

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛОСКИХ
ЗАДАЧ КОНТАКТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
СМАЗКИ ПРИ РЕЖИМАХ ТЯЖЕЛОГО НАГРУЖЕНИЯ.
ЧАСТЬ I. ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

КУДИШ И. И.

Основы гидродинамической теории смазки были заложены в работах Н. П. Петрова, О. Рейнольдса и других [1]. Дальнейший успех развития теории смазки связан с направлениями, представленными в [2—4]. В последнее время появился новый теоретический подход к изучению задач контактно-гидродинамической теории смазки, основанный на применении регулярных и сингулярных асимптотических разложений [5, 6]. Первыми в этом направлении являются работы [7, 8], методы которых были затем развиты в [9—13].

Настоящая работа посвящена изложению асимптотического метода решения плоских контактно-гидродинамических задач для шероховатых тел и неньютоновской смазки в случае тяжело нагруженного контакта. Для режимов масляного голодания и обильной смазки выведены уравнения, определяющие главные члены асимптотик давления и зазора в зонах входа и выхода, а вне этих зон получено приближенное аналитическое решение. В каждом из упомянутых случаев для толщины слоя смазки и силы трения в контакте получены асимптотические формулы, которые могут быть использованы при обработке экспериментальных данных для оценки применимости той или иной реологической модели смазки.

1. *Постановка задачи.* Сформулируем основные допущения. Будем считать, что толщина слоя смазки существенно меньше размера области контакта, которая в свою очередь существенно меньше радиусов кривизны контактирующих тел. Предположим, кроме того, что силы вязкого трения значительно превосходят силы инерции, а тепловыделение в слое смазки определяется преимущественно вязким сдвигом жидкости, причем поток тепла направлен по нормали к контактирующим телам [14]. Деформацию слоя микронеровностей будем считать степенной функцией давления $k p^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ [15], а коэффициенты вязкости μ и теплопроводности χ — зависящими от давления p и температуры T жидкости в данной точке.

Введем систему координат, как это показано на фиг. 1. Тогда реологическое уравнение, связывающее касательное напряжение τ_{xz} с градиентом скорости $\partial u / \partial z$, возьмем в виде [16]:

$$\tau_{xz} = \Phi \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \text{ или } \mu \frac{\partial u}{\partial z} = F(\tau_{xz}) \quad (1.1)$$

Здесь Φ и F — произвольные монотонно возрастающие гладкие нечетные взаимно обратные функции, $\Phi(0) = F(0) = 0$.

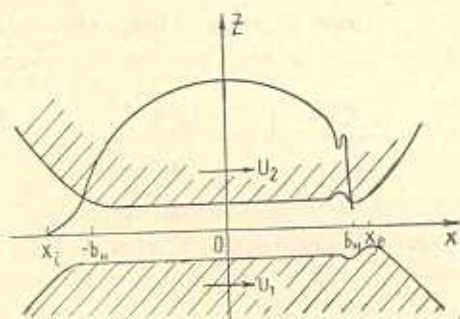
При указанных допущениях и допущениях, принимаемых в теории Герца, плоская задача об установившемся течении с тепловыделением вязкой несжимаемой неньютоновской жидкости в узком деформируемом щелеватом зазоре между двумя круговыми цилиндрами сводится к уравнениям [10—12, 14]

$$\frac{d}{dx} [W(p, h) - h] = 0 \quad (1.2)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\mu(p, T)} F \left(f + H_0 s \frac{dp}{dx} \right) ds = sl$$

$$W(p, h) = \frac{sl}{2} h -$$

$$- \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z \frac{1}{\mu(p, T)} F \left(f + H_0 s \frac{dp}{dx} \right) ds \quad (1.3)$$



Фиг. 1. Общий вид распределения давления и зазора в области контакта между упругими телами при наличии смазки.

$$H_0(h-1) = \lambda p^2 + x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1.4)$$

$$p(a) = p(c) = \frac{dp}{dx}(c) = 0, \quad \int_a^c p(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \frac{\alpha H_0}{\mu(p, T)} \left(f + H_0 z \frac{dp}{dx} \right) F \left(f + H_0 z \frac{dp}{dx} \right) \quad (1.6)$$

$$T \left(x, -\frac{h}{2} \right) = T_{w_1}(x), \quad T \left(x, \frac{h}{2} \right) = T_{w_2}(x) \quad (1.7)$$

записанным в безразмерных переменных

$$x' = \frac{x}{b_n}, \quad z' = \frac{z}{h_e}, \quad \alpha = \frac{x_i}{b_n}, \quad c = \frac{x_e}{b_n}, \quad p' = \frac{p}{p_u}, \quad h' = \frac{h}{h_e}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (1.8)$$

$$f' = f \frac{\pi R'}{2P}, \quad F' = F \frac{2h_e}{\mu_0(u_1 + u_2)}, \quad T = \frac{T}{T_0}, \quad T_{w_i} = \frac{T_{w_i}}{T_0}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

Данные безразмерные переменные отвечают случаю тяжело нагруженного

контакта. Здесь b_n и p_n — соответственно полуширина и максимальное давление в сухом герцевском контакте гладких упругих тел; h_e — толщина слоя смазки в точке выхода из области контакта $x = x_e$; T_0 — температура смазки в точке входа в область контакта $x = x_i$; μ_0 и χ_0 — значения соответственно μ и χ при $p = 0$ и $T = T_0$; R' — приведенный радиус контактирующих тел; P — сила на единицу длины, приложенная к телам; u_i , T_{w_i} — соответственно проекции на ось x скоростей точек поверхностей температур поверхности контактирующих тел, $i = 1, 2$.

В уравнениях (1.2)—(1.7): $h(x)$ — функция зазора между телами; $f(x)$ — функция касательного напряжения трения скольжения (для удобства записи штрихи у безразмерных величин в (1.2)—(1.7) опущены). Кроме того, в этих уравнениях введены обозначения

$$H_0 = \frac{h_e R'}{b_n^2}, \quad sl = 2 \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}, \quad \lambda = \frac{k R' p_n^2}{b_n^2}, \quad \alpha = \frac{(u_1 + u_2) P}{\pi \chi_0 T_0} \left(\frac{b_n}{R'} \right)^2 \quad (1.9)$$

Систему уравнений (1.2)—(1.7) можно записать в виде, явно разрешенном относительно $p(x)$ [12, 17]

$$p(x) = \sqrt{(x-a)(c-x)} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_a^c \frac{dM(p, h)}{dt} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(c-t)(t-x)}} \right\} \quad (1.10)$$

$$M(p, h) = H_0 W(p, h) - \lambda p^2 \quad (1.11)$$

$$\int_a^c \frac{dM(p, h)}{dt} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(c-t)}} = \pi(a+c) \quad (1.12)$$

$$\int_a^c \frac{dM(p, h)}{dt} \frac{t dt}{\sqrt{(t-a)(c-t)}} = \pi \left[\left(\frac{c-a}{2} \right)^2 + \frac{(c+a)^2}{2} - 1 \right]$$

Уравнения (1.10)—(1.12) совместно с (1.2) (второе уравнение), (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7) определяют эквивалентную (1.2)—(1.7) систему уравнений при условии выполнения равенства [17].

$$\frac{1}{\pi} \int_a^c \frac{M(p, h) dt}{\sqrt{(t-a)(c-t)}} + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(t) \ln \frac{1}{c-t} dt + c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{c-a}{2} \right)^2 - \left(\frac{c+a}{2} \right)^2 = \ln \frac{4}{c-a} \quad (1.13)$$

Таким образом, при заданных функциях F , μ , χ , T_{w_i} и постоянных a , sl , λ , α , k задача свелась к определению функций p , h , f , T и постоянных H_0 и c из решения одной из систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (1.2)—(1.7) или (1.10)—(1.12), (1.2) (второе урав-

нение), (1.3), (1.4), (1.6), (1.7). После решения указанных систем уравнений могут быть вычислены силы трения скольжения F и качения F_R по формулам

$$F_* = \frac{2}{\pi} \frac{b_n}{R'} P \int_a^c f(x) dx, \quad F_R = \frac{1}{\pi} \frac{b_n}{R'} P H_0 \int_a^c h(x) \frac{dp}{dx} dx \quad (1.14)$$

2. *Метод решения задачи для случая тяжело нагруженного контакта.* На практике наиболее часто реализуются режимы тяжело нагруженного контакта. Тяжело нагруженным будем называть контакт, в котором при наличии масляной пленки давление во всей области контакта, за исключением малых зон входа и выхода, близко к герцевскому. В зонах входа и выхода, расположенных вблизи концов области контакта, характер распределения давления и зазора и их величина определяются совокупным влиянием взаимодействия микронеровностей, упругостью тел в целом, а также вязким течением смазки. Все сказанное приводит к необходимости поиска решения задачи в различной форме в различных точках области контакта. К решению подобных задач, при наличии в них малого параметра, хорошо приспособлен метод сращиваемых асимптотических разложений [5, 6].

Ниже одновременно исследуются системы уравнений (1.2)—(1.7) и (1.10)—(1.12), (1.2) (второе уравнение), (1.3), (1.4), (1.6), (1.7) для режимов обильной и недостаточной смазки.

Предположим, что в уравнениях задачи имеется малый положительный параметр ω , зависящий от исходных параметров задачи и определяющий условия тяжелого нагружения. Малость параметра ω может быть связана с высокой скоростью роста вязкости жидкости при увеличении давления или же с большими нагрузками на контакт, малыми линейными скоростями движения и т. д. Ниже будут даны конкретные определения параметра ω .

Будем считать, что контакт является тяжело нагруженным, если при $\omega \ll 1$ обеспечивается выполнение неравенства

$$H_0(h-1) - \lambda p^s \ll 1 \text{ при } x-a \gg \varepsilon_q, \quad c-x \gg \varepsilon_g \quad (2.1)$$

Здесь $\varepsilon_q = \varepsilon_q(\omega) \ll 1$ и $\varepsilon_g = \varepsilon_g(\omega) \ll 1$ — характерные размеры зон входа и выхода из области контакта, являющихся пограничными [5, 6] в окрестностях точек $x = a$ и $x = c$.

Из уравнения (1.4) с помощью неравенства (2.1) при $\omega \ll 1$ во внешней зоне ($x-a \gg \varepsilon_q$ и $c-x \gg \varepsilon_g$) получим уравнения

$$x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p_0^0(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt = 0, \quad \int_a^c p_0^0(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (2.2)$$

решением которых является [17]

$$p_0^0(x) = \sqrt{(x-a)(c-x)} + \frac{1 + 2ac + (c-a)^2/4 - (a+c)x}{2\sqrt{(x-a)(c-x)}} \quad (2.3)$$

Полученная функция давления $p_0^0(x)$ совпадает с давлением под подошвой параболического штампа с острыми кромками в точках $x=a$ и $x=c$. Отметим, что при $x-a \gg \varepsilon_q$, $c-x \gg \varepsilon_g$ и условиях $a+1 \ll 1$, $c-1 \ll 1$, которые, как станет ясно из дальнейшего (см. (2.4), (2.11)), всегда имеют место, функция $p_0^0(x) = \sqrt{1-x^2} + o(1)$.

Предположим, что постоянные a , sl , λ и т. д., входящие в уравнения задачи, являются функциями малого параметра ω и удовлетворяют условиям

$$a = -1 + \alpha_1 \varepsilon_q, \quad \alpha_1 < 0, \quad \alpha_1 \sim 1; \quad \lambda = \lambda_0 \varepsilon_q^{(3-a)/2}, \quad \lambda_0 > 0, \quad \lambda_0 \sim 1$$

$$|sl| \ll 1 \text{ при } \omega \ll 1 \quad (2.4)$$

Изложим метод исследования на примере некоторой абстрактной задачи, частным случаем которой является поставленная выше плоская контактно-гидродинамическая задача. Рассмотрим две системы уравнений

$$\frac{dW(p, h)}{dx} = \frac{dh}{dx} \quad (2.5)$$

(1.4), (1.5) и (1.10)–(1.12), (1.4). Здесь функция $W(p, h)$ считается заданной тем или иным способом в зависимости от значений p и h .

Отметим, что при $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow c$, так что $r = (x-a)/\varepsilon_q \sim 1$ при $\varepsilon_q \rightarrow 0$ или $s = (x-c)/\varepsilon_g \sim 1$ при $\varepsilon_g \rightarrow 0$ (r и s — локальные переменные в зонах входа и выхода), асимптотиками давления $p_0^0(x)$ из (2.3) соответственно являются

$$p_0^0(x) = \varepsilon_q^{1/2} \left[\sqrt{2r} + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2r}} \right] + \dots, \quad r \sim 1 \quad (2.6)$$

$$p_0^0(x) = \varepsilon_g^{1/2} \left[\sqrt{-2s} - \frac{\beta_1}{\sqrt{-2s}} \right] + \dots, \quad s \sim 1 \quad (2.7)$$

Смысл постоянной β_1 станет ясен из (2.11). В силу того, что асимптотики давления $p(x)$ в зонах входа и выхода должны быть сращены [5, 6] с асимптотиками $p_0^0(x)$ из (2.6), (2.7), получим, что в зоне входа $p(x)$ имеет порядок $\varepsilon_q^{1/2}$, а в зоне выхода — $\varepsilon_g^{1/2}$.

Поэтому решение систем уравнений (2.5), (1.4), (1.5) и (1.10)–(1.12), (1.4) при $\omega \ll 1$ будем искать в виде [12]

$$p(x) = \varepsilon_q^{1/2} q(r) + o(\varepsilon_q^{1/2}); \quad q(r) \sim 1, \quad r \sim 1 \quad (2.8)$$

$$p(x) = p_0(x) + o(1); \quad x-a \gg \varepsilon_q, \quad c-x \gg \varepsilon_g \quad (2.9)$$

$$p(x) = \varepsilon_g^{1/2} g(s) + o(\varepsilon_g^{1/2}); \quad g(s) \sim 1, \quad s \sim 1 \quad (2.10)$$

$$H_0 = H_{00}(w) + o(H_{00}), H_{00} \ll 1; c = 1 + \varepsilon_g \beta_1 + o(\varepsilon_g); \beta_1 \sim 1 \quad (2.11)$$

Здесь $p_0(x)$ определяется из решения контактной задачи для шероховатых тел с заранее известной площадкой контакта $[a, c]$. Уравнениями этой задачи являются: уравнение (1.4) при $H_0(h-1) = \lambda p_0^*(c)$ и четвертое равенство из (1.5). Решение этой задачи при λ из (2.4) также может быть построено методами сращиваемых асимптотических разложений. Заметим, что во внешней области решение данной задачи должно сращиваться с асимптотиками $p_0^0(x)$ из (2.6) и (2.7), так как $p_0^0(x)$ является вырожденным решением при $\lambda = 0$. Поэтому решение данной задачи при $\lambda \ll 1$ будем искать в виде

$$p_0(x) = \varepsilon_q^{1/2} q_0(r) + o(\varepsilon_q^{1/2}); q_0(r) \sim 1, r \sim 1 \quad (2.12)$$

$$p_0(x) = \varepsilon_g^{1/2} g_0(s) + o(\varepsilon_g^{1/2}); g_0(s) \sim 1, s \sim 1 \quad (2.13)$$

а в герцевской области соответственно главным членом решения является функция $p_0^0(x)$ из (2.3). Теперь из условия соизмеримости в зонах входа и выхода смятия микронеровностей и перемещений упругих гладких тел, для определения функций $g_0(s)$ и $q_0(r)$ при $0 < \alpha < 1$, исходя из (1.4) и четвертого уравнения (1.5) при $H_0(h-1) = \lambda p_0^*(c)$, получим нелинейные интегро-дифференциальные уравнения [17]

$$q_0(r) = \sqrt{2r} + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2r}} + \frac{\lambda_0 \alpha}{2\pi \sqrt{2r}} \int_0^\infty \frac{q_0^{\alpha-1}(t) q_0'(t) \sqrt{2t} dt}{t-r} \quad (2.14)$$

$$g_0(s) = \sqrt{-2s} - \frac{\beta_1}{\sqrt{-2s}} + \frac{\lambda_0 \alpha}{2\pi \sqrt{-2s}} \int_{-\infty}^0 \frac{g_0^{\alpha-1}(t) g_0'(t) \sqrt{-2t} dt}{t-s}$$

и, кроме того, соотношение $\varepsilon_g \sim \varepsilon_q$. Поэтому примем

$$\varepsilon_g = \varepsilon_q \quad (2.15)$$

Следует отметить, что согласно [17], данное представление (2.14) решения задачи $p_0(x)$ в погранслоях справедливо, если для $p_0(x)$ выполнено условие (1.13) при $M = \lambda[p_0^*(c) - p_0^*(x)]$. Здесь и далее под $p_0(x)$ будет пониматься точное (в противоположность асимптотическому) решение уравнения (1.4) при $H_0(h-1) = \lambda p_0^*(c)$ и четвертого уравнения в (1.5).

Преобразуем уравнения (1.4), (1.5) (второе равенство) и (1.13). Для этого воспользуемся указанными формулами дважды: при $H_0 > 0$ и $H_0(h-1) = \lambda p_0^*(c)$, $M = \lambda[p_0^*(c) - p_0^*(x)]$, причем во втором случае в качестве $p(x)$ следует подставить $p_0(x)$. Будем иметь

$$H_0(h-1) = \lambda(p^* - p_0^*) + \frac{2}{\pi} \int_a^c [p(t) - p_0(t)] \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt + \lambda p_0^*(c) \quad (2.16)$$

$$\int_a^c [p(t) - p_0(t)] dt = 0$$

$$\int_a^c \frac{[M(p, h) + \lambda p_0^2] dt}{V(t-a)(c-t)} + 2 \int_a^c [p(t) - p_0(t)] \ln \frac{1}{c-t} dt = \pi \lambda p_0^2(c) \quad (2.17)$$

Предположим, что $W(p, h) = 0$ при $dp/dx = 0$. Тогда, проинтегрировав (2.5) по x от x до c с учетом граничных условий (1.5) и используя (1.11) и (2.16), уравнение Рейнольдса приведем к виду

$$M(p, h) + \lambda p_0^2 = \frac{2}{\pi} \int_a^c [p(t) - p_0(t)] \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt + \lambda p_0^2(c) \quad (2.18)$$

Из (2.17) и (2.18) следует [5, 6]

$$p(x) - p_0(x) = O(H_0 W(p, h)); \quad x-a \gg \varepsilon_q, \quad c-x \gg \varepsilon_g \quad (2.19)$$

Для дальнейшего анализа необходимо сделать следующие предположения о свойствах функции $W(p, h)$:

$$H_0 W(p, h) \ll \varepsilon_q^{3/2}; \quad x-a \gg \varepsilon_q, \quad c-x \gg \varepsilon_g \quad (2.20)$$

$$H_0 \int_a^c \frac{W(p, h) dt}{V(t-a)(c-t)} \ll \varepsilon_q^{3/2} \quad \text{при } \omega \ll 1 \quad (2.21)$$

Справедливость данных предположений на полученном решении будет проверена лишь после окончания исследования задачи.

Из (2.19) и (2.20) получим во внешней области оценку

$$p(x) - p_0(x) \ll \varepsilon_q^{3/2}; \quad x-a \gg \varepsilon_q, \quad c-x \gg \varepsilon_g \quad (2.22)$$

Интегралы, входящие в (2.17), разобьем на сумму двух интегралов по зонам входа и выхода и интеграла по внешней области. Тогда с помощью оценок (2.21), (2.22), а также представлений (2.6)–(2.8), (2.10) и (2.11), равенства (2.17) в главном могут быть приведены к виду

$$\varepsilon_q^{3/2} \int_0^{\infty} [q(t) - q_0(t)] dt + \varepsilon_g^{3/2} \int_{-\infty}^0 [g(t) - g_0(t)] dt + \dots = 0 \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_q^{3/2} \ln \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [q(t) - q_0(t)] dt + \varepsilon_g^{3/2} \int_{-\infty}^0 [g(t) - g_0(t)] \ln \frac{1}{|t|} dt + \\ & + \varepsilon_g^{3/2} \ln \frac{1}{\varepsilon_g} \int_{-\infty}^0 [g(t) - g_0(t)] dt + \dots = \varepsilon_g^{3/2} \frac{\pi}{2} \lambda_0 g_0^2(0) \end{aligned} \quad (2.24)$$

где функции q_0 и g_0 определяются из (2.14).

Временно предположив, что

$$\varepsilon_q^{3/2} \ll \varepsilon_g^{3/2} \ln \frac{1}{\varepsilon_g} \text{ при } \omega \ll 1 \quad (2.25)$$

из (2.24) получим

$$\int_{-\infty}^0 [g(t) - g_0(t)] dt = 0 \quad (2.26)$$

С помощью (2.23) и (2.24) найдем

$$\int_0^{\infty} [q(t) - q_0(t)] dt = 0 \quad (2.27)$$

Возвращаясь к равенству (2.24), с помощью (2.26) и (2.27) получим

$$\int_{-\infty}^0 [g(t) - g_0(t)] \ln \frac{1}{|t|} dt = \frac{\pi}{2} \lambda_0 g_0^*(0) \quad (2.28)$$

Перейдем к получению асимптотик функции зазора h в зонах входа и выхода. Разобьем интеграл, входящий в (2.16), на сумму двух интегралов по зонам входа и выхода и по герцевской области. В полученных таким образом интегралах по зонам входа и выхода перейдем к переменным r и s и затем подставим в них выражения для $\rho(x)$ из (2.8) и (2.10), а в качестве асимптотик $\rho_0(x)$ функции $\varepsilon_q^{1/2} q_0(r)$ и $\varepsilon_g^{1/2} g_0(s)$, где q_0, g_0 и ε_g удовлетворяют (2.14) и (2.15). Тогда, используя оценку (2.22) и соотношения (2.26)–(2.28), получим уравнения для определения функций зазора в зоне входа $h_q(r)$ и в зоне выхода $h_g(s)$ в виде

$$\begin{aligned} H_0[h_q(r) - 1] &= \varepsilon_q^{3/2} \left\{ \lambda_0 [q^*(r) - q_0^*(r)] + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [q(t) - q_0(t)] \ln \frac{1}{|r-t|} dt \right\} + \dots \\ H_0[h_g(s) - 1] &= \varepsilon_g^{3/2} \left\{ \lambda_0 [g^*(s) - g_0^*(s)] + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 [g(t) - g_0(t)] \ln \frac{1}{|t-s|} dt \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

Предположим, что в зонах входа и выхода имеет место асимптотическое равенство

$$W(p, h) = \omega^{2\gamma_1} \varepsilon_q^{2\gamma_1} |sl|^{\gamma_1} H_0^{\gamma_1} W_0(t) + \dots, W_0(t) \sim 1, t \sim 1 \quad (2.30)$$

В (2.30) величины p , h и t в зоне входа заменяются на $\varepsilon_q^{1/2} q(r)$, $h_q(r)$ и r , а в зоне выхода соответственно на $\varepsilon_s^{1/2} g(s)$, $h_g(s)$ и s ; при этом $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — заданные постоянные, зависящие от реологии жидкости.

Выведем теперь асимптотически справедливые уравнения в зонах входа и выхода. Перейдем в уравнениях (1.10), (2.5) и граничных условиях (1.5) к переменной r . Тогда в силу соизмеримости в зоне входа вклад в решение задачи членов соответствующих уравнений, определяемых смятием микронеровностей, смазкой и упругостью тел в целом, с помощью (2.6), (2.8), (2.11), (2.12), (2.29) и (2.30) получим асимптотическую оценку [5, 6, 9]

$$H_0 = A (\varepsilon_q^{3/2 - \gamma_1} \omega^{2\gamma_1} |sl|^{-\gamma_1})^{1/(\gamma_1 + 1)}, A = A(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \lambda_0, \alpha, \dots) \sim 1 \quad (2.31)$$

а также уравнения для $q(r)$ в зоне входа

$$\frac{d}{dr} [M_0(q) + \lambda_0 q_0^2] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q(t) - q_0(t)}{t - r} dt, q(0) = 0, q(r) \rightarrow q_0(r) \quad (2.32)$$

$$q(r) = \sqrt{2r} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dM_0(q)}{dt} \frac{dt}{\sqrt{2t}(t-r)} \right\} \quad (2.33)$$

$$M_0(p) = A^{-2} W_0(t) - \lambda_0 p^2, \quad \bar{x} = \gamma_1 + 1 \quad (2.34)$$

Здесь в зоне входа символы p и t следует заменить на q и r , а в зоне выхода — соответственно на g и s .

Проведем аналогичные вычисления в зоне выхода. При этом легко убедиться в справедливости соотношения (2.15), из которого, в частности, следует справедливость оценки (2.25). Теперь в зоне выхода можно получить уравнения

$$\frac{d}{ds} [M_0(g) + \lambda_0 g_0^2] = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{g(t) - g_0(t)}{t - s} dt, g(0) = 0, \frac{dg}{ds}(0) = 0 \quad (2.35)$$

$$g(s) \rightarrow g_0(s)$$

$$g(s) = \sqrt{-2s} \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dM_0(g)}{dt} \frac{dt}{\sqrt{-2s}(t-s)} \right\} \quad (2.36)$$

Теперь из (1.11), (1.12), (1.32) получим дополнительные к уравнениям (2.33), (2.34), (2.36) соотношения, служащие для определения постоянных A и β_1 . Представим интегралы, входящие в (1.12), в виде суммы интегралов по зонам входа, выхода и герцевской зоне и оценим каждый из них. Из (1.11), (2.4) и (2.20) следует, что интегралы от подынте-

гальной функции, входящей в (1.12), распространенные по герцевской области, имеют порядок $\varepsilon_q^{(3-\alpha)/2} \ll \varepsilon_q$ при $0 < \alpha < 1$. Аналогичным образом, оценивая с помощью (2.4), (2.30) интегралы в (1.12) по зонам входа и выхода, получим, что они имеют порядок ε_q . Итак, основной вклад в интегралы (1.25) дают зоны входа и выхода. Поэтому с помощью (2.4), (1.11), (2.8), (2.10), (2.11), (2.30), (2.31) и (2.34), исходя из (1.12), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно A^x и β_1 . Решив эту систему, найдем [11, 12]

$$A^x = \left\{ \pi x_1 + \lambda_0 \alpha \int_0^\infty \frac{q^{\alpha-1}(t) q'(t) dt}{\sqrt{2t}} \right\} \int_0^\infty \frac{dW_0(t)}{dt} \frac{dt}{\sqrt{2t}} \quad (2.37)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dM_0(g)}{dt} \frac{dt}{\sqrt{-2t}} \quad (2.38)$$

Из (2.3) и (2.22) следует, что в герцевской области при $\lambda_0 = 0$ имеет место оценка $p(x) - p_0^0(x) \ll \varepsilon_q^{3/2}$, а при $\lambda_0 > 0$ соответственно оценка $p(x) - p_0^0(x) \sim \varepsilon_q^{(3-\alpha)/2} \gg \varepsilon_q^{3/2}$ при $0 < \alpha < 1$, а оценка $H_0(h-1) \ll \varepsilon_q^{3/2}$ выполняется вне зависимости от значения $\lambda_0 \geq 0$.

Заметим, что полученные выше результаты справедливы для режимов недостаточной и обильной смазки. Понятия режимов недостаточной и обильной смазки определяются количеством смазочного материала, принимающего участие в контакте и легко выражаются через геометрические характеристики контакта. Режимом масляного голодания или, иначе говоря, недостаточной смазки, будем называть условия, при которых

$$h(x) - 1 \ll 1, \quad \forall x \in [a, c] \text{ при } \omega \ll 1 \quad (2.39)$$

а режимом обильной смазки соответственно условия, при которых в зонах входа и выхода

$$h(x) - 1 \sim 1; \quad x - a \sim \varepsilon_q, \quad c - x \sim \varepsilon_g \text{ при } \omega \ll 1 \quad (2.40)$$

Тогда из (2.29) следует, что режим масляного голодания (2.39) имеет место при условии

$$\varepsilon_q^{3/2} \ll H_0 \text{ при } \omega \ll 1 \quad (2.41)$$

а режим обильной смазки (2.40) — при условии

$$\varepsilon_q^{3/2} \sim H_0 \text{ при } \omega \ll 1 \quad (2.42)$$

Отсюда с помощью формулы для H_0 (2.31) легко могут быть получены условия, налагаемые на ε_q , при которых реализуются режимы масляного голодания и обильной смазки.

Следует отметить, что в случае задачи для гладких тел ($\lambda_0 = 0$) из (2.14) получим выражения для функций $q_0(r)$ и $g_0(s)$ в виде

$$q_0(r) = \sqrt{2r} + \frac{a_1}{\sqrt{2r}}, \quad g_0(s) = \sqrt{-2s} - \frac{\beta_1}{\sqrt{-2s}}$$

При этом, очевидно, существенно упрощаются уравнения (2.26)–(2.29), (2.32) и (2.35).

Вернемся теперь к предположениям (2.1), (2.20), (2.21) и (2.30), сделанным при выводе асимптотически справедливых уравнений. Сразу отметим, что предположения (2.20) и (2.30) могут быть проверены лишь на конкретно заданной функции $W(p, h)$ (зависящей от реологии жидкости), а (2.21) следует из (2.20) и (2.30). Действительно, в зонах входа и выхода получим $H_0 W(p, h) \sim \varepsilon_q^{3/2}$. Поэтому интегралы от $H_0 W(p, h) \times \times [(x-a)(c-x)]^{-1/2}$, распространенные по зонам входа и выхода, имеют порядок ε_q^2 . В то же время интеграл от этой же функции по герцевской области в силу (2.20) существенно меньше $\varepsilon_q^{3/2}$. Из сказанного следует справедливость (2.21). Кроме того, оценка (2.1) следует из (2.4), (1.11), (2.16), (2.18) и (2.20).

Таким образом, получены две эквивалентные системы (2.32), (2.35), (2.26), (2.27), (2.34) и (2.33), (2.36)–(2.38), (2.34) нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, к которым вместо h следует добавить $h = 1$, когда имеет место (2.41), и функции $h_q(r)$ и $h_g(s)$ из (2.29), когда имеет место (2.42). Основным условием применимости изложенного метода является справедливость допущений (2.20), $\varepsilon_q^{3/2} \ll H_0$, $W_0(r) \sim 1$ при $r \sim 1$ и $W_0(s) \sim 1$ при $s \sim 1$.

Из полученных систем уравнений определяются главные члены асимптотик давления $q(r)$ и $g(s)$ и зазора $h_q(r)$ и $h_g(s)$ в зонах входа и выхода, а также постоянные A и β_1 . Завершив решение задачи, с помощью постоянной A , зависящей от реологии жидкости, постоянных микронеровностей λ_0 и α , постоянной α_1 и т. д. и формулы (2.31) можно вычислить безразмерную толщину слоя смазки H_0 . Для вычисления размерной толщины слоя h_0 достаточно воспользоваться найденной величиной H_0 и первым равенством в (1.9).

3. Метод решения плоской изотермической упруго-гидродинамической задачи для случая тяжело нагруженного контакта. При рассмотрении изотермической задачи теории смазки в уравнениях (1.2)–(1.7) и (1.10)–(1.12), (1.2) (второе уравнение), (1.3), (1.4), (1.6), (1.7) следует положить $T_{W_1}(x) = T_{W_2}(x) = \text{const}$, $\lambda \rightarrow \infty$ и $p(p, T) \equiv p(p)$. В этом случае функция $W(p, h)$ из (1.3) и второе уравнение в (1.2) запишутся следующим образом

$$W(p, h) = \frac{sl}{2} h - \frac{1}{\mu} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z F \left(f + H_0 s \frac{dP}{dx} \right) ds \quad (3.1)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} F\left(f + H_0 s \frac{dp}{dx}\right) ds = \mu \cdot sl \quad (3.2)$$

Введем в рассмотрение функцию $v(x)$ [9—12]

$$v = \frac{H_0 h}{2f} \frac{dP}{dx} \quad (3.3)$$

представляющую собой отношение характерной величины напряжения трения качения к величине напряжения трения скольжения. Классификацию всевозможных режимов смазывания свяжем с порядком функции $v(x)$ в зоне входа, то есть $v \ll 1$, $v \sim 1$ или $v \gg 1$. Исследуем каждый из этих случаев.

А) Рассмотрим условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода $v \ll 1$. Из вида уравнения (3.2) при $v \ll 1$ следует, что функцию следует искать в виде асимптотического разложения по целым степеням

$$f = f_0 + v f_1 + O(v^2) \text{ при } v \ll 1 \quad (3.4)$$

Разложив функцию F в (3.2) по формуле Тейлора в окрестности $f = f_0$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях v , получим уравнения для определения f_0 и f_1

$$f_0 = \Phi\left(\frac{\mu \cdot sl}{h}\right), \quad f_1 = 0 \quad (3.5)$$

Учитывая тождество

$$\frac{d}{d\Phi} F(\Phi(x)) = 1 / \frac{d\Phi(x)}{dx}$$

имеющее место для гладких взаимно обратных функций F и Φ , с помощью (3.3)—(3.5) получим

$$f = \Phi\left(\frac{\mu \cdot sl}{h}\right) + O(v^2) \quad (3.6)$$

$$F\left(f + H_0 s \frac{dP}{dx}\right) = \frac{\mu \cdot sl}{h} + H_0 s \frac{dP}{dx} \left/ \Phi' \left(\frac{\mu \cdot sl}{h} \right) \right. + O(v^2) \quad (3.7)$$

Теперь с помощью (3.1) и (3.7) может быть вычислена функция

$$W(p, h) = \frac{h^2}{12\mu} H_0 \frac{dP}{dx} \left/ \Phi' \left(\frac{\mu \cdot sl}{h} \right) \right. + \dots \quad (3.8)$$

Дальнейший анализ систем уравнений (2.5), (1.4), (1.5), (3.8) и (1.10)—(1.12), (1.4), (3.8) производится с помощью метода, изложенного в § 2. Для получения аналога оценки (2.31) предположим, что в зонах входа и выхода имеет место асимптотическое равенство [12]

$$\Phi\left(\frac{r \cdot sl}{h}\right) = \omega^l |sl|^m H_0^{-n} \Phi_0(t) + \dots, \quad \Phi_0(t) \sim 1, \quad t \sim 1 \quad (3.9)$$

выполняющее функции оценки (2.30). Сразу отметим, что отсюда вытекает следующее равенство:

$$F(H_0 \varepsilon_p^{-1/2} y(t)) = (\omega^{-l} \varepsilon_p^{-1/2} H_0^{n+1})^{1/m} F_0(t) + \dots; \quad F_0(t) \sim 1, \quad y(t) \sim 1 \quad (3.10)$$

Здесь величины p и t в зоне входа заменяются на q и r , а в зоне выхода — соответственно на g и s .

С помощью равенства (3.9) и формулы (2.31) для H_0 получим

$$H_0 = A (\omega^l |sl|^{m-1} \varepsilon_q^2)^{1/(n+2)}, \quad A = A(a_1, l, m, n, \lambda_0, \alpha, \dots) \sim 1 \quad (3.11)$$

а выражения для $W_0(t)$ и \bar{x} из (2.34) преобразуются в

$$W_0(t) = \frac{h^2}{12 \nu_0} \frac{dp}{dt} \text{sign}(sl) / \Phi_0'(t), \quad \bar{x} = n + 2; \quad \nu_0 = \nu(\varepsilon_q^{1/2} p) \quad (3.12)$$

где в зоне входа $(p, t) = (q, r)$, а в зоне выхода $(p, t) = (g, s)$.

В рассматриваемом случае, очевидно, вид систем уравнений (2.32), (2.35), (2.26), (2.27), (2.34) и (2.33), (2.36) — (2.38), (2.34), полученных в § 2, остается неизменным. К ним лишь необходимо добавить выражения для W_0 и \bar{x} из (3.12).

Остановимся теперь на условиях, при которых справедлив изложенный выше анализ. Из (3.3), (3.6), (3.11) и (3.12) следует, что для этого достаточно выполнения условий

$$\mu(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1, \quad \varepsilon_q \ll (\omega^l |sl|^{n+m+1})^{2/(3n+2)}, \quad \omega \ll 1 \quad (3.13)$$

Из соотношений (2.42) и (3.13) следует, что если в зоне входа $\nu \ll 1$, то реализуется лишь режим масляного голодания. Поэтому вместо функции h в (3.12) в зонах входа и выхода достаточно подставить $h = 1$.

Можно показать, что в рассмотренном случае во всей области контакта имеет место оценка $\nu \ll 1$. Кроме того, предположив, что для заданной реологической функции Φ выполнено неравенство $x\Phi'(x) \gg \Phi(x)$ при $x \gg sl^*$, то из (3.8), (3.9) и (3.11) в герцевской области следует цепочка оценок

$$H_0 W(p, h) \sim \frac{H_0^2}{\mu} \Phi'(psl) \ll \frac{sl H_0^2}{\Phi(psl)} \ll \frac{sl H_0^2}{\Phi(sl)} \sim \varepsilon_q^2 \ll \varepsilon_q^{3/2}$$

Последняя оценка доказывает справедливость в герцевской области неравенства (2.20).

* Очевидно, что выполнение неравенства $x\Phi'(x) \gg \Phi(x)$ при $x \gg sl$ является достаточным условием справедливости оценки (2.20).

Теперь с помощью первой формулы (1.14) и (3.6), с учетом выражения для $p_0^0(x)$ из (2.3) и оценок $a + 1 \ll 1$, $c - 1 \ll 1$, для силы трения скольжения F_s найдем

$$F_s = \frac{2}{\pi} \frac{b_H}{R'} P \int_{-1}^1 \Phi[sl \cdot \mu(\sqrt{1-x^2})] dx \quad (3.14)$$

Заметим, что выражение для F_R из (1.14) может быть несколько упрощено с учетом равенства $h = 1 + W(p, h)$, где $W(p, h)$ определяется из (3.8). Предположив, кроме того, что вязкость μ в герцевской области велика, получим, что сила трения качения F_R в этом случае определяется, в основном, лишь зонами входа и выхода.

В) Рассмотрим условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода $v \sim 1$, то есть напряжения трения скольжения и качения соизмеримы. В этом случае в зонах входа и выхода напряжения трения скольжения $f(x)$ будем искать в виде [12]

$$\begin{aligned} f(x) &= H_0 \varepsilon_q^{-1/2} f_q(r) + o(H_0 \varepsilon_q^{-1/2}), \quad f_q(r) \sim 1 \text{ при } r \sim 1 \\ f(x) &= H_0 \varepsilon_q^{-1/2} f_g(s) + o(H_0 \varepsilon_q^{-1/2}), \quad f_g(s) \sim 1 \text{ при } s \sim 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь для краткости уже использовано равенство (2.37).

Отметим, что в (3.15) функция $\varepsilon_q(\omega)$ не является произвольной. Это связано с тем, что рассматриваемый случай, когда в зоне входа $v \sim 1$, является предельным для случая, исследованного в п. А. Поэтому из второй оценки (3.13) в пределе для ε_q получим

$$\varepsilon_q = (\omega^l |sl|^{n+m+1})^{2/(3n+2)} \quad (3.16)$$

Далее из (3.11) и (3.16) в пределе получим

$$H_0 = A (\omega^{3l} |sl|^{3m+1})^{1/(3n+2)}, \quad A = A(\alpha_1, l, m, n, \lambda_0, \alpha, \dots) \sim 1 \quad (3.17)$$

Следует отметить, что постоянная A в (3.17), вообще говоря, отличается от постоянной A в формуле (3.11).

Теперь с помощью формул (3.2), (2.8), (2.10), (3.15)—(3.17), (3.10) в зонах входа и выхода получим уравнения для определения функций $f_q(r)$ и $f_g(s)$

$$\begin{aligned} \int_{-h_q/2}^{h_q/2} F_0 \left(f_q + t \frac{dq}{dr} \right) dt &= A^{-\frac{n+1}{m}} \text{sign}(sl) \cdot \mu \\ \int_{-h_g/2}^{h_g/2} F_0 \left(f_g + t \frac{dg}{ds} \right) dt &= A^{-\frac{n+1}{m}} \text{sign}(sl) \cdot \mu \end{aligned} \quad (3.18)$$

В рассматриваемом случае выражения для W_0 и $\tilde{\chi}$ принимают вид

$$W_0(t) = -\frac{A^{(n+1)/m}}{\mu_0} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z F_0 \left(f + \tau \frac{dp}{dt} \right) d\tau + \frac{sl}{2} (h-1) \quad (3.19)$$

$$\tilde{\chi} = 1, \quad \mu_0 = \mu(\varepsilon_q^{1/2} p)$$

где в зоне входа символы p , h , f и t следует заменить на q , h_q , f_q и r , а в зоне выхода соответственно на g , h_g , f_g и s . Выражение для W_0 из (3.19) отличается от функции W_0 , следующей из (3.1), на постоянную, что, очевидно, не изменяет вида асимптотически справедливых в зонах входа и выхода уравнений (2.32), (2.35), (2.26), (2.27), (2.34) и (2.33), (2.36) — (2.38), (2.34). Для замыкания указанных систем уравнений к ним необходимо добавить выражения для W_0 и $\tilde{\chi}$ из (3.19), причем для вычисления функции W_0 следует сначала решить уравнения (3.18).

Аналогично п. А можно показать, что в герцевской зоне $v \ll 1$ и с помощью (3.8), (3.9), (3.16) и (3.17) проверить справедливость оценки (2.20). В силу этого условием применимости изложенной процедуры, как и в п. А, выступает справедливость оценки $\mu(\varepsilon_q^{1/2}) \sim 1$ из (3.13), где ε_q находится из (3.16).

Если в зоне входа $v \sim 1$, то из соотношений (2.42), (2.43), (3.16) и (3.17) следует, что режим масляного голодания реализуется при условии

$$sl \ll 1, \quad \omega \ll 1 \quad (3.20)$$

и при этом в (3.18) и (3.19) всюду следует подставить $h = h_q = h_g = 1$; а режим обильной смазки реализуется при условии

$$sl \sim 1, \quad \omega \ll 1 \quad (3.21)$$

При этом функции $h_q(r)$ и $h_g(s)$, входящие в (3.18) и (3.19), вычисляются с помощью соотношений (2.29), (3.16), (3.17), если в них вместо H_0 и $\varepsilon_q^{3/2}$ подставить соответственно A и $|sl|$.

Учитывая тот факт, что в герцевской области $v \ll 1$, из (1.14) и (3.6) получим формулу для силы трения скольжения F_s , совпадающую с (3.14). В то же время формула для силы трения качения F_R , очевидно, будет отличаться от аналогичной формулы для случая, когда в зоне входа $v \ll 1$. При этом качественное поведение силы трения F_R в указанных случаях является аналогичным.

С) Рассмотрим условия смазывания, при которых в зонах входа и выхода $v \gg 1$, то есть характерное напряжение трения скольжения существенно меньше напряжения трения качения. Из вида уравнения (3.2) следует, что вне малой, порядка $h/2v$, окрестности точки $z = 0$ $f \ll H_{0s}(dp/dx)$. Поэтому решение уравнения (3.2) будем искать в виде асимптотического ряда по степеням v^{-1}

$$f = f_0 + O(v^{-1}), \quad v \gg 1 \quad (3.22)$$

В результате подстановки (3.22) в (3.2) и приравнивания членов при одинаковых степенях v , найдем

$$f = \frac{\mu \cdot sl}{h} \frac{H_0 h}{2} \frac{dp}{dx} \left| F \left(\frac{H_0 h}{2} \frac{dp}{dx} \right) + O(v^{-1}), v \gg 1 \quad (3.23)$$

Теперь с помощью двучленного разложения по формуле Тейлора функции $F(f + H_0 s (dp/dx))$ в окрестности $H_0 s (dp/dx)$ и формулы (3.23) вычислим интеграл в (3.1). В результате получим выражение для функции $W(p, h)$

$$W(p, h) = -\frac{1}{\mu} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z F \left(H_0 s \frac{dp}{dx} \right) ds + \dots \quad (3.24)$$

Далее, следуя методу § 2, с помощью оценки (3.10) и формулы (3.24), общая формула (2.31) для H_0 примет вид

$$H_0 = A (\omega^l \epsilon_q^{(3m+1)/2})^{1/(n+m+1)}, \quad A = A(\alpha_1, l, m, n, \lambda_0, \alpha, \dots) \sim 1 \quad (3.25)$$

а выражения для $W_0(t)$ и χ преобразуются к виду

$$W_0(t) = -\frac{1}{\mu_0} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z F_0 \left(\tau \frac{dp}{dt} \right) d\tau, \quad \tilde{\chi} = \frac{n+m+1}{m}, \quad \mu_0 = \mu (\epsilon_q^{1/2} p) \quad (3.26)$$

Здесь в зоне входа символы p, h и t заменяются на q, h_q и τ , а в зоне выхода соответственно на g, h_g и s . При этом вид систем уравнений (2.32), (2.35), (2.26), (2.27), (2.34) и (2.33), (2.36)—(2.38), (2.34) остается неизменным, а в качестве W_0 и χ принимаются выражения из (3.26).

Легко видеть, что условия справедливости изложенного анализа вытекают из соотношений (3.26) и условия $v \gg 1$ в зоне входа и имеют вид

$$\mu (\epsilon_q^{1/2}) \sim 1, \quad \epsilon_q \gg (\omega^l |sl|^{n+m+1})^{2/(3n+2)}; \quad \omega \ll 1 \quad (3.27)$$

Из определения режимов масляного голодания (2.42) и обильной смазки (2.43) получим, что режим масляного голодания реализуется при условии

$$(\omega^l |sl|^{n+m+1})^{2/(3n+2)} \ll \epsilon_q \ll \omega^{2l/(3n+2)}, \quad sl \ll 1; \quad \omega \ll 1 \quad (3.28)$$

а режим обильной смазки при условии

$$\epsilon_q = \omega^{2l/(3n+2)} \gg (\omega^l |sl|^{n+m+1})^{2/(3n+2)}, \quad sl \ll 1; \quad \omega \ll 1 \quad (3.29)$$

Отметим, что при режиме масляного голодания (3.28) в зонах входа и выхода в (3.26) всюду следует подставить $h = h_q(r) = h_g(s) = 1$, а при режиме обильной смазки функции $h_q(r)$ и $h_g(s)$, входящие в (3.26), вычисляются с помощью соотношений (2.29), (3.25), если в них вместо H_0 и $\epsilon_q^{3/2}$ подставить соответственно A и 1 .

В рассматриваемом случае в герцевской области функция v может быть много меньше, порядка и много больше единицы. Для каждого из этих случаев с помощью (3.8), (1.3), (3.24), (3.9), (3.10), (3.25), (3.27) и неравенства $x\Phi'(x) \gg \Phi(x)$ при $x \gg sl$ можно показать справедливость в герцевской области оценки (2.20). При этом при $v \ll 1$ в герцевской области для силы трения скольжения F_s имеет место формула (3.14), а при $v \sim 1$ в герцевской области простого аналога формулы (3.14) для F_s получить не удается. При $v \gg 1$ в герцевской области для силы трения скольжения получим формулу (см. формулы (1.14), (3.23))

$$F_s = \frac{1}{\pi} \frac{b_H}{R'} P_{sl} H_0 \int_{-1}^1 \frac{x \mu (\sqrt{1-x^2}) dx}{\sqrt{1-x^2} F(H_0 x / 2 \sqrt{1-x^2})} \quad (3.30)$$

В рассматриваемом случае, как и ранее, при вычислении силы трения качения F_R не удастся добиться значительных упрощений.

Отметим, что проведенный анализ справедлив при условии выполнения оценки

$$\mu(\varepsilon^{1/2}) \sim 1; \quad \omega \ll 1 \quad (3.31)$$

причем ε_q удовлетворяет одному из неравенств (3.28) или (3.29).

Остановимся на некоторых свойствах полученных систем асимптотически справедливых уравнений. Предположим, что в зонах входа и выхода можно считать $\mu = 1$. Тогда в условиях масляного голодания между решениями соответствующих асимптотических уравнений, полученных при $\alpha_1 = -1$ и $\alpha_1 \neq -1$, существует простая связь. Так в условиях п. А для постоянной А из (3.11) получим (см. аналогичные соотношения в [10])

$$A(\alpha_1, \lambda_0, \alpha) = |\alpha_1|^{2(n+2)} A(-1, \lambda_0 |\alpha_1|^{(\alpha-3)/2}, \alpha) \quad (3.32)$$

а для случая масляного голодания, п. С, для постоянной А из (3.25) найдем

$$A(\alpha_1, \lambda_0, \alpha) = |\alpha_1|^{(3m+1)/2(n+m+1)} A(-1, \lambda_0 |\alpha_1|^{(\alpha-3)/2}, \alpha) \quad (3.33)$$

Из формул (3.32), (3.33) следует, что при фиксированных постоянных $\lambda_0, \alpha, n, m, l$ и т. д. с увеличением количества подаваемой смазки, то есть с ростом $|\alpha_1|$ ($\alpha < 0$) толщина слоя смазки растет, а влияние шероховатости поверхностей на толщину слоя уменьшается.

Как указывалось выше, примерами применения изложенного метода являются работы [7—12]. При этом в качестве малого параметра ω может быть выбрана одна из величин $V = (3l_0^2(u_1 + u_2) E'^2) / 4R' p_n^4$ [7—9] (E' — приведенный модуль упругости материалов тел), $V_\beta = V (E'/2p_n^2)^{(1-\beta)/\beta}$ [10] (β — показатель степени в реологическом законе степенной жидкости) или Q^{-1} [7—12], где $Q = \alpha_0 p_n^0$ — безразмерный параметр, возникающий в зависимости вязкости от давления $\mu = l^{Q_0} p^0$ (здесь α_0 — пьезокоэффициент вязкости, θ — показатель степени).

ՄԱՆՐ ԲԵՌՆԱՎՈՐՄԱՆ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՐԳԻ ԺԱՄԱՆԱԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ-
 ՀԻԳՐՈԳՐԵՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՅՈՒՂՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽԵԳԻՐՆԵՐԻ
 ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅԱՆ ԱՍԻՄՊՏՈՏԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ:
 ՄԱՍ 1-ԻՆ: ԻԶՈԹԵՐՄԻԿ ԽԵԳԻՐ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ասիմպտոտական վերլուծությունների միակցման մեթոդներով ուսումնասիրվում է ծանր բեռնավորման կոնտակտի դեպքում Ռեյնոլդս-Ռիվլինի ոչ նյութառնչյան մաթուցիկ հեղուկի բարակ շերտով բաժանված անհարթ մարմինների համար հարթ առանձգա-հիդրոդինամիկական խնդիրը:

Յուղման անբավարար և լիտատ տարբեր պայմանակարգերի ժամանակ ստացվել են յուղման բարակ շերտի և շփման ուժերի համար ասիմպտոտական գնահատականներ:

ASYMPTOTIC METHODS OF INVESTIGATION OF PLANE
 PROBLEMS OF ELASTOHYDRODYNAMIC LUBRICATION
 THEORY FOR HEAVY-LOADED REGIMES.
 PART 1. ISOTHERMAL PROBLEM

I. I. KUDISH

S u m m a r y

A plane isothermal elastohydrodynamic problem for rough bodies divided by a thin layer of non-Newtonian viscous Reiner-Rivlin's liquid is studied by the method of matched asymptotic expansions in case of a heavy-loaded contact. Asymptotic estimations are obtained for the lubricant film thickness and friction force under different conditions of lubricant deficiency and abundant lubrication.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Гидродинамическая теория смазки» под ред. Лейбензона А. С. М.: Гостехиздат, 1934.
2. Martin H. M. Lubrication of Gear Teeth. London, Eng., 1916, v. 102.
3. Капица П. А. Гидродинамическая теория смазки при качении.— ЖТФ, 1955, т. 25, вып. 4.
4. Петрусевич А. И. Основные выводы из контактно-гидродинамической теории смазки.— Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 2.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
6. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
7. Кудиш И. И. Гидродинамическая теория смазки цилиндрических тел при качении. В кн.: Контактно-гидродинамическая теория смазки и ее практическое применение в технике. Тез. докл. Всес. конф., Куйбышев, 1976.

8. Кудиш И. И. Асимптотическое решение плоской изотермической контактно-гидродинамической задачи. В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела. Часть I. Тез. докл. Всес. конф., Ростов-на-Дону, 1977.
9. Кудиш И. И. Асимптотический анализ плоской неизоотермической упруго-гидродинамической задачи для тяжело нагруженного контакта качения.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1978, т. 31, № 6.
10. Александров В. М., Кудиш И. И. Задача контактно-гидродинамической теории смазки для вязкой жидкости со сложной реологией.—Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 4.
11. Кудиш И. И. Влияние реологии жидкости и шероховатости контактирующих поверхностей на толщину смазочного слоя и силу трения.—Тр. института (ВНИИП), 1978, № 4 (98).
12. Кудиш И. И. Упруго-гидродинамические задачи для шероховатых тел с неньютоновской смазкой.—ДАН УССР, сер. А, 1979, № 11.
13. Кудиш И. И. Некоторые задачи упруго-гидродинамической теории смазки легко нагруженного контакта.—Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 3.
14. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976.
15. Демкин Н. Б. Фактическая площадь касания твердых поверхностей. М., Изд-во АН СССР, 1962.
16. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978.
17. Штаерман И. Я. Контактные задачи теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1949.

ВНИИ конструкторско-технологический
институт подшипниковой промышленности

Поступила в редакцию
25. XII. 1980