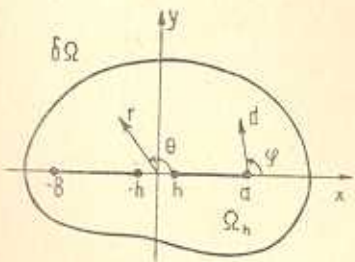


ИЗМЕНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ  
 ПРИ РАЗРУШЕНИИ ПЕРЕМЫЧКИ МЕЖДУ ДВУМЯ  
 КОЛЛИНЕАРНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

НАЗАРОВ С. А., РОМАШЕВ Ю. А.

В настоящей работе рассматривается плоская задача классической теории упругости для области  $\Omega$ , ослабленной двумя разрезами, расположенными на одной прямой, и находящейся под действием произвольной внешней нагрузки. Предполагается, что длина  $2h$  перемычки между этими трещинами мала. При помощи решений задачи в области  $\Omega$  с разрезом, образованным слиянием двух первоначальных трещин, и задачи на плоскости  $R^2$ , ослабленной двумя полубесконечными разрезами, конструируется асимптотика решения исходной задачи. Исследуется аналитическая зависимость от  $h$  коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин, имеющая вид  $d_1 + d_2(\log h + C)^{-1} + O(h)$  в дальних концах и  $d_3 h^{-1/2}(\log h + C)^{-1} + O(h^{1/2})$  в ближних. Такая зависимость от  $h$  связана с неразрешимостью в классе убывающих функций предельной задачи для внутреннего разложения. Поэтому для сращивания асимптотик необходимо [1, 2] привлечь логарифмически растущие решения однородных предельных задач. Указанные решения и приводят к возникновению  $\log h$  в представлении приближенного решения задачи.

1. *Постановка задачи.* Пусть  $\Omega$  — либо плоскость  $R^2$ , либо под-область  $R^2$  с гладкой (класса  $C^\infty$ ) границей, содержащая отрезок  $M = \{x = (x_1, x_2) \in R^2: x_2 = 0, x_1 \in [-b, a]\}$ , где  $a, b$  — положительные числа. Допустим, что  $a$  и  $b$  имеют порядок  $O(1)$ , характерный размер  $l$  области  $\Omega$  масштабированием также сведен к единице. Обозначим через  $\Omega_0$  область  $\Omega \setminus M$ , а через  $\Omega_h$  при  $h \in (0, 1)$  область  $\Omega_0 \cup \{x \in R^2: x_2 = 0, x_1 \in (-h, h)\}$ . В области  $\Omega_h$  рассмотрим задачу классической теории упругости\*



Фиг. 1.

$$\Delta u^h + (1 - 2\nu)^{-1} \nabla \nabla \cdot u^h = 0 \text{ в } \Omega_h \quad (1.1)$$

$$\sigma_{nn}(u^h) = T_n, \quad \tau_{nn}(u^h) = T_n \text{ на } \partial\Omega_h \quad (1.2)$$

где  $u$  — вектор смещения,  $[\sigma_{ij}(u)]$  — тензор напряжений;  $T$  — вектор

\* Если область  $\Omega$  не ограничена, то условия на бесконечности понимаются в смысле принадлежности энергетическому классу.

внешней нагрузки,  $n$  — внутренняя нормаль,  $s$  — координата на  $\partial\Omega$ . Предположим, что главный вектор и главный момент внешней нагрузки равен нулю при любом  $h$ . Тогда существует решение  $u^h$  задачи (1.1), (1.2), единственное с точностью до смещений и поворота  $\Omega_h$  как жесткого тела. Построим асимптотику решения  $u^h$  при  $h \rightarrow 0$ . Для этого будет использован алгоритм работы [1], в которой изучена асимптотика решений эллиптических в [смысле А. Дуглиса — Л. Ниренберга] краевых задач в областях с нерегулярно возмущенной границей.

2. *Построение асимптотики.* В качестве основного приближения к  $u^h$  естественно выбрать решение  $u^\circ$  задачи

$$\Delta u^\circ + (1 - 2\nu)^{-1} \nabla \nabla \cdot u^\circ = 0 \quad \text{в } \Omega_0 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{11}(u^\circ) = T_1, \quad \sigma_{nn}(u^\circ) = T_n \quad \text{на } \partial\Omega_0 \quad (2.2)$$

Вектор-функция  $u^\circ$  не принадлежит, вообще говоря, пространству  $C(\Omega_h)$  при  $h > 0$ , то есть  $u^\circ(0, +0) \neq u^\circ(0, -0)$ . Поэтому вблизи точки  $(0, 0)$  поведение вектора  $u^h$  описывается при помощи решения другой задачи. Сделаем замену координат  $x \rightarrow \xi = h^{-1}x$ . Область при этой замене и последующем переходе к  $h = 0$  трансформируется в плоскость с двумя полубесконечными разрезами  $\Pi = R^2 \setminus \{ \xi \in R^2: \xi_2 = 0, \xi_1 \in (-1, 1) \}$ . Для использования метода сращиваемых асимптотических разложений [3] необходимо построить векторное поле  $w$ , удовлетворяющее однородным уравнениям равновесия в  $\Pi$ , граничным условиям  $\sigma_{12}(w) = \sigma_{22}(w) = 0$  на  $\partial\Pi$  и условиям на бесконечности

$$\begin{aligned} w(\xi) \rightarrow u^+ = u^\circ(0, +0) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty, \quad \xi_2 > 0 \\ w(\xi) \rightarrow u^- = u^\circ(0, -0) \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty, \quad \xi_2 < 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Нетрудно проверить, что при  $u^+ \neq u^-$  такого поля не существует. Дело в том, что для векторного поля  $w$  с нечетной (по  $\xi_2$ ) первой компонентой (или нечетной второй компонентой), удовлетворяющего перечисленным выше условиям и допускающего оценку  $O(1)$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$ , справедливы равенства  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = \text{const}$  (или соответственно  $w_1 = \text{const}$ ,  $w_2 = 0$ ). Однако существуют вектор-функции  $\Gamma^1$  и  $\Gamma^2$  такие, что

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma^j + (1 - 2\nu)^{-1} \nabla \nabla \cdot \Gamma^j = 0 \quad \text{в } \Pi \\ \sigma_{12}(\Gamma^j) = \sigma_{22}(\Gamma^j) = 0 \quad \text{на } \partial\Pi \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Gamma_k^j(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{\delta_{jk}} \Gamma_k^j(\xi_1, -\xi_2), \quad \xi \in \Pi, \quad j, k = 1, 2$$

и растущие на бесконечности не быстрее любой положительной степени  $r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ . Матрица  $\Gamma = [\Gamma_k^j]$  отличается постоянным множителем от матрицы Грина для задачи классической теории упругости,

полюсы расположены в точках  $(\infty, +\infty)$  и  $(\infty, -\infty)$ , и допускает при  $\xi_2 > 0$ ,  $\rho \rightarrow +\infty$  асимптотическое представление

$$\Gamma(\xi) = (1-\nu)^{-1} \bar{T}(\rho, \theta)/2 + \gamma + O(\rho^{-1}) \quad (2.5)$$

Здесь  $\theta$  — полярный угол из интервала  $(-\pi, \pi)$ ,  $\gamma = \|\gamma_k^1\|$  — постоянная матрица,

$$\bar{T}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} 2(1-\nu) \log \rho + \sin^2 \theta, & -(1-2\nu)\theta - \sin \theta \cos \theta \\ (1-2\nu)\theta - \sin \theta \cos \theta, & 2(1-\nu) \log \rho + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Асимптотику вектор-функции  $u^h$  в  $\sqrt{h}$ -окрестности точки  $(0, 0)$  будем искать в виде

$$u^h(x) \sim A_1 \Gamma^1(h^{-1}x) + A_2 \Gamma^2(h^{-1}x) + (B_1, B_2) \quad (2.7)$$

где  $A_j$  и  $B_j$  — некоторые постоянные, подлежащие определению. Так как правая часть формулы (2.7) содержит логарифмически растущее слагаемое, то для описания асимптотики  $u^h$  вне  $\sqrt{h}$ -окрестности точки  $(0, 0)$  вектора  $u^0$  недостаточно. Введем матрицу  $G$ , каждый столбец которой удовлетворяет однородным уравнениям (2.1) в  $\bar{\Omega}_0 \setminus \{(0, 0)\}$  и однородным граничным условиям (2.2) на  $\partial\bar{\Omega}_0 \setminus \{(0, 0)\}$ . Пусть еще  $G$  допускает асимптотическое представление

$$G(x) = \pm (1-\nu)^{-1} \bar{T}(r, \theta)/2 + g^\pm + O(r), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow 0, \quad \pm x_2 > 0 \quad (2.8)$$

Столбец  $G^2$  реализуется как векторное поле смещений в  $\Omega_0$  под действием симметричных нормальных сосредоточенных в точках  $(0, +0)$  и  $(0, -0)$  нагрузок, а  $G^1$  — как векторное поле смещений в  $\Omega_0$  под действием антисимметричных касательных сосредоточенных нагрузок, приложенных к точкам  $(0, +0)$  и  $(0, -0)$ .

Вне  $\sqrt{h}$ -окрестности точки  $(0, 0)$  асимптотику вектор-функции  $u^h$  будем искать в виде

$$u^h(x) \sim D_1 G^1(x) + D_2 G^2(x) + u^0(x) \quad (2.9)$$

Найдем постоянные  $A_j$ ,  $B_j$  и  $D_j$ ,  $j=1, 2$ , из условия совпадения асимптотик (2.7) и (2.9) вектора  $u^h$  в зоне  $r \sim \sqrt{h}$ . Рассмотрим, например, компоненту  $u_1^h$  при  $x_2 > 0$ . Правая часть выражения (2.9) принимает вид

$$u_1^+ + D_1 (\log r + (1-\nu)^{-1} \sin^2 \theta/2) - D_2 (1-\nu)^{-1} [(1-2\nu)\theta + \sin \theta \cos \theta]/2 + D_1 g_1^1 + D_2 g_1^2 + O(\sqrt{h}) \quad (2.10)$$

а правая часть (2.7) — вид

$$B_1 + A_1 (\log r + (1-\nu)^{-1} \sin^2 \theta/2) - A_2 (1-\nu)^{-1} [(1-2\nu)\theta + \sin \theta \cos \theta]/2 + A_1 (\gamma_1^1 - \log h) + A_2 \gamma_1^2 + O(\sqrt{h}) \quad (2.11)$$

Необходимым условием совпадения главных членов в (2.10) и (2.11) являются равенства  $A_j = D_j$ ,  $j=1, 2$ . Приравняв оставшиеся постоянные, получим уравнение

$$A_1(-\log h + \gamma_1^+ - g_1^+) + A_2(\gamma_1^+ - g_1^+) + B_1 = u_1^+ \quad (2.12)$$

Аналогично, рассматривая  $u_1^+$  при  $x_2 < 0$  и  $u_2^+$  при  $x_2 > 0$  или при  $x_2 < 0$ , имеем

$$\begin{aligned} A_1(\log h - \gamma_1^- - g_1^-) + A_2(\gamma_1^- - g_1^-) + B_1 &= u_1^- \\ A_1(\gamma_2^+ - g_2^+) + A_2(-\log h + \gamma_2^+ - g_2^+) + B_2 &= u_2^+ \\ A_1(\gamma_2^- - g_2^-) + A_2(\log h - \gamma_2^- - g_2^-) + B_2 &= u_2^- \end{aligned} \quad (2.13)$$

Решением алгебраической системы (2.12), (2.13) являются постоянные

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(u_1^- - u_1^+) P_2(h) - (u_2^- - u_2^+) Q_1\} / (P_1(h) P_2(h) - Q_1 Q_2)^{-1} \\ A_2 &= \{(u_2^- - u_2^+) P_1(h) - (u_1^- - u_1^+) Q_2\} / (P_1(h) P_2(h) - Q_1 Q_2)^{-1} \\ B_1 &= \{u_1^+ + u_1^- + (g_1^+ + g_1^-) A_1 + (g_1^{2+} + g_1^{2-} - 2\gamma_1^+) A_2\} / 2 \\ B_2 &= \{u_2^+ + u_2^- + (g_2^+ + g_2^-) A_1 + (g_2^{2+} + g_2^{2-}) A_2\} / 2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(h) &= 2 \log h - 2\gamma_1^+ + g_1^+ - g_1^-, & Q_1 &= g_1^{2+} - g_1^{2-} \\ P_2(h) &= 2 \log h - 2\gamma_2^+ + g_2^+ - g_2^-, & Q_2 &= g_2^{2+} - g_2^{2-} \end{aligned} \quad (2.15)$$

3. *Асимптотика смещений  $u^h$* . Выберем в качестве асимптотического решения задачи (1.1), (1.2) вектор-функцию  $U^h$ , определяемую равенствами

$$\begin{aligned} U^h(x) &= \chi_1(rh^{-1}) [u^0(x) + A_1 G^1(x) + A_2 G^2(x)] + \\ &+ \chi_2(r) [(B_1, B_2) + A_1 \Gamma^1(xh^{-1}) + A_2 \Gamma^2(xh^{-1})] - \\ &- \chi_1\left(\frac{r}{h}\right) \chi_2(r) \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$M_1 = (1 - \nu) \{A_1 \bar{T}^1(r, \theta) + A_2 \bar{T}^2(r, \theta)\} / 2 + A_1 g^{1+} + A_2 g^{2+} + u^+ \quad \text{при } x_2 > 0$$

$$M_2 = (\nu - 1) \{A_1 \bar{T}^1(r, -\theta) + A_2 \bar{T}^2(r, -\theta)\} / 2 + A_1 g^{1-} + A_2 g^{2-} + u^- \quad \text{при } x_2 < 0$$

Здесь  $\chi_1$  и  $\chi_2$  — срезающие функции из  $C^\infty(R^1)$  такие, что

$$\chi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 4, \\ 0 & \text{при } t < 2, \end{cases} \quad \chi_2\left(\frac{t}{\min(a, b)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 1/2 \\ 1 & \text{при } t < 1/4 \end{cases}$$

Из результатов работ [1], [4] вытекает  
Теорема I. а) Справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_h} \varepsilon_{ij} (u^h - U^h) \varepsilon_{ij} (u^h - U^h) dx < ch^2$$

в котором постоянная  $c$  не зависит от  $h$ , а  $u^h$  — любое решение задачи (1.1), (1.2).

б) Выполняется оценка

$$\max |R_h^{\delta}(x) \sigma_{ij} (u^h - U^h)| \leq c(\delta) h, \quad ij = 1, 2 \quad (3.2)$$

где  $R_h^{\delta}(x) = \min \{1, d_1^{(1+\delta)/2}, d_2^{(1+\delta)/2}, h+r, [hd_3(h)]^{(1+\delta)/2}, [hd_4(h)]^{(1+\delta)/2}\}$ ,  $d_1, d_2, r, d_3(h), d_4(h)$  — расстояния от точки  $x$  до точек  $(-b, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(-h, 0)$  и  $(h, 0)$  соответственно;  $\delta$  — произвольное положительное число; постоянная  $c(\delta)$  зависит от  $\delta$ , но не от  $h$ .

в) Предположим, что векторы  $u^h$  и  $U^h$  подчинены условиям

$$\int_{\Omega_h} (u^h - U^h) dx = 0, \quad \int_{\Omega_h} \text{rot} (u^h - U^h) dx = 0 \quad (3.3)$$

Тогда имеет место формула

$$\max |u^h - U^h| \leq ch$$

Здесь постоянная  $c$  не зависит от  $h$ .

Отметим, что неравенство (3.2) означает, что вне фиксированных окрестностей точек  $(0, 0)$ ,  $(-b, 0)$  и  $(a, 0)$  модуль разности напряжений, построенных по векторам  $u^h$  и  $U^h$  есть величина  $O(h)$ .

Формула (3.1) содержит рациональные функции от  $\log h$ . Асимптотические разложения такого вида в задачах о малых возмущениях границы области возникали в работах [5], [2]. Асимптотика решений эллиптических систем в областях с малыми локальными возмущениями границы получена в [1].

4. Асимптотика коэффициентов интенсивности. Выведем из формулы (3.1) для приближенного решения  $U^h$  задачи (1.1), (1.2) асимптотику по  $h$  коэффициентов интенсивности смещений  $u^h$  в вершинах трещины. Достаточно рассмотреть лишь правую трещину, то есть точки  $(a, 0)$  и  $(h, 0)$ .

Обозначим через  $K_a^j(V)$ ,  $j = 1, 2$ , коэффициенты в асимптотике вектора смещений

$$V(x) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + K_a^1(V) \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{d}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) (1 - 2\nu + \sin^2(\varphi/2)) \\ \sin(\varphi/2) (2 - 2\nu - \cos^2(\varphi/2)) \end{pmatrix} + \\ + K_a^2(V) \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{d}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin(\varphi/2) (2 - 2\nu + \cos^2(\varphi/2)) \\ \cos(\varphi/2) (1 - 2\nu + \sin^2(\varphi/2)) \end{pmatrix} + O(d), \quad d \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

где  $c_j = \text{const}$ ,  $(d, \varphi)$  — полярная система координат с центром в точке  $(a, 0)$  такая, что берега разреза  $M$  задаются уравнениями  $\varphi = \pm \pi$ .

Обозначим коэффициенты в разложении  $V$  вида (4.1) вблизи точки  $(h, 0)$  через  $K_h^j(V)$  и  $\tilde{K}_h^j(V)$ . Еще понадобятся коэффициенты  $\tilde{K}_1^j(\Gamma^i)$  для векторов  $\Gamma^1(\xi)$  и  $\Gamma^2(\xi)$  в точке  $(1, 0)$ .

Следствием теоремы 1 является

**Теорема 2.** *Справедливы формулы*

$$K_a^j(u^h) = K_a^j(U^h) + A_1 K_a^j(G^1) + A_2 K_a^j(G^2) + O(h)$$

$$K_h^j(u^h) = h^{-1/2} \{A_1 \tilde{K}_1^j(\Gamma^1) + A_2 \tilde{K}_1^j(\Gamma^2)\} + O(h^{1/2})$$

Здесь  $j = 1, 2$ ; постоянные  $A_1$  и  $A_2$  определены равенствами (2.14), (2.15).

Аналогичные формулы имеют место и для коэффициентов интенсивности в точках  $(-b, 0)$  и  $(-h, 0)$ . Для того, чтобы получить их из (4.2) нужно заменить  $\tilde{K}_1^j$  на  $\tilde{K}_{-1}^j$ , а индекс  $a$  на  $-b$ .

**5. Построение матрицы  $\Gamma$ .** В этом разделе будет найдена матрица  $\Gamma$ , столбцы которой являются решениями задач (2.4), и числовая матрица  $\gamma$  из формулы (2.5). При этом используется метод построения однородных решений задач теории упругости, приведенный в [6]. А именно, рассматривается задача

$$\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = iN\theta(x_1), \quad z \in \partial\Pi \quad (5.1)$$

где  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\varphi, \psi$  — функции Гурса,  $\theta$  — функция Хевисайда, а  $N$  — некоторая комплексная постоянная. При помощи преобразования Жуковского  $2z = \zeta + \zeta^{-1}$  перейдем\* из области  $\Pi$  в верхнюю полуплоскость  $S^+$  комплексной переменной  $\zeta \in S$ . Задача (5.1) в переменных  $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$  переписывается в виде

$$\varphi_*(\zeta) + \overline{\psi_*(\zeta)} = \begin{cases} iN, & \zeta_1 > 0, \quad \zeta_2 = 0 \\ 0, & \zeta_1 < 0, \quad \zeta_2 = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Здесь

$$\varphi_*(\zeta) = \varphi(z(\zeta)), \quad (5.3)$$

$$\psi_*(\zeta) = \psi(z(\zeta)) + \varphi'_*(\zeta)(\zeta^2 + 1)(\zeta^2 - 1)^{-1}\zeta$$

Решением задачи (5.2) являются функции

$$\varphi_*(\zeta) = -\frac{N}{2\pi} \log \zeta + S_1, \quad \psi_*(\zeta) = \frac{\overline{N}}{2\pi} \log \zeta + S_2 \quad (5.4)$$

где  $S_1, S_2$  — произвольные комплексные постоянные такие, что  $S_1 + \overline{S_2} = iN$ . Из (5.3) и (5.4) следует

\* При этом нижний берег разреза  $\{x \in \mathbb{R}^2: x_2 = 0, x_1 > 1\}$  трансформируется в отрезок  $\{\zeta \in S: \zeta_2 = 0, \zeta_1 \in (0, 1)\}$ , а верхний переходит в себя.

$$\varphi(z) = -(2\pi)^{-1} N \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) + S_1$$

$$\psi(z) = \frac{\bar{N}}{2\pi} \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) + \frac{Nz}{2\pi \sqrt{z^2 - 1}} + S_2$$

Используя соотношения между компонентами смещений  $W_1, W_2$  и функциями Гурса, получим

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ -(1+x) N_1 \log|z + \sqrt{z^2 - 1}| + 2N_1 x_2 \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} + \right. \\ \left. + 2N_2 x_2 \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} + N_2 (x-1) \arg(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right\} + \\ + \frac{1}{2\mu} (x \operatorname{Re} S_1 - \operatorname{Re} S_2)$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ -(1+x) N_2 \log|z + \sqrt{z^2 - 1}| - 2N_2 x_2 \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} + \right. \\ \left. + 2N_1 x_2 \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} - N_1 (x-1) \arg(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right\} + \\ + \frac{1}{2\mu} (x \operatorname{Im} S_1 + \operatorname{Im} S_2) \quad (5.5)$$

где  $\mu$  — коэффициент Ламе,  $x = 3 - 4\nu$ . Правые части выражений (5.5) зависят от трех комплексных постоянных:  $N = N_1 + iN_2$ ,  $S_1$  и  $S_2$ . Выбирая их надлежащим образом, получим выражения для компонент матрицы  $\Gamma$ :

$$(\Gamma_1^1, \Gamma_2^1) = (W_1, W_2) \text{ при } N = -\frac{\pi\mu}{1-\nu}, \quad S_1 = -\frac{i\pi\mu}{(1-\nu)(x+1)}$$

$$S_2 = \frac{i\pi\mu x}{(1-\nu)(x+1)} \quad (5.6)$$

$$(\Gamma_1^2, \Gamma_2^2) = (W_1, W_2) \text{ при } N = -\frac{i\pi\mu}{1-\nu}, \quad S_1 = \frac{\pi\mu}{(1-\nu)(x+1)}$$

$$S_2 = \frac{\pi\mu x}{(1-\nu)(x+1)}$$

Сравнивая (5.6) с асимптотической формулой (2.5), получим

$$\gamma_1^1 = \log 2; \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^1 = 0; \quad \gamma_2^2 = \log 2 - 1/2(1-\nu) \quad (5.7)$$

Кроме того, вычисляя коэффициенты интенсивности  $K_1^i(\Gamma^2)$  векторов  $\Gamma^1$  и  $\Gamma^2$  в точке  $(1, 0)$ , имеем

$$\tilde{K}_1^2(\Gamma^1) = \tilde{K}_2^1(\Gamma^2) = \frac{\sqrt{\pi\mu}}{1-\nu}; \quad \tilde{K}_1^1(\Gamma^1) = \tilde{K}_1^2(\Gamma^2) = 0 \quad (5.8)$$

6. Две трещины в плоскости. Пусть  $\Omega$  — плоскость  $R^2$ . При помощи формул, приведенных в книге [7] § 2, гл. XI, построим матрицу  $G$  (см. п. 2 и (2.8)). Ее столбец  $G^1$  (или  $G^2$ ) является решением задачи о трещине  $M$  под действием касательных антисимметричных (или нормальных симметричных) нагрузок, сосредоточенных в точке 0. Введем функции комплексного аргумента  $z$ :

$$Z(z) = -\mu \sqrt{ab} (1-\nu)^{-1} z^{-1} (z^2 - z(a-b) - ab)^{-1/2}$$

$$Z^0(z) = -\frac{i\mu}{1-\nu} \left\{ -\log z - \log(a+b) + i \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} + \right.$$

$$\left. + \log[-2\sqrt{ab}\sqrt{ab + (a-b)z - z^2} + 2ab + z(a-b)] \right\} \quad (6.1)$$

Эти функции исчезают на бесконечности и связаны соотношением  $Z = dZ^0/dz$ . Положим

$$G = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} 2(1-\nu) \operatorname{Im} Z^0 + y \operatorname{Re} Z, & (1-2\nu) \operatorname{Re} Z^0 - y \operatorname{Im} Z \\ -(1-2\nu) \operatorname{Re} Z^0 - y \operatorname{Im} Z, & 2(1-\nu) \operatorname{Im} Z^0 - y \operatorname{Re} Z \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Сопоставляя формулы (6.1), (6.2) с асимптотическим представлением (2.8) матрицы  $G$ , получим, что компоненты числовых матриц  $g^\pm$  задаются равенствами

$$g_1^{1+} = -g_1^{1-} = -\log \frac{4ab}{a+b}, \quad g_2^{2+} = -g_2^{2-} = -\log \frac{4ab}{a+b} - \frac{1}{2(1-\nu)}$$

$$g_2^{1+} = -g_1^{2-} = -g_1^{2+} = g_2^{1-} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} \quad (6.3)$$

Кроме того, вычисляя коэффициенты интенсивности  $K_a^j(G^p)$  векторов  $G^1$  и  $G^2$  в точке  $(a, 0)$ , имеем

$$K_a^2(G^1) = K_a^1(G^2) = -\frac{\mu}{1-\nu} \sqrt{\frac{2\pi b}{a(a+b)}}, \quad K_a^1(G^1) = K_a^2(G^2) = 0 \quad (6.4)$$

Итак, для того, чтобы воспользоваться формулами (3.1) и (4.2) для асимптотики решения и коэффициентов интенсивности напряжений, необходимо найти значения  $u^\pm$  (см. формулы (2.3), (2.14), (2.15)). Для определенности рассмотрим задачу о растяжении трещин  $[-b, -h]$  и  $[h, a]$  нормальной симметричной нагрузкой  $q \in C([-b, a])$ . Тогда [7] справедливо представление

$$u = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} (1-2\nu) \operatorname{Re} \tilde{Z}^0 - y \operatorname{Im} \tilde{Z} \\ 2(1-\nu) \operatorname{Im} \tilde{Z}^0 - y \operatorname{Re} \tilde{Z} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

где



$$\tilde{Z}(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{(z-a)(z+b)}} \int_{-b}^a \frac{q(\xi) \sqrt{(a-\xi)(b+\xi)}}{z-\xi} d\xi$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^0(z) = & \frac{i}{\pi} \int_{-b}^a q(\xi) \left[ \log h \left\{ \frac{2(a-\xi)(\xi+b)}{z-\xi} - 2\xi + a - b - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2((a-\xi)(b+\xi))((a-\xi)(b+\xi)(z-\xi)^{-2} - (2\xi+b-a)(z-\xi)^{-1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 1) \right\} - \log \left| -2i \sqrt{(a-\xi)(b+\xi)} - 2\xi + a - b \right| \right] d\xi \end{aligned}$$

Вектор  $\mu^\pm$  вычисляется как предел правой части равенства (6.4), при  $z \rightarrow \pm i0$ . Отметим, что  $u_1^- = u_1^+$ .

Приведем, наконец, выражение для коэффициентов интенсивности в вершинах трещин  $[h, a]$  и  $[-b, -h]$  и при постоянной нагрузке  $q(x) = q^0$ . Из формул (2.14), (2.15), (4.2), (5.7), (5.8), (6.3) и (6.4) получим

$$K_a^1 = q^0 \sqrt{\pi \frac{a+b}{2}} \left\{ 1 + \frac{2b}{a+b} \left( \log \frac{8ab}{h(a+b)} \right)^{-1} \right\} + O(h) \quad (6.6)$$

$$K_h^1 = q^0 \sqrt{\pi \frac{ab}{h}} \left( \log \frac{8ab}{h(a+b)} \right)^{-1} + O(\sqrt{h}) \quad (6.7)$$

$$K_{-b}^1 = q^0 \sqrt{\pi \frac{a+b}{2}} \left\{ 1 + \frac{2a}{a+b} \left( \log \frac{8ab}{h(a+b)} \right)^{-1} \right\} + O(h) \quad (6.8)$$

$$K_{-h}^1 = q^0 \sqrt{\pi \frac{ab}{h}} \left( \log \frac{8ab}{h(a+b)} \right)^{-1} + O(\sqrt{h}) \quad (6.9)$$

### 7. Некоторые замечания:

1) В случае  $\Omega = R^2$  и трещин одинаковой длины (то есть  $a = b$ ) известны [8], [9] точные формулы для коэффициентов интенсивности

$$K_a^1 = q^0 \sqrt{\frac{\pi a}{s}} \left( 1 - \frac{E(s)}{K(s)} \right) \quad (7.1)$$

$$K_h^1 = q^0 \sqrt{\frac{\pi}{h} \frac{a^2 E(s) K(s)^{-1} - h^2}{1 - a^2 - h^2}} \quad (7.2)$$

где  $s = \sqrt{1 - ha^{-2}}$ ;  $K, E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Используя асимптотические представления [10], с. 919, для этих интегралов, находим

$$\frac{E(s)}{K(s)} = \frac{1}{\log(4ah^{-1})} + O(h^2 |\log h|)$$

Отсюда видно, что выражения в (6.6) и (6.7) являются асимптотиками величин (7.1) и (7.2) даже с повышенными точностями  $O(h^2 |\log h|)$  и

$O(h^{3/2} |\log h|)$ , соответственно. Отметим, что в случае несимметричной области  $\Omega$  оценки  $O(h)$  и  $O(\sqrt{h})$  в формулах (6.6)—(6.9) точны.

ii) При определении асимптотик существенно использовалась удаленность трещины от внешнего контура на конечное (независящее от  $h$ ) расстояние. В случае, когда расстояние от вершин  $(-b, 0)$  и  $(a, 0)$  трещины имеет порядок  $O(h)$ , то в их окрестности необходимо использовать аналогичную схему сращивания. Для задачи кручения цилиндрической области с продольной трещиной, близко расположенной к границе, асимптотика решения найдена в [11]. Общая схема построения асимптотических разложений приведена в [1].

ԵՐԿՈՒ ԿՈՐԻՆԵԱՐ ՃԱՔԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՄԻՋՆՈՐՄԻ ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ  
ԺԱՄԱՆԱԿ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿՏԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԵՐ

Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ, ՅՈՒ. Ա. ՌՈՄԱՇԵՎ

### Ա մ ֆ ն ֆ ն ի մ

Դիտարկվում է երկու կոլինեար ճաքերով թուլացված  $\Omega$  տիրույթի համար դասական առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը, երբ ճաքերի միջև միջնորմները բարակ են: Կառուցվում է խնդրի համար ասիմպտոտական լուծում (երբ  $h \rightarrow 0$ ): Ուսումնասիրվում է ճաքերի գազաֆններում գործակիցների ինտենսիվության անալիտիկ կապը  $h$ -ից: Երբ  $\Omega = R^2$  այդ դեպքում լուծման և գործակիցների համար ստացվել են ակնհայտ բանաձևեր:

## THE CHANGING OF STRESS INTENSITY FACTORS BY THE RUPTURE OF A BRIDLE BETWEEN TWO COLLINEAR CRACKS

S. A. NAZAROV, Ju. A. ROMASHEV

### S u m m a r y

The classical plane elasticity problem for an area  $\Omega$ , weakened by two collinear cracks, is considered in this paper. The width  $2h$  of the bridle vanishes. An asymptotical (as  $h \rightarrow 0$ ) solution of the problem is constructed. The stress intensity factors are investigated as functions of  $h$ . The formulae for the solutions and the factors are given in explicit form for  $\Omega = R^2$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области.— Проблемы математического анализа, 1981, № 8, с. 72—153.
2. Ильюш А. М. Краевая задача эллиптического уравнения второго порядка в области с щелью. 2. Область с малым отверстием.— Мат. сборник, 1977, т. 103, № 2, с. 265—284.

3. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
4. Мавья В. Г., Пламеневский Б. А. Оценки в  $L_p$  и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда—Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.— *Mathematische Nachrichten*, 1978, Bd. 81, s. 25—82.
5. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Применение парных интегральных уравнений к электростатическим задачам для полого проводящего цилиндра конечной длины.— *ЖТФ*, 1973, т. 43, в. 1, с. 44—51.
6. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2. М.: Наука, 1976.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1960. 707 с.
9. Парис П., Си Дж. Анализ напряженного состояния около трещин. Сб. «Вязкость разрушения», М.: Мир, 1968, с. 64—142.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
11. Агаларян О. Б., Назаров С. А. Об изменении коэффициентов интенсивности при запайке продольной трещины в призматическом стержне.— *Докл. АН Арм.ССР*, 1981, т. 72, № 1, с. 18—21.

Ленинградский государственный  
университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию  
8. II. 1981