ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 4, 1982 Механика

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ТЕРМОУПРУГОЙ ЛИНЕЙНОВЯЗКОЙ СРЕДЕ

БАГДОЕВ А. Г., ШЕКОЯН А. В.

Распространение нелинейных волн в разных диссипативных и недиссипативных средах изучено в работах [1, 3—5, 7—12, 13]. Вопросы лучевого решения и дифракции рассмотрены в линейной постановке в работах [2, 6].

Поглощение упругой волны приводит к нагреванию среды, что в свою очередь изменяет объем среды (обычно при нагревании среда расширяется). Эти факторы могут приводить к новым эффектам, например, к фиксированию акустической волны.

Целью настоящей статьи является получение нелинейных уравнений для амплитуды и фазы квазимонохроматической волны в диссипативной среде, рассмотрение устойчивости, фокусирование узких пучков.

1. *Вывод уравнений для медленно меняющихся амплитуд и фаз.* Пусть упругая волна распространяется в полубесконечной нелинейной вязкой теплопроводящей изотропной среде в направлении $x_3 > 0$. Ортогональная координатная система выбрана так, чтобы плоскость $x_3 = 0$ совпала с поверхностью среды. Предполагается, что в плоскости $x_3 = 0$ $u_1 = u_2 = 0$, а в ограниченной ее части $u_3 \neq 0$.

Свободная энергия единицы объема, разложенная в ряд по малым степеням тензора деформаций u_{ik} и разности температур $\theta = T_0 - T$, с учетом первых нелинейных членов имеет вид

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ll}^2 + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)^2 + \frac{1}{3} A u_{ik} u_{il} u_{kl} + B u_{ik}^2 u_{ll} +$$

$$+ \frac{c}{3} u_{ll}^2 - \gamma\theta u_{ll} + \frac{\nu_2}{2}\theta\left(u_{ll}^2 - u_{ik}^2\right) + \nu_3\theta^2 u_{ll} - \frac{c\theta}{T} + \nu_4\theta^3 \qquad (1.1)$$

где λ и μ — модули всестороннего сжатия и сдвига, A, B, C, ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 — нелинейные коэффициенты, c — теплоемкость среды, γ — линейный термический коэффициент, T и T_0 — начальная (однородная) и текущая температуры среды, F_0 — свободная энергия недеформированной среды,

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)$$

Воспользовавшись обычным способом [3, 4, 7], можно получить нелинейные уравнения движения среды и теплопроводности, имеющие соответственно следующий вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\lambda+\mu/3)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right]+\gamma\frac{\partial\theta}{\partial x_i}-\eta\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k^2\partial t}-$$

$$-\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial^3 u_l}{\partial x_i\partial x_l\partial t}=\left(\mu+\frac{A}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}+2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)+$$

$$+\left(\lambda+\frac{\mu}{4}+\frac{A}{4}+B\right)\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right)+$$

$$+\left(\lambda-\frac{2}{3}\mu+B\right)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\left(B+\frac{A}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)+(B+2C)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}-$$

$$-\frac{\nu_2}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\theta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}+\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\theta\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k}\right)+$$

$$+(\nu_1+\nu_2)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\theta\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_l}\right)+2\nu_3\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_i}-\gamma\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\theta\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_l}\right)\qquad(1.2)$$

$$\left[2\nu_3 T\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\left(6\nu_4 T-\frac{c}{T}\right)\theta-c\right]\frac{\partial\theta}{\partial t}-\gamma T\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l\partial t}+$$

$$+\left[(\nu_1+\nu_2-\gamma)T\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\theta(2T\nu_3-\gamma)\right]\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l\partial t}-$$

$$-\frac{\nu_2}{4}T\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial t}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial t}\right)=-\varkappa\triangle\theta\qquad(1.3)$$

где u_i — смещение, ρ — плотность среды, η и ζ — коэффициенты вязкости, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

Упростим систему уравнений (1.2), (1.3), считая, что нижеуказанные величины имеют порядки

$$\frac{u_3}{L},\quad \eta,\ \zeta,\ \varkappa\sim\delta^2,\quad \frac{u_1}{L},\quad \frac{u_2}{L}\sim\delta^{5/2},\quad \frac{\theta}{T}\sim\delta,\quad L\frac{\partial}{\partial x_3},\quad \frac{L}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sim\delta^{-1}$$

$$L\frac{\partial}{\partial x_1},\quad L\frac{\partial}{\partial x_2}\sim\delta^{1/2}$$

где L — характерная длина, v — скорость волны. Порядки поперечных координат берутся, как в задачах дифракции волн [12], а η, ζ, $\varkappa$ берутся, как в теории коротких волн [5], а в слагаемых более высокого порядка, следует отбрасывать диссипативные или нелинейные члены.

Тогда уравнения (1.2) и (1.3) примут следующий вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-a\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}-\mu\triangle_{\perp}u_3-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+$$

$$+\gamma\frac{\partial\theta}{\partial x_3}-b\frac{\partial^2 u_3}{\partial t\partial x_3^2}=P\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+(\nu_1-\gamma)\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+$$

$$+(\nu_1-\gamma)\theta\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+2\nu_3\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_3} \tag{1.4}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}-d\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3}+\gamma\frac{\partial\theta}{\partial x_1}=0 \tag{1.5}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}-d\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3}+\gamma\frac{\partial\theta}{\partial x_2}=0 \tag{1.6}$$

$$\left[2\nu_3T\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\left(6\nu_4T-\frac{c}{T}\right)\theta-c\right]\frac{\partial\theta}{\partial t}-\gamma T\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)+$$

$$+\left[(\nu_1-\gamma)T\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\theta(2T\nu_3-\gamma)\right]\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3\partial t}=-\varkappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x_3^2} \tag{1.7}$$

где $a=\lambda+4\mu/3$, $d=\lambda+\mu/3$, $b=\zeta+4\eta/3$, $P=4\mu+2A+6B+3\lambda+$ $+2C$, $\triangle_{\perp}\equiv\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2$. Вначале для простоты предположим, что среда однородная. В уравнениях (1.4) и (1.7) пренебрежены члены, имеющие порядок выше δ, а в (1.5) и (1.6) — выше $\delta^{1/2}$.

Решение системы уравнений (1.4)—(1.6) ищем в виде [8]

$$(u_i,\theta)=\frac{1}{2}\{[u_{0i}(x_1,x_2,x_3),\ \theta_0(x_1,x_2,x_3)]\exp[i(\omega_1t-kx_3)]+$$

$$+[u_{0i}'(x_1,x_2,x_3),\ \theta_0'(x_1,x_2,x_3)]\exp[2i(\omega_1t-kx_3)]+$$

$$+[u_{0i}''(x_1,x_2,x_3),\ \theta_0''(x_1,x_2,x_3)]+\text{к. с.}\} \tag{1.8}$$

где u_{0i}, θ_0 — амплитуды первой гармоники, величины с одним штрихом — амплитуды второй гармоники, а величины с двумя штрихами — свободные члены, обусловленные возникающими течениями вследствие упругой волны; ω_1 — комплексная частота $\omega_1=\omega+i\alpha$, а k — волновое число. Все амплитуды — медленно меняющиеся.

Хотя нелинейность в уравнениях (1.4)—(1.7) — квадратичная, однако, наличие вязкости и теплопроводности дает возможность искать решение этой системы в виде (1.8).

Подставляя (1.8) в систему (1.4)—(1.7) и приравнивая нулю коэффициенты у экспонент, получим новую систему для амплитуд. Упростим эту систему, учитывая порядки следующих величин:

$$k_1\omega_1\sim\delta^{-1},\quad u_{03},\quad u_{03}'',\quad \theta_0'\sim\delta^2,\quad u_{01},\quad u_{02}\sim\delta^{5/2},\quad u_{03}',\quad u_{03}'',\quad \theta_0''\sim\delta^3$$

Уравнения для амплитуд после упрощений примут следующий вид:

$$-2ik(-a-i\omega_1 b)\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3}-\mu\triangle_{\perp}u_{03}+ikd\left(\frac{\partial u_{01}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{02}}{\partial x_2}\right)+\gamma\frac{\partial\theta_0}{\partial x_3}=$$

$$=\left[-ik^3Pu'_{03}u^*_{03}+\frac{k^2(\nu_1-\gamma)}{2}\theta' u^*_{03}-k^2(\nu_1-\gamma)\theta^*_0 u'_{03}-ik\nu_2\theta'_0\theta^*_0\right] \quad (1.9)$$

$$4(-\omega_1^2\rho+ak^2+2ik^2\omega_1 b)u_{03}-2ik\gamma\theta_0=-\frac{i}{2}k^3Pu^2_{03}-$$

$$-k^2(\nu_1-\gamma)\theta_0 u_{03}-ik\nu_2\theta_0^2 \quad (1.10)$$

$$ic\omega_1\theta_0-k\gamma T\omega_1 u_{03}=k^2\varkappa\theta'_0 \quad (1.11)$$

$$\nu_2 Tk\omega_1 u_{03}\theta_0+\frac{i\omega_1}{2}\left(6\nu_4 T-\frac{c}{T}\right)\theta_0^2-2ik\omega_1\theta'_0+$$

$$+\frac{\omega_1 k}{2}[-ikT(\nu_1-\gamma)u^2_{03}+(2T\nu_3-\gamma)u_{03}\theta_0]=0 \quad (1.12)$$

$$u_{01}=\frac{1}{k^2\mu-\omega_1^2\rho}\left(ikd\frac{\partial u_{03}}{\partial x_1}+\gamma\frac{\partial\theta_0}{\partial x_1}\right) \quad (1.13)$$

$$u_{02}=\frac{1}{k^2\mu-\omega_1^2\rho}\left(ikd\frac{\partial u_{03}}{\partial x_2}+\gamma\frac{\partial\theta_0}{\partial x_2}\right) \quad (1.14)$$

где $\partial u_{03}/\partial x_3$, $\partial\theta_0/\partial x_3$ имеют порядки u_{03} и θ_0.

В уравнениях (1.9)—(1.14) выражения, содержащие свободные члены, оказались малыми, поэтому они были отброшены. В используемом приближении они не влияют на устойчивость и фокусирование или дефокусирование упругих волн. Уравнения для свободных членов и для комплексно сопряженных амплитуд не выписаны, так как в дальнейшем они не понадобятся.

Последовательно исключая все амплитуды, причем в нелинейных членах θ_0 и θ_0^* исключаются посредством уравнения (1.11), пренебрежением правых частей для амплитуды u_{03} получим следующее уравнение:

$$(A_1+iA_2)\triangle_{\perp}u_{03}-2ik\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3}=(C_1+C_2)u_{03}|u_{03}|^2 \quad (1.15)$$

Если в уравнении (1.15) полагать $A_1=1$, $A_2=C_2=0$, то оно совпадает с уравнением нелинейной оптики [11].

При выводе уравнений (1.15) было приравнено нулю выражение u_{03}, которое дает следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega_1^2\rho-ik^2\omega_1 b-\frac{ik^2\omega_1\gamma^2 T}{c(k^2\varkappa+i\omega_1)}-ak^2=0 \quad (1.16)$$

Уравнение (1.16) решаем относительно ω_1 методом последовательного приближения, считая $\omega_1=\omega+\omega'$. В качестве нулевого приближения берем решение, когда $\chi = \varkappa/c = b = 0$. Тогда для ω и α, сохраняя только первые порядки χ и b, получим:

$$\omega^2 = k^2 \frac{a + \gamma^2 T/c}{\rho} = k^2 v^2, \quad \omega' = i\alpha, \quad \alpha = \frac{\omega^2 b + k^2 \chi \gamma^2 T/c}{2(a + \gamma^2 T/c)} \quad (1.17)$$

Сохраняя только первые порядки χ, b для A_1, A_2, C_2 и C_1, получим следующие выражения:

$$A_1 = \frac{a\omega (d + \gamma^2 T/c) + k^2 d\chi\gamma^2 T/c}{\omega (d + \gamma^2 T/c)(a + \gamma^2 T/2c)} \quad (1.18)$$

$$A_1 = -\frac{(a + \gamma^2 T/2c)^{-1}}{(a + \gamma^2 T/c)} \left[\frac{\omega d\rho (\omega^2 b + k^2 \chi\gamma^2 T/c)}{k^2 (d + \gamma^2 T/c)} + \right.$$

$$\left. + \frac{a}{2\omega} (2\omega^2 b + k^2 \chi\gamma^2 T/c) \right] \quad (1.19)$$

$$C_1 = \frac{k^4 T\gamma c^{-2\alpha t}}{4c^2 (a + \gamma^2 T/2c)} \left(\frac{\nu_1 - \gamma}{2} - \frac{\nu_3 \gamma T}{c} \right) \left(4\nu_3 T - \frac{6\gamma T^2 \nu_4}{c} - \frac{c\nu_1}{\gamma} + c \right) \quad (1.20)$$

$$C_2 = -k^4 \omega e^{-2\alpha t} \left[P + \frac{2T\gamma}{c} \left(\nu_1 - \gamma - \frac{\nu_3 \gamma T}{c} \right) \right] \left[8 \left(\omega^2 b + \frac{k^2 \chi\gamma^2 T}{c} \right) \right]^{-1} (a +$$

$$+ \gamma^2 T/2c)^{-1} \left\{ \frac{P}{2} + \frac{3\gamma T}{c^2} \left[\frac{c}{2} (\nu_1 - \gamma) - \gamma T \left(\nu_3 - \frac{\gamma T \nu_4}{c} \right) \right] \right\} \quad (1.21)$$

Для дальнейших исследований важен знак A_1, A_2, C_1, C_2. Так как мало известно о коэффициентах ν_1, ν_2, ν_4, сказать определенно о знаке C_1 и C_2 трудно. Поэтому, для сравнения отдельно вычислены C_1 и C_2, когда в исходных уравнениях пренебрежено всеми термоупругими и термическими нелинейностями. Тогда $C_1 \geqslant 0$, а $C_2 < 0$. В твердых телах $G = \gamma T/c$ обычно мал [6], поэтому для $G = 0$ отдельно сделаны выкладки, причем в выражении (1.8) для θ оставлены лишь свободные члены. Для $G = 0$ и $G \neq 0$ проделаны вычисления, когда правые части уравнения (1.12) и (1.11) не нули, тогда $C_1 > 0$ и имеет вид

$$C_1 = \frac{k^4 P^2 e^{-2\alpha t}}{16 (a + \gamma^2 T/2c)^2}$$

в противоположном случае $C_1 = 0$. Выражение для C_2 легко получить из (1.21) подстановкой $\gamma = \nu_1 = \nu_3 = \nu_4 = 0$. Когда $G = 0$, температура не влияет на поведение упругой волны.

2. *Устойчивость*. Решение уравнения (1.15) будем искать в виде [11]

$$u_{03} = a \exp[-ikS] \quad (2.1)$$

где a_0 — действительная амплитуда, S — эйконал. После подстановок (2.1) в (1.15), отделив мнимые и действительные части, получим

$$A_1\triangle_\perp a_0 - k^2 a_0 A_1 (\nabla_\perp S)^2 + 2kA_2(\nabla_\perp a)(\nabla_\perp S) + a_0 A_2 k \triangle_\perp S -$$

$$- 2k^2 a_0 \frac{\partial S}{\partial x_3} = C_1 a_0^2 \qquad (2.2)$$

$$A_2\triangle_\perp a_0 - A_2 k^2 a_0 (\nabla_\perp S)^2 - 2kA_1(\nabla_\perp a_0)(\nabla_\perp S) + A_1 k a_0 \triangle_\perp S -$$

$$- 2k \frac{\partial a_0}{\partial x_3} = C_2 a_0^3 \qquad (2.3)$$

где $\nabla_\perp$ — градиент по координатам x_1 и x_2.

Решение этой системы ищем в виде

$$a_0 = a_1(x_3) + a_2(x_1, x_2, x_3), \quad S = S_0(x_3) + S_1(x_1, x_2, x_3) \qquad (2.4)$$

где a_1 и S_0 — медленно меняющиеся амплитуда и эйконал одномерной нелинейной невозмущенной квазимонохроматической волны. В силу того, что $|\omega_1 t - kx_3| \ll kx_3, \omega_1 t$, в выражениях (1.18)—(1.21) в малом слагаемом αt в экспоненте можно полагать $t \approx x_3/v$. Уравнение (1.15) имеет переменные коэффициенты, которые по предположению мало меняются по длине волны.

Подставляя (2.4) в (2.2), (2.3), исключая S, линеаризуя уравнения, получим систему уравнений

$$A_1\triangle_\perp a_2 + A_2 k a_1 \triangle_\perp S_1 - 2k^2 a_1 \frac{\partial S_1}{\partial x_3} - 2C_1 a_1^2 a_2 = 0 \qquad (2.5)$$

$$A_2\triangle_\perp a_2 - A_1 a_1 \triangle_\perp S_1 - 2k \frac{\partial a_2}{\partial x_3} - 3C_2 a_1^2 a_2 = 0 \qquad (2.6)$$

Поскольку функции a_0, C_2 и C_1 медленно меняются по длине возмущенной волны $2\pi/k_3'$, решения уравнений (2.5), (2.6) имеют вид

$$\begin{aligned} a_2 &= a_2' \exp[i(k_3' x_3 + k_2' x_2 + k_1' x_1)] \\ S_1 &= S_1' \exp[i(k_3' x_3 + k_2' x_2 + k_1' x_1)] \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.5) и (2.6), получим систему алгебраических уравнений относительно a_2' и S_1', которые имеют ненулевое решение, если определитель равен нулю. Отсюда находим k_3' в виде

$$k_3' = \frac{1}{4\pi}\{i(2A_2 k_\perp^2 + 3a_1^2 C_2) \pm \{-(2A_2 k_\perp^2 + 3a_1^2 C_2)^2 +$$

$$+ 4k_\perp^2 [k_\perp^2 (A_1^2 + A_2^2) + a_1^2 (3A_2 C_2 + 2A_1 C_1)]\}^{1/2}\}$$

где $k_\perp^2 = (k_1')^2 + (k_2')^2$.

Условие устойчивости волны имеет вид: $\operatorname{Im} k_3' \geqslant 0$, $(x_3 > 0)$. Так как $A_2 < 0$, волна неустойчива при $C_2 < 0$, а также при $C_2 > 0$, $|2A_2 k_\perp^2| > 3a_1^2 C_2$. Когда $2A_2 k_\perp^2 + 3a_1^2 C_2 > 0$, то имеет место устойчивость при $k_\perp^2(A_1^2+A_2^2)+a_1^2(3A_2C_2+2A_1C_1)>0$, при обратном знаке имеется неустойчивость. Так как при $G=0$, а также, когда в исходных уравнениях исключены все термоупругие и термические нелинейности $C_2<0$, волна всегда неустойчива.

3. *Узкие пучки.* Из выражения (1.19) видно, что A_2 пропорционально малым коэффициентам b и χ, поэтому в (1.15) можно пренебрегать величиной A_2 относительно A_1, в выражении которого пренебрегаем членом, содержащим χ. Учитывая это обстоятельство, для плоского и аксиально симметричного случая, для которого вводятся цилиндрические координаты, уравнения (2.3) и (2.4), следует записать в виде:

$$2\frac{\partial S}{\partial z}+A_1\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{A_1}{a_0k^2}\left(\frac{\partial^2 a_0}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\frac{\partial a_0}{\partial r}\right)=-\frac{C_1}{k^2}a_0^2 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial a_0^2}{\partial z^2}+A_1\left(\frac{\partial a_0^2}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)+a_0^2A_1\left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right)=-\frac{C_2a_0^4}{k} \quad (3.2)$$

где $m=0$ соответствует плоскому случаю, а $m=1$ — аксиально симметричному.

Следуя [11], решение (3.1) и (3.2) ищем в виде

$$S=\frac{r^2\beta(z)}{2}+\varphi(z), \qquad a_0^2=\frac{E_0^2}{f^{m+1}}\exp\left[-\frac{r^2}{r_0^2f^2}\right] \quad (3.3)$$

где $f(z)$ и r_0 — безразмерная и начальная ширина пучка, β^{-1} — радиус кривизны. Подставляя (3.3) в (3.1) и (3.2), нетрудно убедиться, что при $m=0$ выражения (3.3) для действительных f непригодны, так как приводят к противоречию, а для аксиально-симметричного пучка пригодны, противоречие не имеет места. Тогда для приосевых лучей получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$2\,d\varphi/dz+2A_1/k^2f^2=-C_1E_0^2/k^2f^2$$

$$\beta=-\frac{C_2E_0^2}{2kA_1f^2}+\frac{1}{A_1f}\frac{df}{dZ} \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2f}{dz^2}=\left(\frac{4A_1^2}{R_д^2}-\frac{1}{R_{нл}^2}\right)\frac{1}{f^3} \quad (3.5)$$

где

$$R_д=r_0^2k/2, \quad R_{нл}^{-2}=-\frac{C_1A_1E_0^2}{k^2r_0^2}+\frac{C_2^2E_0^4}{4k^2} \quad (3.6)$$

После интегрирования уравнения (3.5) для f^2 получается выражение

$$f^2=\left(\frac{A_1^2}{R^2}+\frac{C_2E_0^2A_1}{kR}+\frac{A_1C_1E_0^2}{k^2r_0^2}+\frac{4A_1}{R_д^2}\right)z^2+2\left(\frac{A_1}{R}+\frac{C_2E_0^2}{2k}\right)z+1 \quad (3.7)$$

При выводе (3.6) были учтены граничные условия: $\beta(0)=1/R$, R —

радиус кривизны начального волнового фронта, $f(0) = 1$ и в отличие от [11]

$$\frac{df(0)}{dz} = \frac{A_1}{R} + \frac{C_2 E_0^2}{2k} \tag{3.8}$$

Граничное условие (3.8) приводит к тому, что даже при сравнительно простом случае плоского начального фронта ($R \to \infty$), в выражении (3.7) остаются члены с z, что приводит к более сложному поведению пучка, чем в нелинейной оптике.

Выражение (3.7) при $f = 0$ определяет фокальные точки:

$$z_{\phi 1,2}^{-1} = -\left(\frac{A_1}{R} + \frac{C_2 E_0^2}{2k}\right) \pm (R_{\text{нл}}^2 - 4A_1/R_{\text{д}}^2)^{1/2} \tag{3.9}$$

Из (3.9) видно, что при $R_{\text{нл}}^{-2} > 4A_1^2 R_{\text{д}}^{-2}$, корни действительные. По крайней мере, один $z_{\phi 1} > 0$, если $-C_2 E_0^2/2k > A_1 R^{-1}$. Если $C_2 > 0$, то неравенство может выполняться при $R < 0$. Отметим, что при выполнении первых двух условий $z_{\phi 1,2} > 0$, если в (3.7) коэффициент при z^2 положителен. Для двухмерного случая, а также для аксиально-симметричного пучка с произвольным профилем можно воспользоваться приближенным уравнением, которое получается из (1.15) отбрасыванием в нем C_1 по сравнению с C_2, так как из выражений (1.20) и (1.21) видно, что $|C_2| \gg |C_1|$. Тогда правая часть уравнения (3.1) будет равняться нулю. Пренебрежем также в (3.1) членом, обуславливающим дифракцию. После этих упрощений, деля уравнение (3.2) на a_0^2 и вводя обозначения $u = \partial S/\partial r$, $\psi = a_0^{-2}$, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + A_1 u \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{3.10}$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z} - A_1 u \frac{\partial \psi}{\partial r} + A_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{m}{r} u\right) \psi + \frac{C_2}{k} = 0 \tag{3.11}$$

Уравнение (3.10) будем решать методом характеристик [8]. Решение уравнения (3.10) при условии $z = 0$, $u = F(r)$ имеет вид

$$r = A_1 F(y) z + y, \quad u = F(y) \tag{3.12}$$

Вдоль характеристики уравнение (3.11) можно написать в таком виде:

$$-\frac{d\psi}{dz} + A_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{m}{r} u\right) \psi + \frac{C_2}{k} = 0 \tag{3.13}$$

где u определяется из (3.12). Интегрирующий множитель уравнения (3.13) имеет вид

$$\mu_1 = (1 + A_1 F' z)^{-1} (y + A_1 F z)^{-m} \tag{3.14}$$

Рассмотрим сперва случай $m = 1$. Тогда согласно (3.14) общее решение (3.13) будет

$$\psi = \frac{C_2}{\mu_1 A_1 F' (y - F/F')} \ln \left(\frac{1 + A_1 F' z}{y + A_1 F z} \right) + \frac{\chi_1 (y)}{\mu_1} \qquad (3.15)$$

где χ_1 — постоянная интегрирования. Однако для частного случая сферической волны $F(y) = r/R$ на прямой $r = y$ и $z = 0$ выражение ψ содержит неопределенность. Поэтому необходимо значение $F(y)$ в виде сферической волны подставить в (3.13), а потом интегрировать, тогда получим следующее выражение:

$$\psi = -\frac{C_2 R}{A_1} \left(1 + \frac{A_1 z}{R} \right) + \chi_1 (y) y \left(1 + \frac{A_1 z}{R} \right)^2$$

Если при

$$z = 0 \quad \psi = E_0^{-2} \exp (y^2/r_0^2) \qquad (3.16)$$

то

$$\psi = C_2 (1 + A_1 z/R) z + (1 + A_1 z/R)^2 E_0^{-2} \exp (y^2/r_0) \qquad (3.17)$$

Для приосевых лучей, когда ψ и U имеют вид (3.3), нетрудно убедиться, что (3.17) переходит в (3.7), если в последнем подставить $C_1 = 0$.

При $m = 0$ решение (3.13) имеет вид

$$\psi = (1 + A_1 F' z) \left[\frac{C_2}{A_1 F'} \ln (1 + A_1 F' z) + \chi_1 (y) \right] \qquad (3.18)$$

Если $F = r/R$ и выполняются условия (3.16), то (3.18) принимает вид

$$\psi = \left(1 + \frac{A_1 z}{R} \right) \left[\frac{C_2 R}{A_1} \ln \left(1 + \frac{A_1 z}{R} \right) + E_0^2 \exp (y^2/r_0^2) \right]$$

Условие для огибающей получается, если продифференцируем первое уравнение в (3.12) по r и приравняем нулю, тогда получим $F'(y) = -(A_1 z)^{-1} < 0$. Отсюда следует, что огибающая имеется при $R^{-1} < 0$, то есть для вогнутой волны. Значение y определяется из первого уравнения (3.12) и имеет вид:

$$y = rR (R + A_1 z)^{-1}$$

Для неоднородной среды, ограничиваясь использованным выше приближением, достаточно считать ρ и c_{ijkl} переменными. Проводя выкладки подобно [2], можно получить для неоднородной среды уравнение модуляции в следующем виде:

$$(A_1 + iA_2) \Delta_\perp U_0 - 2ik \frac{\partial U_0}{\partial x_3} = (C_1 + iC_2) \varphi_2^2 |U_0|^2 U_0$$

где $u_{03} = \varphi_2 U_0$, φ_2 — лучевое решение для u_{03}, даваемое законом сохранения энергии волны в виде $\rho \varphi_2^2 \sum v = \text{const}$, $\sum$ — площадь волнового фронта внутри элементарной лучевой трубки.

Считая, что $C_1\varphi_2^2$ и $C_2\varphi_2^2$ медленно меняются по длине волны возмущения, результаты, полученные для устойчивости волны, остаются в силе.

В конце оценим фокальные расстояния $z_ф$, когда волна распространяется в железе. Предполагаем, что исходный фронт волны плоский ($R\to\infty$). Тогда при $T=500^\circ$ K, $b\approx 10^6$ кг/мс, $\omega=10^7$ с$^{-1}$, $r_0=10^{-2}$ м и $E_0=9\cdot 10^{-4}$ м $v\approx 3\cdot 10^4$ м/с, $\alpha^{-1}\approx 10^{-2}$ м, $z_{ф_1}\approx 3\cdot 10^{-3}$ м. Когда $T=1000^\circ$ K, $b=10^3$ кг/мс, $v\approx 2\cdot 10^4$ м/с, $\omega=10^6$ с$^{-1}$, $r_0=4\cdot 10^{-2}$ м, и $E_0=8\cdot 10^{-4}$ м, $\alpha^{-1}\approx 1$ м, $z_{ф_1}\approx 3\cdot 10^{-2}$ м.

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՔՎԱԶԻՄՈՆՈՔՐՈՄԱՏԻԿ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳԾԱՅԻՆ ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Արտածված են ոչ գծային հավասարումները կրող միջավայրում քվազի-մոնոքրոմատիկ ալիքների ամպլիտուդայի և փուլի համար: Քննարկված են ալիքի կայունությունը և նրա նեղ փնջերի ֆոկուսացումը:

THE PROPOGATION OF NON-LINEAR QUASIMONOCHROMATIC WAVES IN THERMOELASTIC LINEARLY VISCOUS MEDIUM

A. G. BAGDOEV, A. V. SHEKOYAN

S u m m a r y

The derivation of non-linear equations for the amplitude and phase of quasimonochromatic waves in dissipative medium is given. The stability of waves and focusing of beams are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г.* Уравнение линейной вязкотермомагнитоупругой среды вблизи фронтов волн.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. 27, № 1.
2. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды. В сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Изд. ЛГУ, 1961.
3. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах.— Успехи физ. н., 1970, т. 102, № 4.
4. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы. Таллин: Изд. АН Эст.ССР, 1972.
5. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред.— ПММ, 197;, т. 35, № 6.

6. *Селезов И. Г., Яковлев В. В.* Дифракция волн на симметричных неоднородностях. Киев: Наукова думка, 1978.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965.
8. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
9. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972.
10. *Melkumyan G. H., Shekoyan A. V.* On the theory of self-aktion of ultrasonic and hypersonic waves. Phys. stat. sol. (a), 1978, v. 48, p. 23.
11. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция в нелинейной среде.— Успехи физ. н., 1967, т. 93, № 1.
12. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
13. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М.: Изд. МГУ, 1974.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
19. III. 1981