

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ  
КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ПОЛУБЕСКО-  
НЕЧНЫМ СТРИНГЕРОМ И ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

МХИТАРЯН С. М.

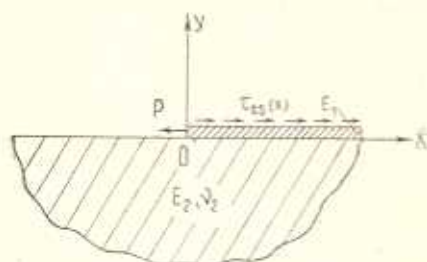
Контактная задача о передаче горизонтальной сосредоточенной силы бесконечного в обоих направлениях стрингера к упругой полуплоскости впервые поставлена и решена Меланом [1]. При этом для стрингера принята модель одномерного упругого континуума, лишенного изгибной жесткости, в сочетании с моделью контакта по линии. В такой же постановке аналогичная задача для полубесконечного стрингера, нагруженного на своем конце горизонтальной сосредоточенной силой, исследовалась в работах [2—5]. Из последних следует особо выделить работу [3], где разрешающее интегро-дифференциальное уравнение задачи при помощи интегрального преобразования Меллина сведено к решению разностного функционального уравнения, а затем построено его замкнутое решение, обладающее довольно простой аналитической структурой. Эта же самая задача с точки зрения применения метода Винера—Хопфа рассматривалась в работах [6, 7], притом в [7] сила приложена на произвольном расстоянии от конца стрингера. Задаче контактного взаимодействия между полубесконечным стрингером и двумя одинаковыми упругими полуплоскостями посвящена работа [8]. Укажем также на работы [9—14], тесно примыкающие к приводимому ниже исследованию. Достаточно полный обзор основных работ и результатов из указанной области теории упругости содержится в [15].

Следует отметить, что во всех решениях, построенных в упомянутых работах, в явном виде не выделена присущая тангенциальным контактным напряжениям особенность на конце стрингера. Такое решение для стрингера конечной длины дано в [16]. В настоящей работе на основе одного интегрального соотношения Гильберта строится новое замкнутое решение контактной задачи о передаче нагрузки от полубесконечного стрингера к упругой полуплоскости или плоскости, содержащее в явном виде эту особенность. Стрингер одновременно нагружен горизонтальной сосредоточенной силой на своем конце и горизонтальными силами произвольной интенсивности в точках верхней грани. Тангенциальные контактные напряжения представляются косинус-интегралом Фурье с явно выделенной особенностью, после чего разрешающее интегро-дифференциальное уравнение сводится к некоторому функциональному уравнению относительно косинус-трансформанты Фурье этих напряжений. Последнее затем при помощи аппарата функций Эрмита в свою очередь сводится к эквивалентной

бесконечной системе линейных уравнений с ядром, зависящим от разности индексов. Теория таких бесконечных систем, являющихся дискретными аналогами интегральных уравнений с разностными ядрами на полупрямой, разработана М. Г. Крейном в известной работе [17], где одновременно приведены конкретные примеры. Воспользовавшись этой теорией, получена точная факторизация соответствующей функции на единичной окружности. В конечном итоге решение разрешающего уравнения представляется рядом по  $G$ -функциям Мейера. Приведены численные результаты.

Следует отметить, что изложенная здесь методика, позволившая получить новое замкнутое решение разбираемой задачи и в явном виде выделить особенность контактных напряжений на конце стрингера, перед другими обладает еще некоторыми преимуществами. Последние заключаются в том, что она в конечном итоге приводит к бесконечной системе чрезвычайно простой структуры, метод редукции для которой оказывается быстро сходящимся процессом. Кроме того, эта методика позволяет основные механические характеристики задачи представить несложными формулами, удобными для численной реализации. Наконец, она, представляющая также самостоятельный интерес, может быть применена к построению эффективных решений родственных задач.

1. Решение задачи о контактном взаимодействии между полубесконечным стрингером, нагруженным на своем конце горизонтальной сосредоточенной силой  $P$  и в точках верхней грани тангенциальными силами  $\tau_{0x}(x)$ , и упругой полуплоскостью (фиг. 1), находящейся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния, после перехода к безразмерным координатам и величинам, как в [3], можно свести к решению следующего интегро-дифференциального уравнения:



Фиг. 1

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi'(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = \varphi(\xi) - T_0(\xi) \quad (1.1)$$

$$(0 < \xi < \infty)$$

при условии

$$\varphi(0) = T_0 - 1 \quad (1.2)$$

Здесь

$$\varphi(\xi) = - \int_{\xi}^{\infty} \tau(\eta) d\eta, \quad T_0(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \tau_0(\eta) d\eta, \quad T_0 = T_0(0), \quad (0 \leq \xi < \infty)$$

$\tau(\xi)$  — безразмерные контактные тангенциальные напряжения, подлежащие определению, а  $\tau_0(\xi)$  — безразмерные тангенциальные силы, обусловленные наперед заданной нагрузкой  $\tau_{0x}(x)$ .

Если воспользоваться соответствующей функцией влияния [18], то к уравнению (1.1) при условии (1.2) можно свести также решение контактной задачи о передаче нагрузки от полубесконечного стрингера, нагруженного указанным же образом, к упругой бесконечной пластине.

Решение уравнения (1.1) представим в следующем виде:

$$\tau(\xi) = \varphi'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) \cos(\lambda\sqrt{2\xi}) d\lambda \quad (0 < \xi < \infty) \quad (1.3)$$

где  $\Phi(\lambda)$  — неизвестная функция. Положив здесь  $\sqrt{2\xi} = u$  и приняв во внимание формулу обращения косинус-преобразования Фурье, при помощи (1.2) легко обнаружим, что

$$\Phi(0) = \gamma = \frac{2}{\pi} (1 - T_0)$$

С другой стороны, поскольку коэффициент интенсивности контактных напряжений на конце струнгера — величина конечная, то должно быть

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \sqrt{2\xi} \tau(\xi) = A < \infty$$

и, следовательно, интеграл

$$\int_0^{\infty} \Phi(\lambda) d\lambda$$

должен быть сходящимся. Отсюда вытекает, что последнее будет обеспечено, если

$$\Phi(\lambda) = O(\lambda^{-1-\epsilon}) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

Далее, из (1.3) и (1.2) получим

$$\varphi(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} \sin(\lambda\sqrt{2\xi}) d\lambda + T_0 - 1 \quad (0 < \xi < \infty)$$

или, приняв во внимание выражение разрывного интеграла Дирихле, можем записать

$$\varphi(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\Phi(\lambda) - \gamma}{\lambda} \sin(\lambda\sqrt{2\xi}) d\lambda \quad (0 < \xi < \infty) \quad (1.4)$$

Теперь запишем интегральное соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda\sqrt{2\eta}) d\eta}{(\eta - \xi)\sqrt{2\eta}} = - \frac{\sin(\lambda\sqrt{2\xi})}{\sqrt{2\xi}} \quad (1.5)$$

которое можно непосредственно вывести из формулы преобразования Гильберта для косинус-функции [19]. Затем (1.3) и (1.4) подставим в уравнение (1.1), поменяем порядок интегрирования, законность которого

можно обосновать так же, как в [3], и воспользуемся соотношением (1.5). В результате, после несложных выкладок для определения функции  $\Phi(\lambda)$  получим следующее уравнение\*:

$$\frac{\Phi(\lambda) - \gamma}{\lambda} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \frac{\lambda + \mu}{|\lambda - \mu|} \Phi(\mu) d\mu = f_0(\lambda) \quad (1.6)$$

где

$$f_0(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T_0(\xi) \frac{\sin(\lambda \sqrt{2\xi})}{\sqrt{2\xi}} d\xi$$

Таким образом, разрешающее интегро-дифференциальное уравнение задачи (1.1) при условии (1.2) свелось к решению интегрального уравнения (1.6).

Желая уравнение (1.6) преобразовать в уравнение на бесконечном интервале, положим

$$f(\lambda) = f_0(\lambda) + \frac{\gamma}{\lambda} \quad (0 < \lambda < \infty)$$

и эту функцию, а также искомую функцию  $\Phi(\lambda)$ , нечетным образом продолжим на отрицательную полуось. Тогда  $\Phi(\lambda)$  будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\Phi(\lambda)}{|\lambda|} + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|\lambda - \mu|} \Phi(\mu) d\mu = f(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty) \quad (1.7)$$

Далее, введем в рассмотрение функции

$$\varphi_*(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|\lambda - \mu|} \Phi(\mu) d\mu \quad (1.8)$$

$$\psi_*(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|\lambda - \mu|} \bar{\Phi}(\mu) d\mu \quad (1.9)$$

где  $\bar{\Phi}(\lambda)$  — преобразование Фурье функции  $\Phi(\lambda)$ , то есть

$$\bar{\Phi}(\lambda) = F[\Phi] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} \Phi(s) ds$$

Легко видеть, что

$$F[\bar{\Phi}] = -2\pi\Phi(\lambda)$$

\* Из этого уравнения непосредственно вытекает, что  $\Phi'(0) = 0$ .

С учетом последнего из (1.9), трактуя преобразование Фурье в рамках теории обобщенных функций, получим

$$F[\psi_*] = -2\pi \frac{\Phi(\lambda)}{|\lambda|}$$

Это соотношение вместе с (1.8) позволяет уравнение (1.7) записать в виде

$$-\frac{1}{2\pi} F[\psi_*] + 2\varphi_*(\lambda) = f(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty) \quad (1.10)$$

Теперь, продифференцировав (1.8) и (1.9), а затем воспользовавшись формулой обращения Гильберта [20], будем иметь

$$\Phi(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_*(\mu) d\mu}{\mu - \lambda} \quad (1.11)$$

$(-\infty < \lambda < \infty)$

$$\bar{\Phi}(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_*(\mu) d\mu}{\mu - \lambda} \quad (1.12)$$

Применение преобразования Фурье к равенству (1.11) даст

$$\bar{\Phi}(\lambda) = |\lambda| F[\varphi_*]$$

что, конечно, можно было бы получить и из (1.8). Сопоставление последнего с (1.12) приводит к соотношению

$$|\lambda| F[\varphi_*] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_*(\mu) d\mu}{\mu - \lambda}$$

переходящему после применения преобразования Фурье к следующему:

$$F[|\lambda| F[\varphi_*]] = |\lambda| F[\psi_*]$$

Отсюда определим  $F[\psi_*]$  и подставим в (1.10). Тогда для определения функции  $\Phi(\lambda)$  окончательно получим следующее функциональное уравнение:

$$-\frac{1}{2\pi} F[|\lambda| F[\varphi_*]] + 2|\lambda| \varphi_*(\lambda) = |\lambda| f(\lambda) \quad (1.13)$$

$(-\infty < \lambda < \infty)$

После решения уравнения (1.13) искомая функция  $\Phi(\lambda)$  определится из (1.11).

Теперь уравнение (1.13) сведем к эквивалентной бесконечной системе линейных уравнений. С этой целью положим

$$\varphi_n(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \varphi_{2n+1}(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty) \quad (1.14)$$

где  $\varphi_n(\lambda) = \exp(-\lambda^2/2) H_n(\lambda)$  ( $n=0, 1, \dots$ ) — функции Эрмита, а  $H_n(\lambda)$  — полиномы Чебышева-Эрмита. Воспользовавшись известным соотношением ([20], стр. 108)

$$F[\varphi_n] = i^n \sqrt{2\pi} \varphi_n(x)$$

при помощи (1.14) из (1.13) будем иметь

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n F[|\mu| \varphi_{2n+1}(\mu)] + 2 \sum_{n=0}^{\infty} x_n |\lambda| \varphi_{2n+1}(\lambda) = |\lambda| f(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

Далее положим

$$|\lambda| \varphi_{2n+1}(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{n,m} \varphi_{2m+1}(\lambda) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$|\lambda| f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_{2n+1}(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

После некоторых простых преобразований для определения коэффициентов  $x_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) получим следующую бесконечную систему уравнений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2 + (-1)^{n-m}] K_{n,m} x_n = f_m \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (1.15)$$

При этом ядро  $K_{n,m}$  и свободные члены  $f_m$  бесконечной системы (1.15) выражаются формулами

$$K_{n,m} = \frac{2}{h_m} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda^2} H_{2n+1}(\lambda) H_{2m+1}(\lambda) d\lambda \quad (1.16)$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$f_m = \frac{2}{h_m} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda^2/2} f(\lambda) H_{2m+1}(\lambda) d\lambda \quad (1.17)$$

где

$$h_m = \sqrt{\pi} 2^{2m+1} (2m+1)!$$

Далее, используя формулы 8.972.3 ([21], стр. 1051) и 7.414.9 ([21], стр. 859), вычислим интеграл (1.16). После несложных выкладок находим

$$K_{n,m} = \frac{(-1)^{n-m} 2^{2(n-m)} \Gamma(n+3/2)}{\pi [1/4 - (n-m)^2] m!} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots)$$

где  $\Gamma(x)$  — известная гамма-функция Эйлера. Исходя из последнего, введем новые неизвестные коэффициенты

$$\xi_n = 2^{2n+2} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

после чего (1.15) окончательно примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{m-n} \xi_n = \eta_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.18)$$

где

$$\alpha_m = \frac{1 + 2(-1)^m}{3(1 - 4m^2)} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.19)$$

$$\eta_m = \frac{\pi}{12} 2^{2m+2} m! f_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.20)$$

а  $f_m$  даются формулой (1.17).

Таким образом, разрешающее интегро-дифференциальное уравнение (1.1) при условии (1.2) в конечном итоге сводится к бесконечной системе (1.18) с ядром, зависящим от разности индексов и выражающимся (1.19), и со свободными членами (1.20).

2. Решение бесконечной системы (1.18) построим методом М. Г. Крейна [17]. Следуя этой работе, введем в рассмотрение функцию

$$a(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \zeta^m \quad (\zeta = e^{it}, \quad -\pi \leq t < \pi)$$

Приняв во внимание (1.19), можем записать

$$a(\zeta) = 1 - \frac{1}{6} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mt}{m^2 - 1/4} - \frac{1}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 - 1/4} \cos mt$$

откуда при помощи формул 1.445.6 и 1.445.8 ([21], стр. 54)

$$a(\zeta) = \begin{cases} \frac{\pi}{12} \left[ \frac{2+i}{\sqrt{\zeta}} + (2-i)\sqrt{\zeta} \right] & (0 \leq t < \pi) \\ \zeta = e^{it} \\ \frac{\pi}{12} \left[ (2+i)\sqrt{\zeta} + \frac{2-i}{\sqrt{\zeta}} \right] & -\pi < t \leq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Очевидно, что функция  $a(\zeta)$  из (2.1) нигде на единичной окружности  $|\zeta| = 1$  не обращается в нуль и, кроме того, она непрерывная и четная функция. Поэтому

$$\text{ind}[a(\zeta)]|_{|\zeta|=1} = 0$$

Отсюда, по теореме 13.1 ([17], стр. 69) система (1.19) в любом из пространств  $E$ , описанных в [17], имеет единственное решение, которое строится при помощи компонент канонической факторизации функции  $\alpha^{-1}(\zeta)$  на единичной окружности:

$$\alpha^{-1}(\zeta) = g_+(\zeta) g_-(\zeta) \quad (\zeta = e^{it}) \quad (2.2)$$

где

$$\ln [g_+(z)] = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\ln [a(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta \quad (|z| < 1) \quad (2.3)$$

$$\ln [g_-(z)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\ln [a(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta \quad (|z| > 1) \quad (2.4)$$

Займемся вычислением интеграла из (2.4). При помощи (2.1) будем иметь

$$\ln [g_-(z)] = \ln \frac{\pi}{6} + p(z) + q(z) \quad (|z| > 1)$$

где

$$p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{\ln (\sin t/2 + 2 \cos t/2) e^{it} idt}{e^{it} - z} \quad (|z| > 1)$$

$$q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{\ln (\sin t/2 + 2 \cos t/2) e^{it} idt}{e^{-it} - z}$$

Отсюда

$$\frac{dp}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{\ln (\sin t/2 + 2 \cos t/2) e^{it} idt}{(e^{it} - z)^2} \quad (|z| > 1)$$

и интегрирование по частям даст

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{\ln 2}{z-1} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{2 \operatorname{tg} t/2 - 1}{\operatorname{tg} t/2 + 2 \cos t + i \sin t - z} dt \right] \quad (|z| > 1)$$

Далее положив  $x = \operatorname{tg} t/2$ , получим

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{\ln 2}{z-1} - \int_0^\pi \frac{(2x-1) dx}{(x+2)[(1+z)x^2 - 2ix + z-1]} \right] \quad (|z| > 1)$$

Теперь, воспользовавшись методикой интегрирования рациональных функций, после некоторых простых операций находим



$$\frac{dp}{dz} = -\frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{\ln 2}{z-1} - \frac{(2-i)\ln 2}{(2-i)z+2+i} - \frac{i\pi}{4z} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2z} \frac{(2-i)z-2-i}{(2-i)z+2+i} \ln \left( i \frac{z-1}{z+1} \right) \right] \quad (|z| > 1)$$

Аналогичным образом

$$\frac{dq}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{\ln 2}{z-1} - \frac{(2+i)\ln 2}{(2+i)z+2-i} - \frac{i\pi}{4z} + \frac{\pi i}{z} \frac{2-i}{(2+i)z+2-i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2z} \frac{(2+i)z-2+i}{(2+i)z+2-i} \ln \left( i \frac{z-1}{z+1} \right) \right] \quad (|z| > 1)$$

Из последних двух равенств можем записать

$$\frac{dp}{dz} + \frac{dq}{dz} = -\frac{4\ln 2}{\pi(5z^2+6z+5)} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z+a} \right) + \\ + \frac{4\ln \left( i \frac{z-1}{z+1} \right)}{\pi(5z^2+6z+5)} \quad \left( |z| > 1; \quad a = \frac{3-4i}{5} \right)$$

Так как  $\ln[g_-(z)] = O(1/z)$  при  $z \rightarrow \infty$ , то после несложных выкладок окончательно получим

$$g_-(z) = \left( \frac{z+a}{z+a} \right)^{ix} \sqrt{\frac{z}{z+a}} \exp \left[ -\frac{4}{\pi} \int_z^{\infty} \frac{\ln \left( i \frac{w-1}{w+1} \right) dw}{5w^2+6w+5} \right] \quad (2.5) \\ \left( x = \frac{\ln 2}{2\pi}; \quad |z| > 1 \right)$$

Здесь логарифмическая функция понимается следующим образом:

$$\ln \left( i \frac{z-1}{z+1} \right) = \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + i \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z_0}{\operatorname{Re} z_0} \quad \left( z_0 = i \frac{z-1}{z+1} \right)$$

Из (2.5) на основе свойства функции  $a(\zeta)$ :

$$a(\zeta) = a \left( \frac{1}{\zeta} \right) \quad (\zeta = e^{it})$$

непосредственно вытекает, что входящая в (2.3) функция

$$g_+(z) = \left( \frac{1+\bar{a}z}{1+az} \right)^{-ix} \frac{1}{\sqrt{1+az}} \exp \left[ -\frac{4}{\pi} \int_0^z \frac{\ln \left( i \frac{1-w}{1+w} \right) dw}{5w^2+6w+5} \right] \quad (2.6) \\ (|z| < 1)$$

Таким образом, компоненты канонической факторизации функции  $a^{-1}|\zeta|$  на единичной окружности даются (2.5) и (2.6).

Далее, используя соотношения

$$\ln \left( i \frac{1-z}{1+z} \right) = i \frac{\pi}{2} + \ln \frac{1-z}{1+z} \quad (|z| < 1)$$

$$\ln \frac{1-z}{1+z} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{2k-1}$$

(2.6) можем представить в виде бесконечного произведения. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$g_+(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[ \frac{2}{\pi} \left( \frac{p_k}{2k} z^{2k} - \frac{q_k}{2k-1} z^{2k-1} \right) \right] \quad (|z| < 1) \quad (2.7)$$

где

$$p_k = \frac{\pi}{4} \cos 2k\alpha - \frac{\sin 2k\alpha}{2} \ln 2 + \sin 2k\alpha \sum_{r=1}^k \frac{\cos (2r-1)\alpha}{2r-1} -$$

$$- \cos 2k\alpha \sum_{r=1}^k \frac{\sin (2r-1)\alpha}{2r-1}; \quad \left( k=1, 2, \dots, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right)$$

$$q_k = \frac{\pi}{4} \cos (2k-1)\alpha - \frac{\sin (2k-1)\alpha}{2} \ln 2 +$$

$$+ \sin (2k-1)\alpha \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\cos (2r-1)\alpha}{2r-1} - \cos (2k-1)\alpha \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\sin (2r-1)\alpha}{2r-1}$$

причем последние две суммы при  $k=1$  полагаются равными нулю. При  $z = \zeta = e^{i\vartheta}$  из (2.7) после некоторых преобразований получим

$$g_+(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp [x_k(\vartheta)] \{ \cos [\beta_k(\vartheta)] + i \sin [\beta_k(\vartheta)] \} \quad (-\pi < \vartheta < \pi) \quad (2.8)$$

где

$$x_k(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{p_k}{2k} \cos 2k\vartheta - \frac{q_k}{2k-1} \cos (2k-1)\vartheta \right]$$

$$\beta_k(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{p_k}{2k} \sin 2k\vartheta - \frac{q_k}{2k-1} \sin (2k-1)\vartheta \right]$$

Теперь, следуя работе [17], функцию  $g_+(\zeta)$  разложим в степенной ряд

$$g_+(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \zeta^n \quad (\zeta = e^{i\vartheta})$$

что эквивалентно соответствующему ряду Фурье. Отсюда

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_+(e^{i\vartheta}) e^{-in\vartheta} d\vartheta \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.9)$$

Легко видеть, что  $\gamma_n = \bar{\gamma}_n$ . С другой стороны, так как ([21], стр. 22, ф. 0.237.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

то можем записать

$$e^{-in\vartheta} = \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2n\vartheta i}{4k^2 - 1}\right)$$

Внося последнее выражение в (2.9) и учтя (2.8), после несложных выкладок находим

$$\gamma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \prod_{k=1}^{\infty} \exp[\alpha_k(\vartheta)] \cos\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2n\vartheta}{1-4k^2} + \beta_k(\vartheta)\right]\right\} d\vartheta \quad (2.10)$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

Заметим, что  $\gamma_0 = 1$ , что вытекает из соотношения  $g_-(\infty) = 1$ .

После того, как по (2.10) определены коэффициенты  $\gamma_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), элементы резольвентной матрицы  $\gamma_{mn}$  задаются по формуле

$$\gamma_{mn} = \sum_{r=0}^{\min(m, n)} \gamma_{m-r} \gamma_{n-r} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

а решение бесконечной системы (1.18) — по формуле

$$\xi_m = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{mn} \gamma_n \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Далее, если построено решение системы

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{m-n} \xi_n = q_0^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

где  $|q_0| < 1$ , то известным способом можно построить решение этой же системы при произвольной правой части, притом решением (2.11) являются координаты вектора [17]

$$r(z) = \frac{\bar{g}_-(z) g_-(1/q_0)}{1 - q_0 z}$$

Последнее представляет собой аналог известной формулы Хопфа—Фока.

Отметим, что коэффициенты  $\gamma_n$  из (2.10) могут быть со сколь угодно большой точностью аппроксимированы следующими выражениями:

$$\gamma_n^{(M, N)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \prod_{k=1}^M \exp[\alpha_k(\vartheta)] \cos\left\{\sum_{k=1}^N \left[\frac{2n\vartheta}{1-4k^2} + \beta_k(\vartheta)\right]\right\} d\vartheta$$

Вычисление последних интегралов может быть осуществлено известными методами [22, 23].

3. Теперь выразим тангенциальные контактные напряжения и осевые напряжения в струнгере через коэффициенты  $x_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), которые в конечном итоге определяются из бесконечной системы (1.18). Сначала заметим, что поскольку  $\alpha(\zeta) \neq 0$  нигде на единичной окружности  $|\zeta| = 1$  и  $\text{ind}[\alpha(\zeta)]|_{|\zeta|=1} = 0$ , то по известной теореме [24] к системе (1.18) применим метод редукции. С другой стороны, нетрудно показать, что эта система вполне регулярна, откуда опять вытекает возможность применения к ней метода редукции. Чтобы показать полную регулярность системы (1.18), представим ее в виде

$$y_m + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_{m-n} y_n = a_m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

где  $y_m = \xi_{m-1}$ ,  $a_m = \eta_{m-1}$ , а штрих над суммой означает пропуск члена с индексом  $n = m$ . Далее оценим суммы

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{m-n}|$$

После элементарных операций легко получим, что

$$S_{2r} = \sum_{n=1}^{r-1} \frac{1}{16n^2 - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 1} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^r \frac{1}{4(2n-1)^2 - 1} + \\ + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(2n-1)^2 - 1} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

Отсюда

$$S_{2r} < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 1} + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n-3)}$$

Но ([21], стр. 22, ф. 0.237.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

С другой стороны, ([21], стр. 24, ф. 0.244.1 и стр. 305, ф. 3.231.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n-3)} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/4)(n-3/4)} = \\ = \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{x^{-3/4} - x^{-1/4}}{1-x} dx = \frac{\pi}{8} \text{ctg} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

Следовательно,

$$S_{2r} < 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{24} \right) = 1 - \frac{\pi}{6} \approx 0,477$$

Точно такая же оценка имеет место для  $S_{r-1}$ , которая и показывает полную регулярность бесконечной системы (3.1). Эти оценки одновременно показывают, что поскольку  $q = 1 - \pi/6 < 0,5$ , то метод редукции оказывается довольно быстро сходящимся процессом.

Теперь, приняв во внимание (1.11) и следующую формулу:

$$\varphi_{2n+1}^i(\lambda) = -\frac{1}{2} \varphi_{2n+2}(\lambda) + (2n+1) \varphi_{2n}(\lambda) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

будем иметь

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left[ \frac{1}{2} G_{2n+2}(\lambda) - (2n+1) G_{2n}(\lambda) \right] \quad (0 < \lambda < \infty) \quad (3.2)$$

где

$$G_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_n(\mu) d\mu}{\mu - \lambda} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ (-\infty < \lambda < \infty)$$

Отметим, что функции  $G_n(\lambda)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) в пространстве  $L_2(-\infty, \infty)$  образуют полную ортогональную систему функций. Последнее вытекает из того, что преобразование Гильберта в указанном пространстве является унитарным оператором [20]. Чтобы получить их представления, воспользуемся формулами ([25], стр. 193, ф. (2) и стр. 189, ф. (7))

$$H_{2n}(\lambda) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{-1/2}(\lambda^2) \\ L_n^{-1/2}(\lambda) = \sum_{k=0}^n \binom{n-1/2}{n-k} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

где  $L_n^{-1/2}(\lambda)$  — многочлены Чебышева—Лагерра, преобразованием Фурье, а также формулой (24) из [26] (стр. 73). В результате будем иметь

$$G_{2n}(\lambda) = \\ = -\sqrt{2} \Gamma(2m+1) \lambda \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{(n-k)! \Gamma(k+1/2)} \Phi\left(k+1; \frac{3}{2}; -\frac{\lambda^2}{2}\right) \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

где  $\Phi(a; c; \lambda)$  — вырожденная гипергеометрическая функция.

Далее, при помощи формулы (3.2), обладающей, как легко видеть, нужной асимптотикой на бесконечности, из (1.3) для тангенциальных контактных напряжений получим

$$\tau(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G_{2n+2}(\lambda) \cos(\lambda \sqrt{2\xi}) d\lambda - \right.$$

$$- (2n+1) \int_0^{\infty} G_{2n}(\lambda) \cos(\lambda \sqrt{2\xi}) d\lambda \quad (3.5)$$

а из (1.4) для осевых напряжений в струнгере будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = T_0 - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G_{2n+2}(\lambda) \sin(\lambda \sqrt{2\xi}) \frac{d\lambda}{\lambda} - \right. \\ \left. - (2n+1) \int_0^{\infty} G_{2n}(\lambda) \sin(\lambda \sqrt{2\xi}) \frac{d\lambda}{\lambda} \right] \quad (3.6) \end{aligned}$$

Прежде чем записать окончательные выражения  $\tau(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$ , вычислим интегралы

$$M_k(u) = \int_0^{\infty} \lambda \Phi\left(k+1; \frac{3}{2}; -\frac{\lambda^2}{2}\right) \cos \lambda u d\lambda$$

( $k=0, 1, 2, \dots$ )

$$N_k(u) = \int_0^{\infty} \lambda \Phi\left(k+1; \frac{3}{2}; -\frac{\lambda^2}{2}\right) \sin \lambda u d\lambda$$

Для вычисления первого интеграла в формулу 7.663.1 из [21] (стр. 887) положим  $\nu = -1/2$ ,  $\alpha = n-k+1$ ,  $b = 3/2$ ,  $\lambda = 1/2$ ,  $\sigma = 3/4$ , а для второго интеграла в эту же формулу положим  $\nu = 1/2$ ,  $\alpha = n-k+1$ ,  $b = 3/2$ ,  $\lambda = 1/2$ ,  $\sigma = 1/4$ . Тогда

$$M_k(u) = \frac{\pi}{u^2 k!} G_{23}^{21} \left( \frac{u^2}{2} \middle| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, k+1, 3/2 \end{matrix} \right)$$

$$N_k(u) = \frac{\pi}{2uk!} G_{23}^{21} \left( \frac{u^2}{2} \middle| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, k+1, 1/2 \end{matrix} \right)$$

В правых частях этих формул фигурируют  $G$ -функции Мейера [27]. Теперь, подставляя (3.4) в (3.5) и (3.6), окончательно получим

$$\begin{aligned} \tau(\xi) = \frac{\pi^{3/2}}{4\sqrt{\xi}} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{2^k (n-1)!}{(k-1)! (n-k)! \Gamma(k+1/2)} \times \right. \\ \times \frac{1}{\xi} G_{23}^{21} \left( \xi \middle| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, k+1, 3/2 \end{matrix} \right) + \\ \left. + (-1)^{n+1} \frac{2^n}{\Gamma(n+1/2)} \frac{1}{\xi} G_{23}^{21} \left( \xi \middle| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, n+1, 3/2 \end{matrix} \right) \right\} \quad (3.7) \\ (0 < \xi < \infty) \end{aligned}$$

$$\varphi(\xi) = T_0 - 1 + \frac{\pi^{3/2}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{2^k (n-1)!}{(k-1)! (n-k)! \Gamma(k+1/2)} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\sqrt{\xi}} G_{23}^{21} \left( \xi \left| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, k+1, 1/2 \end{matrix} \right. \right) + \right. \\ \left. + (-1)^{n+1} \frac{2^n}{\Gamma(n+1/2)} \frac{1}{\sqrt{\xi}} G_{23}^{21} \left( \xi \left| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, n+1, 1/2 \end{matrix} \right. \right) \right\} \quad (3.8) \\ (0 \leq \xi < \infty)$$

причем первая сумма в (3.7) при  $n = 1$  опускается.

Для рассматриваемых  $G$ -функций Мейера выведем формулы, пригодные при малых и больших  $\xi$ . С этой целью воспользуемся их представлением в виде контурного интеграла Меллина—Бернса ([27], стр. 203). Будем иметь

$$G_{23}^{21} \left( \xi \left| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, l+1, 3/2 \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(1-s) \Gamma(l+1-s) \Gamma(s)}{\Gamma(s-1/2) \Gamma(3/2-s)} \xi^s ds \\ (l = 0, 1, 2, \dots)$$

причем удовлетворяются все условия второго определения контура  $L = (-i\infty, i\infty)$  [27], так как полюсы  $\Gamma(1-s)$  и  $\Gamma(l+1-s)$  расположены справа от  $L$ , а полюсы  $\Gamma(s)$  — слева от  $L$ . Тогда этот интеграл сходится при  $\xi > 0$  и при помощи соотношения  $\Gamma(s-1/2) \times \Gamma(3/2-s) = -\pi / \cos \pi s$  его можно представить в виде

$$G_{23}^{21} \left( \xi \left| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, l+1, 3/2 \end{matrix} \right. \right) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(1-s) \Gamma(l+1-s) \Gamma(s) \cos \pi s \xi^s ds \\ (\xi > 0)$$

Замкнем контур  $L$  справа и заметим, что точки  $s = 1, 2, \dots, l$  для подынтегральной функции являются простыми полюсами, а точки  $s = l+1, l+2, \dots, l+p$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ) — двукратными полюсами. Воспользовавшись представлением гамма-функции в виде суммы мероморфной и целой функций ([27], стр. 16, ф. (7) и (8))

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z)$$

где

$$P(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! (z+p)}, \quad Q(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

по теории вычетов после некоторых выкладок получим следующее асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} G_{23}^{21} \left( \xi \left| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, l+1, 3/2 \end{matrix} \right. \right) &\cong \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{l-1} (l-r-1)! \xi^r - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \xi^{p+l} \left\{ \frac{1}{p!} \left[ 2\text{Ei}(-1) + \frac{1}{e} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q q! + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{e} \sum_{q=0}^{l+p-1} (-1)^q q! \right] + \sum_{q=1}^p \frac{(-1)^q}{(p-q)! q} - \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(p+q)! q} \Big\} \quad (l=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $\text{Ei}(x)$  — интегральная показательная функция [25] и все суммы, верхние индексы которых меньше нижних, опускаются.

Аналогичным образом получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{V\xi} G_{23}^{21} \left( \xi \left| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, l+1, 1/2 \end{matrix} \right. \right) &\cong \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{(l-r-1)!}{r+1/2} \xi^{r+1/2} - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \xi^{p+l+1/2}}{l+p+1/2} \left\{ \frac{1}{p!} \left[ 2\text{Ei}(-1) + \frac{1}{e} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q q! + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{e} \sum_{q=0}^{l+p-1} (-1)^q q! \right] + \sum_{q=1}^p \frac{(-1)^q}{(p-q)! q} - \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(p+q)! q} \Big\} \quad (l=0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Замыкая же контур слева, будем иметь

$$\begin{aligned} G_{23}^{21} \left( \xi \left| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, l+1, 3/2 \end{matrix} \right. \right) &\cong -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{l!}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(l+p)!}{\xi^p} \right] \\ G_{23}^{21} \left( \xi \left| \begin{matrix} 1, 3/2 \\ 1, l+1, 1/2 \end{matrix} \right. \right) &\cong \frac{1}{\pi} \left[ l! + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(l+p)!}{(p+1/2) \xi^p} \right] \quad (\xi \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Формулами (3.9) — (3.11) даются асимптотические представления  $G$ -функций для малых и больших  $\xi$ , при помощи которых из (3.7) и (3.8) получим соответствующие асимптотические представления для  $\tau(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$ . С другой стороны, при помощи (3.9) легко обнаружить, что в (3.7) явным образом содержится особенность при  $\xi = 0$  в виде квадратного корня  $V\xi$ . При этом для коэффициента интенсивности напряжений  $\tau(\xi)$  в точке  $\xi = 0$  получим

$$A_1 = \lim_{\xi \rightarrow +0} V\xi \tau(\xi) \quad (3.12)$$

где  $\tau(\xi)$  выражается формулой (3.7).

В частном случае, когда стрингер нагружен только на своем конце, имеем  $f(\lambda) = \gamma/\lambda$  и, следовательно, при помощи (1.17) и (1.20) можем записать

$$a_m = \eta_{m-1} = \frac{V\pi}{3} \frac{\gamma(m-1)!}{(2m-1)!} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right) H_{2m-1}(\lambda) d\lambda$$



Далее воспользовавшись формулами (3.3), а также формулой 7.414.5 из [21] (стр. 858) после простых операций получим

$$a_m = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+1/2)} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)} \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3.13)$$

В указанном частном случае проведены числовые расчеты, которые осуществлялись на ЭВМ «ЕС—1022». Сначала методом редукции с точностью  $10^{-6}$  решалась бесконечная система (3.1) при правой части (3.13), притом для достижения этой точности необходимо было удержать первые 25—30 уравнений. Затем по формуле (3.7) при помощи (3.9) и (3.11) вычислялись значения  $\tau(\xi)$  при малых и больших  $\xi$ . Результаты приведены в следующей таблице:

$\xi$	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	1,2	1,5	2	2,5	3
$\tau(\xi)$	8,597	2,024	1,212	0,787	0,475	0,293	0,210	0,136	0,097	0,074

С возрастанием  $\xi$  тангенциальные контактные напряжения  $\tau(\xi)$  строго монотонно убывают, что укладывается в рамках уже известных представлений о закономерностях их изменения. Для коэффициента интенсивности, выражающегося формулой (3.12), получилось  $A_1 = 0,878$ .

Далее по формуле (3.8) при помощи (3.10) в некоторых точках была вычислена значения  $\varphi(\xi)$ , которые с обратным знаком дают значения осевых напряжений в стрингере. Эти вычисления дали  $\varphi(0,001) = -0,934$ ,  $\varphi(0,005) = -0,866$ ,  $\varphi(0,01) = -0,812$ ,  $\varphi(1) = 0,4$ . Последние с обратным знаком весьма близки к результатам, приведенным в [3].

В заключение приношу искреннюю благодарность М. Г. Крейну и Г. Я. Попову за проявленный интерес к работе и за ее обсуждение.

В. В. ШИШОВСКИ

ԿԻՍՍԱՆՎԵՐՋ ՎԵՐԴՐԱԿԻ ԵՎ ԿԻՍՍՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋԵՎ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ  
ՓՈՆԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒՄՄԱՆԸ ՄԻ ՆՈՐ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հիշերերտի մի ինտեղրալ առնչության հիման վրա կառուցվում է կիսաան-վերջ բարակ վերդրակի և առաձգական կիսահարթության կամ հարթության միջև կոնտակտային փոխազդեցության խնդրի նոր տիպի փակ լուծումը, որը արցահայտորեն պարունակում է շոշափող կոնտակտային լարումներին բնորոշ եզակիությունը վերդրակի ծայրակետում: Լուծումը ներկայացվում է նշված եզակիությունը բացահայտորեն պարունակող Ֆուրյեի կոսինուս-ինտեգրալով, որից հետո որոշիչ ինտեգրողիֆերենցիալ հավասարումը բերվում է կոնտակտային լարումների Ֆուրյեի կոսինուս-ձևափոխության նկատմամբ ֆունկցիոնալ հավասարման: Էրմիտի ֆունկցիաների օգտագործման

օգնութիւնը վերջիվերջը ստացվում է ինդեքսների տարրերութիւնից կախ-  
ված կորիզով զծային հաճախարումների անվերջ սխտեմ: Այդ սխտեմի փակ  
լուծումը կառուցվում է Մ. Գ. Կրեյնի մեթոդով:

Շոշափող կոնտակտային լարումների և վերդրակում առանցքային լարում-  
ների համար ստացված են պարզ բանաձևեր: Բերված են թվային արդյունքներ:

## A NEW APPROACH TO THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF CONTACT INTERACTION BETWEEN HALF-INFINITE STRINGER AND HALF-PLANE

S. M. MKHITARIAN

### S u m m a r y

A new closed solution of the contact problem on transferring the load from the half-infinite stringer to the elastic half-plane or plane is built. Finally, the problem is reduced to an infinite system of linear equations with a nucleus, depending on the difference of the indexes.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweister Verbindungen.—Ingr. Arch., 1932, v. 3, No. 2.
2. Buell E. L. On the distribution of plane stress in a semiinfinite plate with partially stiffened edge.—J. Math. and Phys., 1948, 26.
3. Kottler W. T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, v. 8, No. 2.
4. Brown E. H. The diffusion of load from a stiffener into an infinite elastic sheet.—Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1957, v. 239, No. 1218.
5. Hens A. M. De in leiding van een Kracht op een Verstijver in een half-oneindige plaat. Technische Hogeschool, Delft, 1957.
6. Каландия А. И. О напряженном состоянии в пластинах, усиленных ребрами жесткости.—ПММ, 1969, т. 33, № 3.
7. Воробьев В. А., Попов Г. Я. Контактная задача для упругой полуплоскости и сцепленного с ней полубесконечного упругого стержня.—ПММ, 1970, т. 34, № 2.
8. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. К контактной задаче о двух полубесконечных пластинах, соединенных полубесконечной упругой накладкой.—Сб. статей «Механика деформируемых тел и конструкций», М.: Машиностроение, 1975.
9. Александров В. М., Кучеров В. А. О методе ортогональных полиномов в плоских смешанных задачах теории упругости.—ПММ, 1970, т. 34, № 4.
10. Попов Г. Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости.—ПММ, 1969, т. 33, № 3.
11. Попов Г. Я., Тихоненко А. Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином.—ПММ, 1974, т. 38, № 2.
12. Банцуря Р. Д. Контактная задача для клина с упругим креплением.—Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 4.
13. Нуллер Б. М. Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменного сечения.—Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5.
14. Нуллер Б. М. Деформация упругого клина, подкрепленного балкой.—ПММ, 1974, т. 38, № 5.
15. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.

16. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением.— ПММ, 1968, т. 32, № 4.
17. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.— Успехи матем. н., 1958, т. 13, № 5.
18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
19. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований. СМБ, т. II. М.: Наука, 1970.
20. Гигмари Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
21. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
22. Ландош К. Приближенные методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.
23. Попов Г. Я. О сведении интегральных уравнений теории упругости к бесконечным системам.— ПММ, 1972, т. 36, № 4.
24. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
25. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Высшие трансцендентные функции. СМБ, т. II. М.: Наука, 1974.
26. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований. СМБ, т. I. М.: Наука, 1969.
27. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. СМБ, т. I. М.: Наука, 1973.

Институт механики  
АН Арм.ССР

Поступила в редакцию  
4. V. 1981