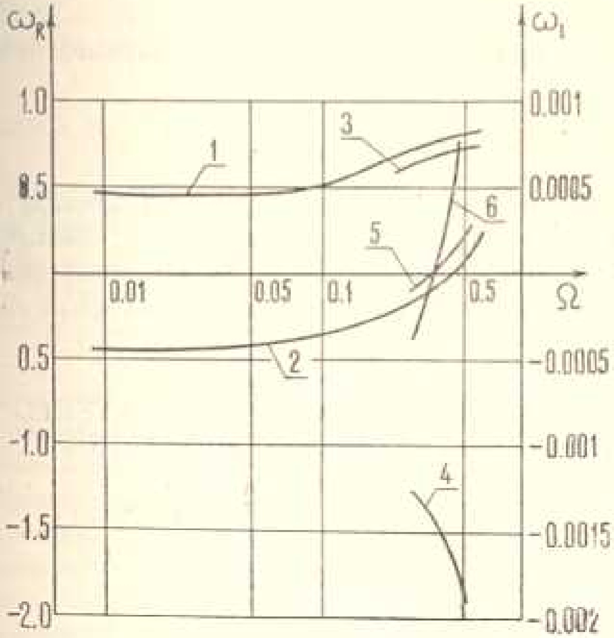
$$r = r_N: \quad \tau_{rr} - \rho_N\Omega^2 r_N\vartheta_r = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0$$

$$r = r_n,\ n = 1, \ldots, N-1: \text{ непрерывность } \vartheta_r,\ \vartheta_\varphi$$

$$\tau_{rr} - \rho(r)\Omega^2 r\vartheta_r, \quad \tau_{r\varphi}.$$

Характеристическое уравнение задачи о собственных значениях строилось методом ортогональной прогонки [4], корни этого уравнения разыскивались с помощью метода парабол [4].

В качестве примера рассмотрена задача об устойчивости 10-слойного цилиндра (5 упругих слоев чередуются с пятью вязкоупругими слоями). Прослежена зависимость двух первых собственных частот от угловой скорости $\Omega$. Предварительно такая зависимость построена для цилиндра, состоящего из упругих слоев. При $\Omega = 0$ собственные частоты $\omega_1$, $\omega_2$ действительны, имеют равные модули и противоположные знаки.




Фиг. 1

Эволюцию указанных собственных частот описывают кривые 1, 2 на фиг. 1. С ростом угловой скорости отрицательная собственная частота убывает по модулю (кривая 2) и при $\Omega \approx 1{,}1\ \omega_1^\circ$ ($\omega_1^\circ$ — первая собственная частота при $\Omega = 0$) обращается в нуль, после чего становится положительной. Мнимые части собственных частот равны нулю при всех рассмотренных значениях $\Omega$. Согласно известной теореме Ляпунова из этого факта нельзя сделать вывод об устойчивости либо о неустойчивости вращательного движения.

Кривые 3—6 на фиг. 1 описывают эволюцию комплексных собственных значений с ростом $\Omega$ неоднородного цилиндра с пятью вязкоупругими и пятью упругими слоями. Кривые построены в окрестности точки смены знака собственной частоты упругого цилиндра. Кривые, соответствующие первой собственной частоте с положительной действительной частью при $\Omega = 0$, не имеют особенностей: действительная часть остается положительной, мнимая — отрицательной во всем рассмотренном диапазоне изменения угловых скоростей (кривые 3, 4 на фиг. 1).

Действительная часть второй собственной частоты (кривая 5) меняет знак при достижении угловой скоростью критического значения, причем смена знака происходит при несколько меньшем значении $\Omega$, чем в случае упругого цилиндра. Одновременно со сменой знака действительной части происходит смена знака мнимой части (кривая 6). Таким образом, угловая скорость, при которой происходит смена знака собственного значения, является критической в смысле потери устойчивости.

Վ. Պ. ՄԱՅԲՈՐՈԴԱ, Ի. Ե. ՏՐՈՅԱՆՈՎՍԿԻ

## ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՌԱՁԳԱՄԱԾՈՒՑԻԿ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

*Շերտավոր առաձգամածուցիկ կառուցվածքների դինամիկ կայունության խնդիրը լուծվում է առաձգամածուցիկության գծային տեսության շարժման հավասարումների ներգրավումով: Որպես օրինակ դիտարկվել է 10 շերտանի անհամասեռ առաձգամածուցիկ գլանի կայունության մասին խնդիրը:*

## THE DYNAMIC STABILITY OF LAYERED VISCOELASTIC CONSTRUCTIONS

V. P. MAIBORODA, I. E. TROYANOVSKI

Summary

This paper formulates the problem of the dynamic stability of piecewise nonuniform viscoelastic body subjected to nonconservative forces. The problem of the dynamic stability of a rotating multilayer cylinder is solved.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 373 с.
2. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
3. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений. Ташкент: ФАН, 1974. 216 с.
4. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1975. 627 с.

Московский институт электронного машиностроения

Поступила в редакцию 20. V. 1981