ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 6, 1982 Механика

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ, НАГРЕВАЕМОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОБЛАСТЬЮ НАГРЕВА

КОЛЯНО Ю. М., ПРЫЙМАК В. И.

Рассмотрим тонкую ортотропную полубесконечную пластинку $x \geqslant 0$ толщиной 2δ, главные направления упругости которой совпадают с осями прямоугольной системы координат x, y, z. Поверхность пластинки $x = 0$ нагревается по узкой зоне ширины $2h$ $(h < \delta)$ внешней средой температуры $t_0 = \text{const}$, движущейся с постоянной скоростью v в положительном направлении оси ординат. Через поверхности $z = \pm \delta$ и $x = 0$ осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой соответственно нулевой температуры и температуры $t_c(y_1) = t_1 + (t_0 - t_1) N(y_1)$. Здесь $y_1 = y - v\tau$; t_1 — температура среды, омывающей части поверхности $x = 0$ пластинки вне области нагрева; τ — время; $N(y_1) = S_-(y_1 + h) - S_+(y_1 - h)$;

$$S_\pm(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 1/2 \mp 1/2, & \xi = 0, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases} \text{— асимметричные единичные функции.}$$

Необходимо определить термонапряженное состояние пластинки.

§ 1. *Температурное поле*

Для определения возникающего в пластинке квазистационарного температурного поля имеем уравнение теплопроводности [1]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} - \varkappa^2 T + 2\omega \frac{\partial T}{\partial y_1} = 0 \tag{1.1}$$

и граничные условия [2]

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = [h_1 + (h_0 - h_1) N(y_1)] [T|_{x_1=0} - t_c(y_1)] \tag{1.2}$$

$$T|_{x_1 \to \infty} = 0 \tag{1.3}$$

$$T|_{|y_1| \to \infty} \neq \infty \tag{1.4}$$

где $x_1 = x$; $y_1 = y - v\tau$; $k_y = \lambda_y/\lambda_x$; $\varkappa^2 = \alpha_z/\lambda_z\delta$; $\omega = v/2a_x$; $h_i = \alpha_i/\lambda_x$ $(i = 0, 1)$; λ_x, λ_y — коэффициенты теплопроводности вдоль координатных осей x и y; α_z — коэффициент теплоотдачи с боковых поверхностей $z = \pm \delta$ пластинки: a_x — коэффициент температуропроводности; α_0, α_1 — коэффициенты теплоотдачи соответственно с области нагрева поверхности $x = 0$ и вне ее.

Вводя интегральную характеристику

$$\vartheta = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} T(0, y_1)\, dy_1 \tag{1.5}$$

условия (1.2) сведем к виду

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = h_1 T|_{x_1=0} - QN(y_1) - h_1 t_1 \tag{1.6}$$

где

$$Q = h_0 t_0 - h_1 t_1 - (h_0 - h_1)\,\vartheta \tag{1.7}$$

Такой подход вполне оправдан для узкозонального нагрева [3].

Применяя к (1.1), (1.3), (1.6) интегральное преобразование Фурье по y_1, с учетом условий (1.4) соответственно получим

$$\frac{d^2 \overline{T}}{dx_1^2} - \gamma^2 \overline{T} = 0 \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{d\overline{T}}{dx_1}\right|_{x_1=0} = h_1 \overline{T}|_{x_1=0} - \frac{2Q \sin \eta h}{\sqrt{2\pi}\,\eta} - \sqrt{2\pi}\, h_1 t_1 \delta(\eta) \tag{1.9}$$

$$\overline{T}|_{x_1\to\infty} = 0 \tag{1.10}$$

где

$$\overline{T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T e^{i\eta y_1}\, dy_1; \qquad \gamma = \sqrt{\zeta + 2i\omega\eta}; \quad \zeta = k_y \eta^2 + \varkappa^2$$

$\delta(\eta)$ — дельта-функция Дирака.

Решение краевой задачи (1.8) — (1.10) запишется в виде

$$\overline{T} = \frac{2Q \sin \eta h}{\sqrt{2\pi}\,(\gamma + h_1)\,\eta} e^{-\gamma x_1} + \frac{\sqrt{2\pi}\, h_1 t_1 \delta(\eta)}{\varkappa + h_1} e^{-\varkappa x_1} \tag{1.11}$$

Перейдя в (1.11) к оригиналу, получим

$$T = \frac{2Q}{\pi} f(x_1, y_1) + \frac{h_1 t_1}{\varkappa + h_1} e^{-\varkappa x_1} \tag{1.12}$$

где

$$f(x_1, y_1) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\gamma_+ + h_1)\cos(\gamma_- x_1 + \eta y_1) - \gamma_- \sin(\gamma_- x_1 + \eta y_1)}{\eta[(\gamma_+ + h_1)^2 + \gamma_-^2]} \sin \eta h \, e^{-\gamma_+ x_1} d\eta$$

$$\gamma_\pm^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\zeta^2 + 4\omega^2\eta^2} \pm \zeta\right)$$

Использовав (1.12), из (1.5) находим

$$\vartheta = \frac{(\varkappa + h_1)(h_0 t_0 - h_1 t_1) I + h_1 t_1}{(\varkappa + h_1)[1 + (h_0 - h_1) I]} \tag{1.13}$$

где

$$I = \frac{2}{\pi h} \int_0^\infty \frac{(\gamma_+ + h_1)\sin^2 \eta h}{\eta^2[(\gamma_+ + h_1)^2 + \gamma_-^2]} d\eta$$

Подставляя (1.13) в (1.7), для Q получаем выражение

$$Q = \frac{h_0 t_0 (\varkappa + h_1) - h_1 t_1 (\varkappa + h_0)}{(\varkappa + h_1)[1 + (h_0 - h_1) I]} \tag{1.14}$$

Таким образом, решение уравнения (1.1) определяется формулами (1.12), (1.14).

§ 2. *Определение температурных напряжений*

Для определения напряжений, вызываемых температурным полем (1.12), воспользуемся формулами [1, 4]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} \tag{2.1}$$

где функция напряжений F удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2p\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + q\frac{\partial^4 F}{\partial y_1^4} = -\alpha_{ty}^* \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \alpha_{tx}^* \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} \tag{2.2}$$

Здесь $p = E_y(1/G - 2\nu_x/E_x)/2$; $q = E_y/E_x$; $\alpha_{tx}^* = \alpha_x^t E_y$; $\alpha_{ty}^* = \alpha_y^t E_y$; E_x, E_y — модули Юнга для растяжения (сжатия) вдоль главных направлений упругости x, y; ν_x — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении y при растяжении в направлении x; G — модуль сдвига; α_x^t, α_y^t — температурные коэффициенты линейного расширения в направлении x и y.

Предположим, что пластинка свободна от внешней нагрузки, то есть

$$\sigma_{xx}\big|_{x_1=0} = \sigma_{xy}\big|_{x_1=0} = 0, \quad \sigma_{xx}\big|_{x_1, |y_1| \to \infty} = \sigma_{xy}\big|_{x_1, |y_1| \to \infty} = 0 \tag{2.3}$$

Фурье по y_1, получим

$$\bar\sigma_{xx} = -\eta^2 \bar F, \quad \bar\sigma_{yy} = \frac{d^2\bar F}{dx_1^2}, \quad \bar\sigma_{xy} = i\eta \frac{d\bar F}{dx_1} \tag{2.4}$$

$$\frac{d^4\bar F}{dx_1^4} - 2p\eta^2 \frac{d^2\bar F}{dx_1^2} + q\eta^2\bar F = \alpha^*_{tx}\eta^2\bar T - \alpha^*_{ty}\frac{d^2\bar T}{dx_1^2} \tag{2.5}$$

$$\bar\sigma_{xx}\big|_{x_1=0} = \bar\sigma_{xy}\big|_{x_1=0} = 0, \quad \bar\sigma_{xx}\big|_{x_1\to\infty} = \bar\sigma_{xy}\big|_{x_1\to\infty} = 0 \tag{2.6}$$

Используя (1.8), частное решение $\bar F_r$ уравнения (2.5) находим в виде

$$\bar F_r = \frac{\alpha^*_{tx}\eta^2 - \alpha^*_{ty}\gamma^2}{\gamma^4 - 2p\eta^2\gamma^2 + q\eta^4}\bar T$$

Общее решение $\bar F_0$ однородного уравнения (2.5) в зависимости от корней характеристического уравнения [1, 4]

$$\mu^4 - 2p\mu^2 + q = 0 \tag{2.7}$$

будет следующее:

1) корни уравнения (2.7) вещественные и неравные ($\pm\mu_1$, $\pm\mu_2$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$)

$$\bar F_0 = Ae^{-\eta_1 x_1} + Be^{\eta_1 x_1} + Ce^{-\eta_2 x_1} + De^{\eta_2 x_1}$$

2) корни вещественные и попарно равные ($\pm\mu_0$, $\mu_0 > 0$)

$$\bar F_0 = (A + Bx_1)e^{-\eta_0 x_1} + (C + Dx_1)e^{\eta_0 x_1}$$

3) корни комплексные ($\mu \pm ri$, $-\mu \pm ri$, $\mu > 0$, $r > 0$)

$$\bar F_0 = (A\cos\eta_r x_1 + B\sin\eta_r x_1)e^{-\eta_\mu x_1} + (C\cos\eta_r x_1 + D\sin\eta_r x_1)e^{\eta_\mu x_1},$$

где $\eta_i = \mu_i|\eta|$, $i = 0, 1, 2$; $\eta_r = r|\eta|$; $\eta_\mu = \mu|\eta|$.

Величины A, B, C, D, входящие в выражения для $\bar F_0$, определяются из граничных условий (2.6). Используя (2.4), по формулам обращения находим выражения температурных напряжений. В безразмерных величинах их можно записать в виде:

случай первый —

$$\sigma_x = \frac{-s}{\mu_2 - \mu_1}\int_0^\infty P\left[d_2^+ e^{-\eta_1 X} - d_1^+ e^{-\eta_2 X} + (\eta_2 - \eta_1)R_1\right]d\eta$$

$$\sigma_y = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1}\int_0^\infty P\left(d_2^+ e^{-\eta_1 X} - d_1^+ e^{-\eta_2 X} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\eta}R_2\right)d\eta - \varphi(X) \tag{2.8}$$

$$\tau_{xy} = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1}\int_0^\infty P\left[d_2^- \mu_1 e^{-\eta_1 X} - d_1^- \mu_2 e^{-\eta_2 X} + (\mu_1 - \mu_2)R_3\right]d\eta$$

случай второй —

$$\sigma_x = -s\int_0^\infty P\eta\,[(d_0^+ X - l^+)\,e^{-\eta_0 X} + R_1]\,d\eta$$

$$\sigma_y = s\int_0^\infty \frac{P}{\eta}\,\{[d_0^+(\eta_0^2 X - 2\eta_0) - l^+\eta_0^2]\,e^{-\eta_0 X} + R_2\}\,d\eta - \varphi(X) \qquad (2.9)$$

$$\tau_{xy} = s\int_0^\infty P\,\{[d_0^-(\eta_0 X - 1) + l^-\eta_0^2]\,e^{-\eta_0 X} - R_3\}\,d\eta$$

случай третий —

$$\sigma_x = -s\int_0^\infty P\eta\left[\left(\frac{d_\mu^+}{\eta_r}\sin\eta_r X - l^+\cos\eta_r X\right)e^{-\eta_r X} + R_1\right]d\eta$$

$$\sigma_y = s\int_0^\infty \frac{P}{\eta}\left\{\left[\left(\frac{\eta_\mu^2 - \eta_r^2}{\eta_r}\,d_\mu^+ - 2\eta_r\eta_\mu l^+\right)\sin\eta_r X + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (\eta_r^2 l^+ - \eta_\mu^2 l^+ - 2\eta_\mu d_\mu^+)\cos\eta_r X\right]e^{-\eta_\mu X} + R_2\right\}d\eta - \varphi(X) \qquad (2.10)$$

$$\tau_{xy} = s\int_0^\infty P\left\{\left[\left(\frac{\eta_\mu}{\eta_r}\,d_\mu^- + \eta_r l^-\right)\sin\eta_r X + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (\eta_\mu l^- - d_\mu^-)\cos\eta_r X\right]e^{-\eta_\mu X} - R_3\right\}d\eta$$

Здесь введены обозначения:

$$\sigma_j = \frac{\sigma_{jj}}{\alpha_{tx}^* t_0}\ (j = x, y), \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\alpha_{tx}^* t_0}, \quad P = \frac{\sin\eta H}{[(G_+ + \mathrm{Bi}_1)^2 + G_-^2](D_+^2 + D_-^2)}$$

$$s = \frac{2[\mathrm{Bi}_0(\sqrt{\mathrm{Bi}} + \mathrm{Bi}_1) - \mathrm{Bi}_1\theta(\sqrt{\mathrm{Bi}} + \mathrm{Bi}_0)]}{\pi(\sqrt{\mathrm{Bi}} + \mathrm{Bi}_1)[1 + (\mathrm{Bi}_0 - \mathrm{Bi}_1)L]}, \qquad \theta = \frac{t_1}{t_0}$$

$$d_i^\pm = m_i^\pm\cos\eta Y \pm m_i^\mp\sin\eta Y, \quad m_i^\pm = G_- P_\mp \pm (G_+ - \eta_i)P_\pm$$

$$(i = 0, 1, 2, \mu)$$

$$P_\pm = D_\pm[(\eta^2 - \varepsilon\xi)(G_+ + \mathrm{Bi}_1) - 2\varepsilon\eta\xi\,\mathrm{Pe}] \mp D_\mp[(\eta^2 - \varepsilon\xi)G_- +$$

$$+ 2\varepsilon\eta\,\mathrm{Pe}(G_+ + \mathrm{Bi}_1)]$$

$$D_+ = \xi^2 - 4\eta^2\,\mathrm{Pe} - 2p\eta^2\xi + q\eta^4, \quad D_- = 4\eta\,\mathrm{Pe}(\xi - p\eta^2)$$

$$\xi = k_y \eta^2 + \mathrm{Bi}, \quad G_\pm^2 = (\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2 \mathrm{Pe}^2} \pm \xi)/2, \quad \mathrm{Pe} = \omega\delta$$

$$R_n = Q_n e^{-G_+ X} \quad (n = 1, 2, 3), \quad Q_1 = P_+ \cos\beta - P_- \sin\beta$$

$$Q_2 = (\xi P_+ + 2\eta \,\mathrm{Pe}\, P_-)\cos\beta + (2\eta\,\mathrm{Pe}\, P_+ - G_+ P_-)\sin\beta$$

$$Q_3 = (G_+ P_- - G_- P_+)\cos\beta + (G_- P_- + G_+ P_+)\sin\beta, \ \beta = G_- X + \eta Y$$

$$\varphi(X) = \frac{\theta\varepsilon \mathrm{Bi}_1}{\sqrt{\mathrm{Bi}} + \mathrm{Bi}_1} e^{-\sqrt{\mathrm{Bi}}\, X}, \quad X = \frac{x_1}{\delta}, \quad Y = \frac{y_1}{\delta}$$

$$\mathrm{Bi}_k = h_k \delta \ (k = 0, 1), \quad \mathrm{Bi} = \varkappa^2 \delta^2, \quad l^\pm = P_\pm \cos\eta Y \mp P_\mp \sin\eta Y$$

$$L = \frac{2}{\pi H} \int_0^\infty \frac{(G_+ + \mathrm{Bi}_1)\sin^2\eta H}{\eta^2[(G_+ + \mathrm{Bi}_1)^2 + G_-^2]} d\eta, \quad H = \frac{h}{\delta}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha_y^t}{\alpha_x^t}$$

§ 3. *Исследование температурных напряжений*

В качестве примера рассмотрим пластинку, изготовленную из стеклотекстолита КАСТ-В. Вычисленные в работе [5] для такой пластинки корни уравнения (2.7) — вещественные и неравные: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0{,}83$. В этом случае температурные напряжения в пластинке определяются выражениями (2.8), которые при $X = 0$; $Y = 0$ соответственно принимают вид:

$$\sigma_y = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^\infty P\left(d_2^+ - d_1^+ + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\eta} G_2\right) d\eta - \frac{\theta\varepsilon \mathrm{Bi}_1}{\sqrt{\mathrm{Bi}} + \mathrm{Bi}_1} \tag{3.1}$$

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

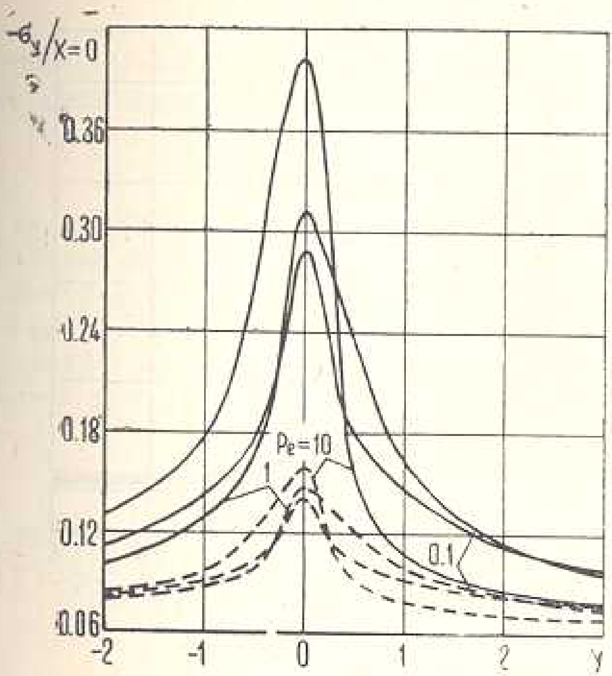
$$\sigma_x = \frac{-s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^\infty P[m_2^+ e^{-\eta_1 X} - m_1^+ e^{-\eta_2 X} + (\eta_2 - \eta_1) L_1 e^{-G_+ X}] d\eta$$

$$\sigma_y = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^\infty P[m_2^+ e^{-\eta_1 X} - m_1^+ e^{-\eta_2 X} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\eta} L_2 e^{-G_+ X}] d\eta - \varphi(X)$$

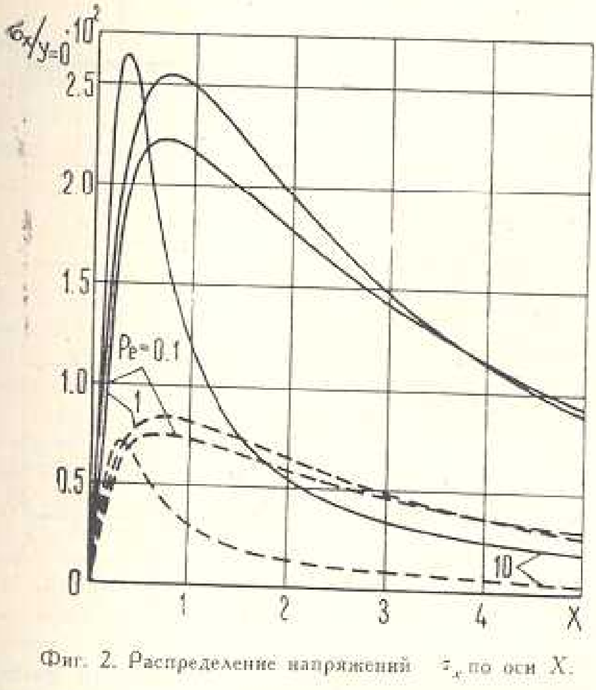
$$\tau_{xy} = \frac{s}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^\infty P[m_2^- \mu_1 e^{-\eta_1 X} - m_1^- \mu_2 e^{-\eta_2 X} + (\mu_1 - \mu_2) L_3 e^{-G_+ X}] d\eta \tag{3.2}$$

где $G_2 = Q_2|_{\beta = \eta Y}$; $L_n = Q_n|_{\beta = G_- X}$ $(n = 1, 2, 3)$.

По формулам (3.1), (3.2) на ЭВМ проведены расчеты распределения температурных напряжений вдоль координатных осей пластинки в зависимости от различных значений скорости движения области нагрева и теплоотдачи с части торцевой поверхности, подвергаемой нагреву, которые представлены в виде графиков на фиг. 1—4. При этом принято, что

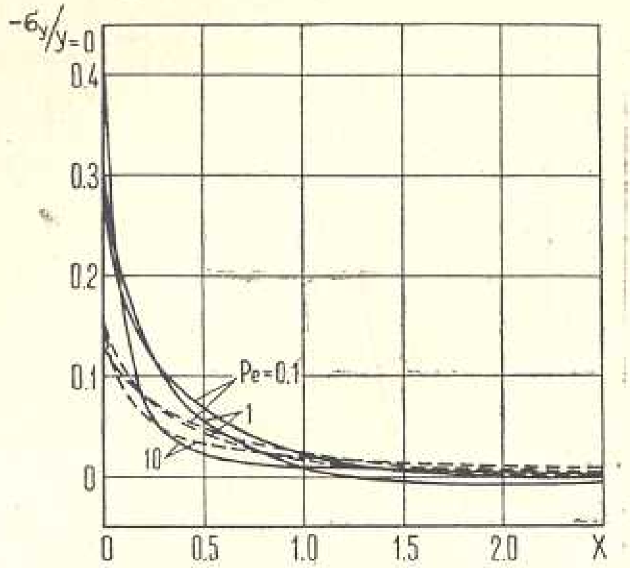


Фиг. 1. Распределение напряжений σ_y по оси Y.

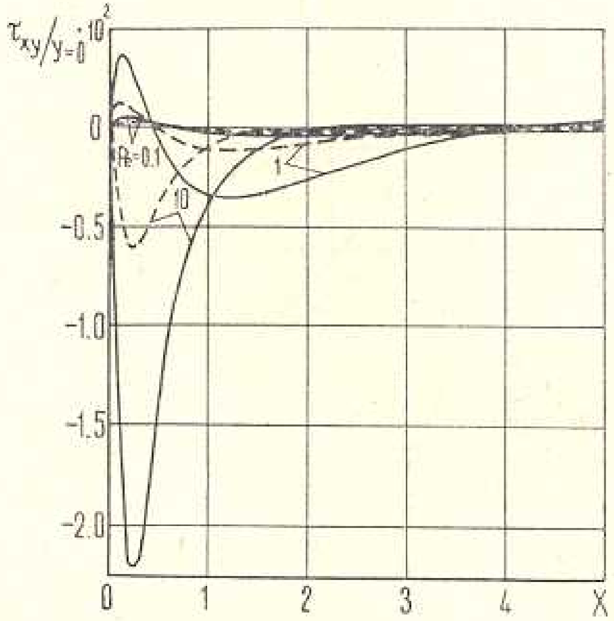


Фиг. 2. Распределение напряжений σ_x по оси X.

$H = 0{,}2$; $\theta = 0{,}1$; $\mathrm{Bi} = 1$; $\mathrm{Bi}_1 = 1$. На этих фигурах сплошной линией показаны напряжения, вычисленные при $\mathrm{Bi}_n = 5$ (реальный случай), а штриховой — при $\mathrm{Bi}_n = 1$.



Фиг. 3. Распределение напряжений σ_y по оси X.



Фиг. 4. Распределение напряжений τ_{xy} по оси X.

Из графиков следует, что с увеличением скорости движения области нагрева максимальные значения напряжений, соответствующих реальному случаю, увеличиваются; учет реальной теплоотдачи с части торцевой поверхности, подвергаемой нагреву, приводит к увеличению напряжений.

ՅՈՒ. Մ. ԿՈԼՅԱՆՈ, Վ. Ի. ՊՐԻՅՄԱԿ

ՀԻՄՔԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱՅՈՎ ՇԱՐԺՎՈՂ ՏԱՔԱՑՄԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹՈՎ ՏԱՔԱՑՎՈՂ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼՈՒՄ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Որոշվել են քվազիստացիոնար ջերմային դաշտը և նրանով պայմանավորված լարումները կիսաանվերջ օրթոտրոպ սալում, որը տաքացվում է հիմքային մակերևույթի վրա բարակ գոտիով հաստատուն արագությամբ շարժվող ջերմային աղբյուրով։ Ուսումնասիրվել է տաքացման տիրույթի շարժման արագության և հիմքային մակերևույթից ջերմատվության կտոր առ կտոր հաստատուն գործակցի մեծության ազդեցությունը սալում լարումների բաշխման վրա։

THE TEMPERATURE STRESSES IN A SEMI-INFINITE ORTHOTROPICAL PLATE HEATED BY MOVING ALONG END FACE HEATING AREA

Yu. M. KOLYANO, V. I. PRIYMAK

S u m m a r y

Quasi-stationary temperature field and stress in an orthotropical semi-infinite plate heated by convectional heat exchange caused by moving along end face heating area is determined. Stress dependence on motion speed of heating area and variable convective heat exchange is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К.: Наукова думка, 1972, 308 с.
2. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовых В. И., Лобзень В. Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. К.: Наукова думка, 1977, 158 с.
3. *Грицько Е. Г.* Температурные поля и напряжения в ортотропной полубесконечной пластинке при кусочно-постоянном коэффициенте теплоотдачи с торцевой поверхности. В кн.: Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. К.: Наукова думка, 1978, с. 173—178.
4. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1976, 536 с.
5. *Амбарцумян С. А., Дургарьян С. М.* Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки.— Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 3, с. 120—127.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР
Львовский ордена Ленина государственный
университет им. И. Франко

Поступила в редакцию
16. I. 1981