ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 5, 1982 Механика

ТРЕХМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИКАХ С УЧЕТОМ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ШЕКОЯН А. В.

Распространение квазимонохроматических линейных и нелинейных волн в различных средах изучено в ряде работ [1—9, 16].

Однако при изучении волн в пьезодиэлектриках часто ограничиваются линейным или одномерным приближением. В некоторых практически осуществляемых ситуациях амплитуды волн становятся настолько большими, что нелинейные эффекты уже существенны.

Одномерное приближение не дает возможности изучить образование пучков, вопросы фокусирования и дифракции. Представляет интерес также изучить влияние нелинейности и дифракции друг на друга.

В работе [2] эта задача решается в общем виде, учитывая нелинейность и трехмерность волны. Однако, вязкость и теплопроводность там не учитываются, поэтому решение принимает вид пилообразной волны разрежения. В реальных средах всегда существует, хотя иногда и малая, диссипация, которая дает возможность искать решение в виде квазимонохроматических волн.

Целью настоящей работы является изучение трехмерных нелинейных упругих волн в пьезодиэлектриках с учетом малой диссипации, вывод уравнений, описывающих эти волны, исследование влияния внешнего постоянного электрического поля на волну, рассмотрение устойчивости волны и фокусировки узких пучков.

1. *Общие уравнения.* Свободная энергия единицы объема пьезодиэлектрика с учетом первых нелинейных членов имеет следующий вид [2, 7, 10, 11]:

$$F = F_0 + \frac{1}{2} c_{iklm} u_{ik} u_{lm} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} E_i' E_k' + e_{ikl} E_l' u_{ik} +$$

$$+ \frac{1}{2} a_{iklm} E_i' E_k' u_{lm} + \frac{1}{3!} C_{iklmpq} u_{ik} u_{lm} u_{pq} + \gamma_{ik} \theta u_{ik}$$

где F_0 — свободная энергия среды до деформирования, c_{iklm}, C_{iklmpq} — линейный и нелинейный модули упругости, a_{iklm}, ε_{ik}, и e_{ikl} — тензоры стрикции, диэлектрической проницаемости и пьезомодуля, γ_{ik} — термический линейный тензор, E_i' — компоненты вектора электрического напряжения, $\theta = T - T_0$, T и T_0 — начальная (однородная) и текущая температуры, u_{ik} — тензор деформации, равный

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$$

Воспользовавшись обычным способом [1, 8, 11], можно получить нелинейные уравнения движения среды с учетом вязкости и теплопроводности и уравнение теплопроводности, которые следует решать совместно с уравнениями Максвелла. Они для нашего случая имеют следующий вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=c_{iklm}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\partial x_m}+c_{iklm}\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_k\partial x_m}\frac{\partial u_p}{\partial x_l}+$$

$$+c_{kmpq}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_m}\frac{\partial u_p}{\partial x_q}+c_{kmpq}\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_k\partial x_q}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}-\gamma_{ik}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}+$$

$$+\eta_{iklm}\frac{\partial^3 u_l}{\partial t\partial x_k\partial x_m}+a_{iklm}E'_m\frac{\partial E'_l}{\partial x_k}-e_{lik}\frac{\partial E'_l}{\partial x_k}+C_{ikmnpq}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k\partial x_p}\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\quad(1.1)$$

$$c\frac{\partial\theta}{\partial t}+\gamma_{lk}T\frac{\partial^2 u_l}{\partial t\partial x_l}=\varkappa_{lk}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_l\partial x_k}\quad(1.2)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}=-\mu_{ik}\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t_э^2}\quad(1.3)$$

$$D_i=-\left(\frac{\partial F}{\partial E_i}\right)_{\theta,\,u_{ik}}=\varepsilon_{ik}E'_k+e_{ikl}u_{kl}+a_{iklm}E'_k u_{lm}\quad(1.4)$$

где c — теплоемкость единицы объема среды, $\varkappa_{ik}$ — тензор теплопроводности, μ_{ik} — тензор магнитной проницаемости. Для удобства уравнение (1.3) написано в эйлеровых координатах, а остальные — в лагранжевых, электрические потери малы, поэтому пренебрегаются [8].

Постановка задачи. Пусть упругая волна распространяется в полубесконечной вязкой теплопроводящей однородной анизотропной пьезодиэлектрической среде с гексагональной или тетрагональной кристаллической системой с симметриями соответственно (6 mm) и (4 mm) вдоль оси шестого или четвертого порядка в направлении $x_3>0$. Ортогональная координатная система выбрана так, чтобы плоскость $x_3=0$ совпала с поверхностью среды, а ось x_3 была направлена вдоль оси симметрии.

Предполагается, что в плоскости $x_3=0$, $u_1=u_2=0$, а в ограниченной ее части $u_3\neq 0$.

В гексагональных и тетрагональных кристаллических системах с симметрией (6 mm) и (4 mm) соответственно отличны от нуля следующие величины [12]: модули упругости $c_{11}=c_{22}$, $c_{12}=c_{21}$, $c_{13}=c_{31}=c_{23}=c_{32}$, $c_{44}=c_{55}$, c_{33}, c_{66} (в гексагональной $c_{66}=(c_{11}-c_{12})/2$), пьезомодули $e_{15}=e_{24}$, $e_{31}=e_{32}$, e_{33}, диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}$, ε_{33}, нелинейные упругие модули [23] C_{111}, C_{112}, C_{113}, C_{114}, C_{124}, C_{144}, C_{123}, C_{134}, C_{155}, C_{222}, C_{333}, C_{344}. У электрострикционного тензора отличны от нуля те же члены, что и у тензора модуля упругости.

2. *Вывод уравнений для амплитуды и фазы.* Вводя малый параметр и упростив уравнения (1.1)—(1.4), подобно [2], переходя во всех уравнениях к описанию Лагранжа, получим следующую систему уравнений:

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3}+c_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}-e_{15}\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-e_{31}\frac{\partial E_3}{\partial x_1}-\gamma_{11}\frac{\partial\theta}{\partial x_1} \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3}+c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}-e_{15}\frac{\partial E_2}{\partial x_3}-e_{31}\frac{\partial E_3}{\partial x_2}-\gamma_{11}\frac{\partial\theta}{\partial x_1} \tag{2.2}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=(c_{13}+c_{44})\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+c_{44}\Delta_\perp u_3+c_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}-$$

$$-e_{15}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right)-(e_{33}+a_{33}E_3^0)\frac{\partial E_3}{\partial x_3}-a_{33}E_3\frac{\partial E_3}{\partial x_3}+$$

$$+(3c_{33}+C_{333})\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\eta_{33}\frac{\partial^3 u_3}{\partial t\,\partial x_3^2}-\gamma_{33}\frac{\partial\theta}{\partial x_3} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1}+\frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2}-\frac{\partial E_1}{\partial x_3}\right)=$$

$$=-\mu_{33}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[e_{15}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)+\varepsilon_{11}E_1\right]\right\} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_3}-\frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right)=$$

$$=-\mu_{33}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[e_{15}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)+\varepsilon_{11}E_2\right]\right\} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right)-\Delta_\perp E_3=-\mu_{33}\left\{e_{31}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\right.$$

$$+(e_{33}+a_{33}E_3^0)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right)-2\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2\partial t}\frac{\partial u_3}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right]+$$

$$+\varepsilon_{33}\frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2}+a_{33}\left(E_3\frac{\partial^3 u_3}{\partial t^2\partial x_3}+2\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial x_3}\frac{\partial E_3}{\partial t}+\frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)-$$

$$\left.-2\varepsilon_{33}\frac{\partial u_3}{\partial t}\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_3\partial t}-\varepsilon_{33}\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\right\} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\gamma_{11}T}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\gamma_{33}T}{c}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial x_3}=\chi\frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} \tag{2.7}$$

где

$$\Delta_\perp=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\quad \chi=\varkappa_{33}/c$$

При виде уравнений (2.1)—(2.7) предполагалось, что при $E_i'=E_i^0+E_i$, где поле E_i^0 — постоянное, создается внешними источниками и направлено вдоль оси x_3, а поле E_i — переменное и обусловлено пьезосвойством среды.

Решение системы уравнений (2.1)—(2.7) ищем в виде [14]

$$(u_i,\ \theta,\ E_i) = \frac{1}{2}\{[u_{0i}(x_1,\ x_2,\ x_3),\ \theta_0(x_1,\ x_2,\ x_3),\ E_{0i}(x_1,\ x_2,\ x_3)] \times$$

$$\times \exp[i(\omega_1 t - kx_3)] + [u'_{0i}(x_1,\ x_2,\ x_3),\ \theta'_0(x_1,\ x_2,\ x_3),\ E'_{0i}(x_1,\ x_2,\ x_3)] \times$$

$$\times \exp[2i(\omega_1 t - kx_3)] + [u''_{0i}(x_1,\ x_2,\ x_3),\ \theta''_0(x_1,\ x_2,\ x_3),\ E''_{0i}(x_1,\ x_2,\ x_3)] + \text{к. с.}\} \tag{2.8}$$

где u_{0i}, θ и E_{0i} — амплитуды первой гармоники, величины с одним штрихом — амплитуды второй гармоники, а с двумя штрихами — свободные члены, k — волновое число, ω_1 — комплексная частота $\omega_1 = \omega + i\alpha_1$, α — коэффициент поглощения. Все амплитуды медленно меняющиеся. Подставляя (2.8) в систему уравнений (2.1)—(2.7) и приравнивая нулю коэффициенты у экспонент и свободный член, получим систему уравнений для амплитуд. Упростим эту систему, учитывая, что следующие безразмерные величины имеют порядки: частота и волновое число — δ^{-1}, амплитуда первой гармоники продольного смещения и амплитуда второй гармоники температурной волны — δ^2, продольные амплитуды первой гармоники — $\delta^{5/2}$, амплитуды второй гармоники, свободный член продольного смещения и свободный температурный член — δ^3 (δ — некоторый малый параметр). После этих упрощений получим следующую систему уравнений для амплитуд:

$$(kc_{44} - \omega_1^2\rho)\,u_{01} = -ik(c_{13} + c_{44})\frac{\partial u_{03}}{\partial x_1} + ike_{15}E_{01} - e_{31}\frac{\partial E_{03}}{\partial x_1} - \gamma_{11}\frac{\partial \theta_0}{\partial x_1} \tag{2.9}$$

$$(kc_{44} - \omega_1^2\rho)\,u_{02} = -ik(c_{13} + c_{44})\frac{\partial u_{03}}{\partial x_2} + ike_{15}E_{02} - e_{31}\frac{\partial E_{03}}{\partial x_2} - \gamma_{11}\frac{\partial \theta_0}{\partial x_2} \tag{2.10}$$

$$-i\omega_1\theta'_0 + \frac{2\gamma_{33}\omega_1 kT}{c}\,u'_{03} = -2\chi k^2\theta'_0$$

$$(k^2c_{33} - \omega_1^2\rho)\,u_{03} + ik\left(\frac{\partial u_{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{02}}{\partial x_2}\right) - c_{44}\Delta_\perp u_{03} +$$

$$+ 2ik(c_{33} + \omega_1\eta_{33})\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} - e_{15}\left(\frac{\partial E_{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{02}}{\partial x_2}\right) + (e_{33} + a_{33}E_3^0)\left(\frac{\partial E_{03}}{\partial x_3} -\right.$$

$$\left. - ikE_{03}\right) + ik^2\omega_1\eta_{33}u_{03} + \gamma_{33}\frac{\partial \theta_0}{\partial x_3} - ik\gamma_{33}\theta_0 =$$

$$= -ike^{-2\alpha t}[3c_{33} + C_{333} - a_{33}(e_{33} + a_{33}E_3^0)^2/\varepsilon_{33}^2]\,\dot{u}_{03}\,\dot{u}_{03} \tag{2.11}$$

$$(k^2 - \mu_{11}\varepsilon_{11}\omega_1^2)\,E_{01} = ik\frac{\partial E_{03}}{\partial x_1} + \mu_{11}e_{15}\omega_1^2\left(\frac{\partial u_{03}}{\partial x_1} - iku_{03}\right) \tag{2.12}$$

$$(k^2 - \mu_{11}\varepsilon_{11}\omega_1^2)\,E_{02} = ik\frac{\partial E_{03}}{\partial x_1} + \mu_{11}e_{15}\omega_1^2\left(\frac{\partial u_{03}}{\partial x_2} - iku_{03}\right) \tag{2.13}$$

$$-ik\left(\frac{\partial E_{01}}{\partial x_1}+\frac{\partial E_{02}}{\partial x_2}\right)-\triangle_\perp E_{03}-\omega_1^2\mu_{33}\left\{e_{31}\left(\frac{\partial u_{01}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{02}}{\partial x_2}\right)+\right.$$

$$\left.+(e_{33}+a_{33}E_3^0)\left(\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3}-iku_{03}\right)+\varepsilon_{33}E_{03}\right\}=$$

$$=2k^2\mu_{33}e^{-2\alpha t}(e_{33}+a_{33}E_3^0)(1-a_{33}/\varepsilon_{33})(4\omega_1^2+\omega_1\dot{\omega}_1+\omega_1^2\dot{\omega}_1^{*2})\,\dot{u}_{03}u_{03}' \tag{2.14}$$

$$-i\omega_1\theta_0+\gamma_{33}\omega_1 Tku_{03}/c=-\chi k^2\theta_0 \tag{2.15}$$

$$4(k^2c_{33}-\omega_1^2\rho)\,u_3'-2ik(e_{33}+a_{33}E_3^0)\,E_{03}'+8i\gamma_{33}\omega_1 u_{03}'-2i\gamma_{33}k\theta_0'=$$

$$=-\frac{ik^3}{2}[3c_{33}+C_{333}-a_{33}(e_{33}+a_{33}E_3^0)^2/\varepsilon_{33}^2]u_{03}^2 \tag{2.16}$$

$$\varepsilon_{33}E_{03}'=-2ik(e_{33}+a_{33}E_3^0)\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} \tag{2.17}$$

Уравнения для комплексно сопряженных амплитуд не приведены, так как в дальнейшем они не понадобятся. Порядки, до которых упрощены уравнения (2.9)—(2.17), аналогичны, как в работе [2].

Последовательно исключая амплитуды u_{01}, u_{02}, u_{03}', E_{01}, E_{02}, E_{03}, θ_0', θ_0, E_{03}', получим уравнение для u_{03}. В нелинейных членах и в выражениях, где E_{03} дифференцируется по координатам x_1 и x_2, член E_{03} исключен с помощью главных членов уравнения (2.14). Уравнение для u_{03} имеет следующий вид:

$$(A_1+iA_2)\triangle_\perp u_{03}-2ik\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3}=(C_1+iC_2)\,|u_{03}|^2u_{03} \tag{2.18}$$

где

$$A_1=-\frac{1}{\psi}\left[\frac{Dd}{c_{44}-v^2\rho}-c_{44}-e_{15}(e_{33}+a_{33}E_3^0)/\varepsilon_{33}\right] \tag{2.19}$$

$$A_2=-\frac{1}{\psi^2}\left\{\frac{D\psi}{c_{44}-v^2\rho}\left[\frac{2\alpha\omega\rho d}{k^2(c_{44}-v^2\rho)}-\frac{k^2\gamma_{11}\gamma_{33}T\chi}{\omega c}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\omega}(2\omega^2\gamma_{33}+k^2\gamma_{33}^2T\chi/c)\left(\frac{Dd}{c_{44}-v^2\rho}-c_{44}-\gamma_{11}\gamma_{33}T/c\right)\right\} \tag{2.20}$$

$$C_1=-\frac{k^2G\exp(-2\alpha t)}{16\,\alpha\psi^3}\left[\frac{G}{2}+\frac{8}{\varepsilon_{33}}(1-a_{33}/\varepsilon_{33})(e_{33}+a_{33}E_3^0)^2\right]\times$$

$$\times(2\omega^2\gamma_{33}+k^2\gamma_{33}^2T\chi/c) \tag{2.21}$$

$$C_2=-\frac{k^4\omega\exp(-2\alpha t)}{8\alpha\psi^2}G\left[\frac{G}{2}+8(1-a_{33}/\varepsilon_{33})(e_{33}+a_{33}E_3^0)^2/\varepsilon_{33}\right] \tag{2.22}$$

$$D=c_{13}+c_{44}+e_{31}(e_{33}+a_{33}E_3^0)^2/2\varepsilon_{33}$$

$$d=c_{13}+c_{44}+\frac{\gamma_{11}\gamma_{33}T}{c}+(e_{15}+e_{31})(e_{33}+a_{33}E_3^0)/\varepsilon_{33}$$

$$\psi = c_{33} + \frac{\gamma_{33}^2 T}{2c} + (e_{33} + a_{33}E_3^0)^2/\varepsilon_{33}$$

$$G = 3c_{33} + C_{333} - a_{33}(e_{33} + a_{33}E_3^0)^2/\varepsilon_{33}^2, \quad v^2 = \omega^2/k^2$$

При выводе выражений (2.19)—(2.22) полагалось, что коэффициент поглощения мал, поэтому всюду сохранялась его первая степень.

При выводе уравнения (2.18) было приравнено нулю выражение при u_{03}, которое дает следующее дисперсионное уравнение:

$$k^2 c_{33} - \omega_1^2 \rho + \frac{k^2}{\varepsilon_{33}}(e_{33} + a_{33}E_3^0)^2 + ik^2\omega_1\eta_{33} + \frac{k^2\gamma_{33}^2 T}{c(1 - ik^2\chi/\omega_1)} = 0 \quad (2.23)$$

3. *Изучение уравнения дисперсии и модуляции.* Уравнение (2.23) при $\chi = \eta_{33} = \gamma_{33} = 0$ для скорости волны дает следующее выражение:

$$\frac{\omega_0^2}{k} = \frac{c_{33}}{\rho} + (e_{33} + a_{33}E_3^0)^2/\rho\varepsilon_{33} \quad (3.1)$$

При $E_3^0 = -e_{33}/a_{33}$ скорость волны равняется скорости в непьезоэлектрической среде, электрическое поле снимает пьезосвойство среды. При $e_{33} = 0$ среда сохраняет свойство, подобное пьезодиэлектрику в линейном смысле [6, 7].

При $\chi = \gamma_{33} = 0$ уравнение (2.23) дает следующее выражение для частоты:

$$\omega_{10}^{(1,2)} = \frac{ik^2\eta_{33}}{2\rho} \pm \left\{-\frac{k^4\eta_{33}^2}{4\rho^2} + \frac{k^2}{\rho}\left[c_{33} + (e_{33} + a_{33}E_3^0)^2/\varepsilon_3\right]\right\}^{1/2} \quad (3.2)$$

При выполнении неравенства

$$-\frac{k^2\eta_{33}}{4\rho} + c_{33} + (e_{33} + a_{33}E_3^0)^2/\varepsilon_{33} \leqslant 0$$

частота упругой волны мнимая, то есть волны как таковой нет, есть экспоненциально затухающее возмущение. Пьезосвойства среды и наличие постоянного электрического поля E_3^0 увеличивают минимально допустимое значение волнового числа.

В общем случае уравнение (2.23) кубическое, которое можно решить методом последовательного приближения, считая диссипацию малой. Тогда предполагается, что $\omega_1 = \omega + \omega'$, где ω — нулевое решение при $\eta_{33} = \chi = 0$ и имеет вид

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\rho}\left[c_{33} + \frac{\gamma_{33}T}{c} + (e_{33} + a_{33}E_3^0)^2/\varepsilon_{33}\right] \quad (3.3)$$

$$\omega' = i\alpha, \qquad \alpha = \frac{\omega^2\eta_{33} + k^2\gamma_{33}^2 T\chi/c}{2\left[c_{33} + \frac{\gamma_{33}^2 T}{c} + (e_{33} + a_{33}E_3^0)^2/\varepsilon_{33}\right]} \quad (3.4)$$

Из выражения (3.4) видно, что пьезосвойство и E_3^0 уменьшают α, причем изменяя E_3^0, можно регулировать α.

Выражения (3.3) и (3.4) были использованы при выводе выражений для коэффициентов A_1, A_2, C_1, C_2.

Решение уравнения (2.18) ищем в виде [15]

$$u_{03} = a_0 \exp(-iks) \tag{3.5}$$

где a_0 — действительная амплитуда, s — эйконал. Подставляя (3.5) в (2.18) и отделяя мнимые и действительные части, получим

$$A_1 \Delta_\perp a_0 - a_0 k^2 A_1 (\nabla_\perp s)^2 + 2A_2 k (\nabla_\perp a_0)(\nabla_\perp s) + A_2 a_0 k \Delta_\perp s -$$

$$-2k^2 a_0 \frac{\partial s}{\partial x_3} = C_1 a_0^2 \tag{3.6}$$

$$A_2 \Delta_\perp a_0 - A_2 a_0 k^2 (\nabla_\perp s)^2 - 2A_1 k (\nabla_\perp a_0)(\nabla_\perp s) - A_1 k a_0 \Delta_\perp s -$$

$$-2k \frac{\partial a_0}{\partial x_3} = C_2 a_0^3 \tag{3.7}$$

где $\nabla_\perp$ — градиент по координатам x_1, x_2.

Решить в общем виде уравнения (3.6) и (3.7) трудно, поэтому будем пользоваться приближенными методами, дающими возможность изучить устойчивость волны и фокусирование узких пучков.

4. *Устойчивость и фокусирование узких пучков.* Условие устойчивости имеет вид: $\operatorname{im} k_3' \geqslant 0$ $(x_3 > 0)$, которое выведено в работе [2]. Волновое число возмущенной волны k_3' имеет вид

$$k_3' = \frac{1}{4\pi} \{ i(2A_2 k_\perp^2 + 3a_1^2 C_2) \pm \{-2A_2 k_\perp^2 + 3a_1^2 C_2) +$$

$$+ 4k_\perp^2 [k_\perp^2 (A_1^2 + A_2^2) + a_1^2 (3A_2 C_2 + 2A_1 C_1)]^{1/2}\}$$

где $k_\perp$ — поперечное волновое число возмущенной волны, a_1 — медленно меняющаяся амплитуда одномерной нелинейной невозмущенной квазимонохроматической волны. Если $2A_2 k_\perp^2 + 3a_1^2 C_2 > 0$, то имеет место устойчивость при $k_\perp^2 (A_1^2 + A_2^2) + a_1^2 (3A_2 C_2 + 2A_1 C_1) > 0$, при обратном знаке последнего имеется неустойчивость. Если же $2A_2 k_\perp^2 + 3a_1^2 C_2 < 0$, то имеется неустойчивость.

Из выражения (2.20) видно, что A_2 пропорционально малому коэффициенту поглощения. Поэтому в уравнениях (3.6) и (3.7) можно пренебречь членами с коэффициентом A_2. Учитывая это обстоятельство, для плоского и аксиально симметричного случая, для которого вводятся цилиндрические координаты, уравнения (3.6) и (3.7) следует записать в виде

$$2\frac{\partial s}{\partial z} + A_1 \left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)^2 - \frac{A_1}{a_0 k^2}\left(\frac{\partial^2 a_0}{\partial r^2} + \frac{m}{r}\frac{\partial a_0}{\partial r}\right) = -\frac{C_1}{k} a_0^2 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial a_0^2}{\partial z}+A_1\left(\frac{\partial a_0^2}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)+a_0^2A_1\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)=-\frac{C_2a_0^4}{k} \quad (4.2)$$

где $m=0$ соответствует плоскому случаю, а $m=1$ — аксиально-симметричному.

Подобно работе [15], решение (4.1) и (4.2) ищем в виде

$$S=\frac{r^2\beta(z)}{2}+\varphi(z), \quad a_0^2=\frac{E_0^2}{f^{m+1}}\exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2f^2}\right) \quad (4.3)$$

где $f(z)$ и r_0 — безразмерная и начальная ширина пучка, β^{-1} — радиус кривизны, E_0 — амплитуда при $z=0$. Подставляя (4.3) в (4.1) и (4.2), нетрудно убедиться в том, что при $m=0$ выражения (4.3) для действительных f непригодны, так как приводят к противоречию, а для аксиально-симметричного пучка пригодны, противоречие не имеет места. Тогда для приосевых лучей получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$2\frac{d\varphi}{dz}+\frac{2A_1}{k^2f^2}=-\frac{C_1E_0^2}{k^2f^2}$$

$$\beta=-\frac{C_2E_0^2}{2kA_1f^2}+\frac{1}{A_1f}\frac{df}{dz} \quad (4.4)$$

$$\frac{d^2f}{dz^2}=\left(\frac{4A_1^2}{R_\text{д}^{-2}}-\frac{1}{R_\text{н}^2}\right)\frac{1}{f^3} \quad (4.5)$$

где $R_\text{д}=r_0^2k/2$.

$$R_\text{н}^{-2}=-\frac{C_1A_1E_0^2}{k^2r_0^2}+\frac{C_2^2E_0^4}{4k^2} \quad (4.6)$$

После интегрирования уравнения (4.5) для f^2 получается выражение

$$f^2=\left(\frac{A_1^2}{R^2}+\frac{C_2E_0^2A_1}{kR}+\frac{A_1C_1E_0^2}{k^2r_0^2}+\frac{4A_1^2}{R_\text{д}^2}\right)z^2+2\left(\frac{A_1}{R}+\frac{C_2E_0^2}{2k}\right)z+1 \quad (4.7)$$

При выводе (4.7) были учтены граничные условия: $\beta(0)=1/R$, R — радиус кривизны начального волнового фронта, $f(0)=1$ и в отличие от работы [25]

$$\frac{df(0)}{dz}=\frac{A_1}{R}+\frac{C_2E_0^2}{2k} \quad (4.8)$$

Граничное условие (4.8) приводит к тому, что даже в сравнительно простом случае плоского начального фронта ($R\to\infty$) в выражении (4.7) остаются члены z, приводящие к более сложному поведению пучка, чем в нелинейной оптике.

Выражение (4.7) при $f=0$ определяет фокальные точки

$$Z_{\phi 1,2}^{-1} = -\left(\frac{A_1}{R} + \frac{C_2 E_0^2}{2k}\right) \pm \left(R_n^{-2} - \frac{4A_1^2}{R_\lambda^2}\right)^{1/2} \tag{4.9}$$

Из (4.9) видно, что при $R_n^{-2} > 4A_1^2/R_\lambda^2$ корни действительные. По крайней мере, одно $Z_{\phi 1} > 0$, если $-0{,}5\,C_2 E_0^2 k^{-1} > A_1 R^{-1}$. Если $C_2 > 0$ и $A_1 > 0$, то неравенство может выполняться только при $R < 0$. Отметим, что при выполнении первых двух условий $Z_{\phi_{1,2}} > 0$, если в (4.7) коэффициент при z^2 положителен. Приближенная оценка показывает, что при $a_{33} = 0$, $C_2 < 0$, $A_2 > 0$. Тогда всегда можно выбрать такие E_0 и k, чтобы волна фокусировалась.

Для двухмерного случая, а также для аксиально-симметричного пучка с произвольным профилем можно воспользоваться приближенным уравнением, которое получается из (1.15), пренебрегая в нем C_1 по сравнению с C_2, так как из выражения (2.21) и (2.22) видно, что $|C_2| \gg |C_1|$. Тогда правая часть уравнения (4.1) будет равняться нулю. Пренебрежем в (4.1) также членом, обуславливающим дифракцию. После этих упрощений, деля уравнение (3.2) на a_0^{-2} и вводя обозначения $u = \partial s/\partial r$, $a_0^{-2} = \psi$, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + A_1 U \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \tag{4.10}$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z} - A_1 U \frac{\partial \psi}{\partial r} + A_1\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{m}{r} U\right)\psi + \frac{C_2}{k} = 0 \tag{4.11}$$

Уравнение (4.10) будем решать методом характеристик [13], тогда при $z = 0$, $U = F(y)$ решение будет иметь вид

$$r = A_1 F(y) z + y, \quad U = F(y) \tag{4.12}$$

Вдоль характеристики уравнение (4.11) можно написать в таком виде:

$$-\frac{d\psi}{dz} + A_1\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{m}{r} U\right)\psi + \frac{C_2}{k} = 0 \tag{4.13}$$

где U определяется из выражения (4.12). Интегрирующий множитель уравнения (4.13) имеет вид

$$\mu = (1 + A_1 F' z)^{-1} (y + A_1 F z)^{-m} \tag{4.14}$$

Рассмотрим сперва случай $m = 1$. Тогда с учетом (4.14) общее решение (4.13) будет

$$\psi = \frac{C_2}{\mu A_1 F' (y - F/F')} \ln\left(\frac{1 + A_1 F' z}{y + A_1 F z}\right) + \frac{\chi_1(y)}{\mu} \tag{4.15}$$

где χ_1 — постоянная интегрирования. Однако, для частного случая сферической волны $F(y) = r/R$ на прямой $r = y$ и $z = 0$ дает неопределенность. Поэтому необходимо значение $F(y)$ в виде сферической волны подставить в (4.14), а потом проинтегрировать, тогда получим следующее выражение:

$$\psi = -\frac{C_2 R}{A_1}\left(1 + \frac{A_1 z}{R}\right) + \chi_1(y)\, y\,(1 + A_1 z/R)^2$$

Если при $z = 0$

$$\psi = E_0^{-2} \exp\,(y^2/r_0^2) \tag{4.16}$$

то

$$\psi = C_2\left(1 + \frac{A_1 z}{R}\right) z + \left(1 + \frac{A_1 z}{R}\right)^2 E_0^{-2} \exp\,(y^2/r_0^2) \tag{4.17}$$

Для приосевых лучей, когда ψ и U имеют вид (4.3), нетрудно убедиться в том, что (4.17) переходит в (4.7), если в последнем подставить $C_1 = 0$.

При $m = 0$ решение (4.13) имеет вид

$$\psi = (1 + A_1 F' z)\left[\frac{C_2}{A_1 F'}(1 + A_1 F' z) + \chi_1(y)\right] \tag{4.18}$$

Если $R = r/R$ и выполняются условия (4.16), то (4.18) приводится к виду

$$\psi = \left(1 + \frac{A_1 z}{R}\right)\left[\frac{C_2}{A_1} R \ln\left(1 + \frac{A_1}{R} z\right) + E_0^2 \exp\,(y^2/r_0^2)\right]$$

Условие огибающей получается, если продифференцируем первое уравнение в (4.12) по r и приравняем нулю, тогда получим $F'(y) = -(A_1 z)^{-1} > 0$, то есть огибающая имеется при $R^{-1} < 0$, то есть для вогнутой волны. Значение y определяется из первого уравнения (4.12) и имеет вид: $y = rR/(R + A_1 z)$.

Автор выражает глубокую признательность А. Г. Багдоеву за внимание и помощь.

Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

ԽՈԱՉԱՓ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՔՎԱԶԻՄՈՆՈՔՐՈՄԱՏԻԿ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ՊՅԵԶՈԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿՆԵՐՈՒՄ ԳԾԱՅԻՆ ՄԱԾՈՒՑԻԿՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՋԵՐՄԱՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրված է ոչ գծային առաձգական ալիքների տարածումը անիզոտրոպ պյեզոդիէլեկտրիկ միջավայրում։ Արտածված են հավասարումներ ալիքի ամպլիտուդայի և փուլի համար։

Քննարկված է ալիքի կայունությունը և նեղ փնջերի ֆոկուսացումը։

THE THREE-DIMENSIONAL NONLINEAR QUASI-MONOCHROMATIC WAVES IN THE PIEZODIELECTRICS WITH LINEAR VISCOSITY AND HEAT CONDUCTIVITY

A. V. SHEKOYAN

S u m m a r y

The propogation of the elastic nonlinear quasi-monochromatic waves in the piezodielectrics with linear dissipation is studied. A nonlinear Schrödinger equation for such a medium is derived. The stability and focusing of narrow beams are studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г.* Уравнения нелинейной вязкотермоупругой среды вблизи фронтов.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. 27, № 1.
2. *Багдоев А. Г., Шекоян А. В.* Распространение нелинейных упругих волн в пьезодиэлектриках и пьезополупроводниках.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1981, т. 34, № 3.
3. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Распространение модулированных нелинейных волн в релаксирующей газожидкостной смеси.— Изв. АН Арм.ССР, МЖГ, 1980, № 1.
4. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред.— ПММ, 1971, т. 35, № 6.
5. *Комарь В. К., Тиман Б. Л.* Нелинейное взаимодействие волн в режиме усиления ультразвука в CdS.— ФТТ, 1970, т. 12, с. 304.
6. *Гуляев Ю. В.* К вопросу об электрон-фононном взаимодействии, пропорциональном внешнему приложенному полю.— ФТТ, 1967, т. 9, № 6.
7. *Пустовойт В. И.* Взаимодействие электронных потоков с упругими волнами решетки.— Успехи физ. наук, 1969, т. 97, № 2.
8. *Гуревич В. Л.* Кинетика фононных систем. М.: Наука, 1980.
9. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды. В сб. «Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн». Л.: Изд. ЛГУ, 1961.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошной среды. М.: Гостехиздат, 1957.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Нуака, 1965.
12. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. М.: Изд. Мир, 1967.
13. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах.— Успехи физ. н., 1970, т. 102, № 4.
14. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
15. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция в нелинейной среде.— Успехи физ. н., 1967, т. 93, № 1.
16. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М.: Изд. МГУ, 1974.

Институт механики
АН Арм. ССР

Поступила в редакцию
4. V. 1981