ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 3, 1982 Механика

Л. Г. ПЕТРОСЯН

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СМАЗКИ ДЛЯ СЛОЯ СУСПЕНЗИИ

Технически очень важным примером течения с преобладающей ролью вязкости служит течение в слое смазочного вещества между двумя частями машины, движущимися одна относительно другой (между цапфой и подшипником). Известно, что при быстром движении разность давлений в нем может достигать чрезвычайно больших значений, вследствие чего тонкий слой масла, находящегося между цапфой и подшипником, поддерживает цапфу, предохраняя ее от непосредственного соприкосновения с подшипником.

Обычно смазочные масла в подшипниках в значительной степени подвержены загрязнению пылевыми и металлическими частицами. Кроме того, для улучшения условий работы подшипников в смазки обычно вводят присадки. Такая смазка ведет себя как суспензия.

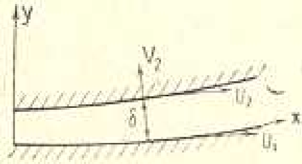
Многочисленные экспериментальные исследования свидетельствуют о существенных различиях гидродинамических свойств суспензий и обычных вязких жидкостей. Такое аномальное поведение вязкости, наблюдаемое для ряда суспензий, не позволяет отнести их к ньютоновским или неньютоновским жидкостям [1—2]. Течение суспензий, как правило, сопровождается расслоением на твердую и жидкую фазы. В случае пуазейлевского течения в круглой трубе для суспензий наблюдаются два эффекта— приосевой (миграция взвешенных частиц к оси трубы) и пристеночный (соответствующее понижение концентрации твердой фазы вблизи стенок) [3—6]. Детальный анализ экспериментального материала убеждает, что последовательное развитие теоретических представлений о реологии суспензий можно осуществить лишь на моделях, учитывающих внутреннее вращение частиц и моментные напряжения [7—11].

В работах [12, 13] в рамках неравновесной термодинамики была построена замкнутая система уравнений двухжидкостной гидродинамики в приближении взаимопроникающих континуумов, включающая в себя уравнения диффузии и момента количества движения и позволяющая определить пространственное распределение концентрации и угловой скорости вращения частиц; среда характеризуется асимметрическим тензором напряжений (микрополярная среда).

В настоящей статье применена указанная теория для решения течения слоя смазочного вещества (с присадкой) между двумя частями машины, движущимися одна относительно другой.

Применение указанной теории позволяет получить распределения концентрации твердых частиц, облегчает правильный выбор противозадирных присадок. При рассмотрении распределения концентрации суспензии наблюдается пристеночный эффект.

1. *Приближенные уравнения плоскопараллельного течения смазочного слоя суспензии.* Рассмотрим установившееся плоскопараллельное течение вязкой суспензии с несимметричным тензором напряжений в тонком слое между приблизительно параллельными поверхностями, радиусы кривизны которых достаточно велики по сравнению со средней толщиной слоя δ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Для изучения движения суспензии выберем ортогональные криволинейные координаты x и y, причем x будем отсчитывать вдоль первой поверхности, а координату y — по направлению нормали к рассматриваемой поверхности.

Проекции вектора скорости точек второй поверхности на касательную и на нормаль к этой поверхности обозначим через U_2 и V_2. Чтобы средняя толщина слоя оставалась малой во все время движения, необходимо положить поперечную скорость V_2 весьма малой по сравнению со скоростью U_1.

Уравнения неразрывности, количества движения, момента количества движения и диффузии одного из компонентов системы для случая несжимаемой, нетеплопроводной двухжидкостной системы с несимметричным тензором напряжений имеют вид [12]

$$\nabla\cdot\vec{v}=0,\quad \rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\nabla\cdot\vec{\tau},\quad \rho I\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\nabla\cdot\vec{\mu}+\vec{\tau}\times\vec{I}$$

$$\rho\frac{dc_1}{dt}=-\nabla\cdot\vec{J}_1 \qquad (1.1)$$

Здесь ρ — плотность жидкости, $\vec{v}$ — скорость центра масс элемента жидкости, $\vec{\tau}$ — диада силовых напряжений, $\vec{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, I — среднее значение момента инерции на единицу массы частиц, составляющих систему, $\vec{\mu}$ — диада моментных напряжений, $\vec{I}$ — единичная пространственная диада, $d(\ldots)/dt$ — полная производная по времени, ∇ — пространственный градиент, c_1 и $\vec{J}_1=\rho_1(\vec{v}_1-\vec{v})$ — соответственно концентрация и диффузионный поток, а ρ_1 и $\vec{v}_1$ — соответственно плотность и скорость вещества $k=1$, операция $(\times)$ означает, что левые множители диад перемножаются векторно, а правые — скалярно.

Предполагается, что внешние массовые силы и моменты отсутствуют.

Феноменологические уравнения для этого случая запишутся в виде [13]

$$\pi_0 = \eta_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \vec{\pi}^d = 2\eta (\nabla \vec{v})^d, \quad \mu_0 = c_0 \nabla \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{\mu}^d = 2c_d (\nabla \vec{\omega})^d, \quad \vec{P}^a = \eta_r (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\omega})$$

$$\rho D (\nabla c_1 + k_p \nabla p) = \vec{J}_1 + a_1 a_2 \vec{J}_1 \times (\vec{\omega} - \vec{\Omega}) + a_1 a_3 (\nabla \times \vec{\omega}) +$$

$$+ a_1 a_4 [(\nabla \times \vec{\omega}) \times (\vec{\omega} - \vec{\Omega})]$$

$$-\vec{d} = a_3 \vec{J}_1 + a_4 \vec{J}_1 \times (\vec{\omega} - \vec{\Omega}) + a_5 (\nabla \times \vec{\omega}) + a_6 [(\nabla \times \vec{\omega}) \times (\vec{\omega} - \vec{\Omega})] \quad (1.2)$$

В выражениях (1.1) и (1.2)

$$\vec{\tau} = (\pi_0 - p)\vec{I} + \vec{\pi}^a + \vec{\pi}^d, \quad \vec{\mu} = \mu_0 \vec{I} + \vec{\mu}^a + \vec{\mu}^d, \quad \vec{\tau} = -p\vec{I} + \vec{\pi}$$

$$\vec{P}^a = \frac{1}{2} \vec{\tau} \times \vec{I}, \quad \vec{\mu}^a = -\vec{I} \times \vec{d}, \quad \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}, \quad k_p = \frac{a_1 \gamma}{\rho D} \quad (1.3)$$

При получении (1.2) были произведены замены диады $\vec{\pi}^a$ на эквивалентный ей псевдовектор $\vec{P}^a$ и диады $(\nabla \vec{v})^a$ — на псевдовектор $(1/2) \nabla \times \vec{v}$.

В уравнениях (1.2) и (1.3) p — равновесное давление, π_0 и μ_0 соответственно равны одной трети следов диад $\vec{\pi}$ и $\vec{\mu}$, индексом a отмечены антисимметричные диады, индексом d — симметричные диады с нулевым следом, $\vec{d} = (1/2) \vec{\mu} \times \vec{I}$ — полярный псевдовектор, эквивалентный псевдодиаде $\vec{\mu}^a$, $\vec{\pi}$ — вязкая диада силовых напряжений; феноменологические коэффициенты η_0, η, η_r, c_0, c_d, D, γ, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 — скаляры, характеризующие изотропные свойства среды, в частности, η_0 — второй коэффициент вязкости, η — динамическая ньютоновская вязкость, η_r — динамическая вращательная вязкость, c_0, c_d — коэффициенты моментной вязкости, D — коэффициент диффузии, $k_p D$ — коэффициент бародиффузии и т. д. Заметим, что коэффициенты a_i и γ не интерпретируются столь простым образом.

Ограничимся анализом плоского двумерного установившегося течения жидкости. Итак, скорость $\vec{v}$, скорость вращения частиц $\vec{\omega}$, давление p, диффузионный поток $\vec{J}_1$ и завихренность $\vec{\Omega}$ имеют форму

$$\begin{aligned} &\vec{v} = \vec{v}[u(x, y), v(x, y), 0]; \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}[0, 0, \omega(x, y)], \quad p = p(x, y) \\ &\vec{J}_1 = \vec{J}_1[J_{1x}(x, y), J_{1y}(x, y), 0], \quad \vec{\Omega} = \vec{\Omega}[0, 0, \Omega(x, y)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнения движения (1.1) с учетом (1.2) и (1.3) сводятся к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+(\eta+\eta_r)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2\eta_r\frac{\partial\omega}{\partial y} \quad (1.6)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+(\eta+\eta_r)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-2\eta_r\frac{\partial\omega}{\partial x} \quad (1.7)$$

$$\rho I\left(u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)=2\eta_r\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-$$

$$-4\eta_r\omega+c_d\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)-(\nabla\times\vec{d})_z \quad (1.8)$$

где

$$-(\nabla\times\vec{d})_z=a_3\left(\frac{\partial J_{1y}}{dx}-\frac{\partial J_{1x}}{\partial y}\right)-a_4\left[\frac{\partial}{\partial x}(J_{1x}\omega)+\frac{\partial}{\partial y}(J_{1y}\omega)\right]+$$

$$+a_4\left[\frac{\partial}{\partial x}(J_{1x}\Omega)+\frac{\partial}{\partial y}(J_{1y}\Omega)\right]-a_5\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)-$$

$$-a_6\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\right]+a_6\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Omega\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\Omega\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\right] \quad (1.9)$$

В данной работе ограничиваемся случаем постоянных η, η_r, c_d и $a_i=0$. В дальнейшем при решении задачи большинство коэффициентов будем считать постоянными и лишь некоторые будут функциями концентрации, обращающимися в нуль при значениях концентрации, равных нулю и единице.

Ввиду малости δ кривизной координатных линий будем пренебрегать и примем, что для течения в рассматриваемом вязком слое суспензии остаются справедливыми уравнения (1.5)—(1.9).

Среднее значение радиусов кривизн рассматриваемых поверхностей (фиг. 1) обозначим L. На основании вышеизложенного предположения толщина слоя δ считается достаточно малой по сравнению со средним радиусом кривизны L. Отношение этих величин обозначим через ε:

$$\delta/L=\varepsilon \quad (1.10)$$

Параметр ε, равный отношению толщины слоя к среднему радиусу кривизны поверхностей, заведомо считается малой величиной $\varepsilon\ll 1$.

Введем безразмерные переменные с учетом того, что порядок координаты и скорости в направлении нормали к первой поверхности мал по сравнению с порядком координат и скоростей в направлении x

$$x=Lx^*,\ y=\delta y^*,\ u=U_1u^*,\ v=V_2v^* \quad (1.11)$$

Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности (1.5), получим

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{V_2L}{U_1\delta}\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0 \quad (1.12)$$

Так как все слагаемые в уравнении неразрывности имеют один и тот же порядок величины, то необходимо положить $V_2 L / U_1 \delta = 1$, откуда следует, что

$$V_2 / U_1 = \varepsilon \tag{1.13}$$

Имея в виду (1.11), дополнительно введем следующие безразмерные переменные: $u_1 = U_1 u_1^*$ и $v_1 = V_2 v_1^*$, тогда

$$J_{1x} = \rho U_1 J_{1x}^* \text{ и } J_{1y} = \rho V_2 J_{1y}^* \tag{1.14}$$

Характерное число Рейнольдса, безразмерные давление и скорость вращения частиц введем следующим образом:

$$R = \frac{\rho U_1 L}{\eta + \eta_r}, \qquad p = \frac{(\eta + \eta_r) U_1 L}{\delta^2} p^* = \frac{\rho U_1^2}{\varepsilon^2 R} p^*, \qquad \omega = \frac{U_1}{\delta} \omega^* \tag{1.15}$$

Подставляя в уравнения (1.6)—(1.9) значения безразмерных переменных из (1.11), (1.14) и (1.15), получим

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\varepsilon^2 R} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) + $$
$$+ 2N^2 \frac{1}{\varepsilon^2 R} \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \tag{1.16}$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\varepsilon^4 R} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) -$$
$$- 2N^2 \frac{1}{\varepsilon^2 R} \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{E} \left(u^* \frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} \right) = 2N^2 \frac{\varepsilon^2}{R} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - 2N^2 \frac{1}{R} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - 4N^2 \frac{1}{R} \omega^* +$$
$$+ \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{1}{F} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} (J_{1x}^* \omega^*) + \frac{\partial}{\partial y^*} (J_{1y}^* \omega^*) \right] +$$
$$+ \frac{1}{F} \left[\frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \left(\frac{\partial J_{1x}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial J_{1y}^*}{\partial y^*} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} J_{1x}^* \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{1}{2} J_{1y}^* \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \right] +$$
$$+ \frac{1}{G} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \right] \tag{1.18}$$

Здесь

$$R_e = \frac{\rho U_1 L^3}{c_a + c_d}, \quad E = \frac{L^2}{I}, \quad F = \frac{L^2}{a_4}, \quad G = \frac{\rho L^4}{a_6}$$

$$N = \left(\frac{\eta_r}{\eta + \eta_r} \right)^{1/2}, \quad c_a = -a_5 = \text{const}. \tag{1.19}$$

Полученные дифференциальные уравнения движения несимметричной суспензии в тонком слое содержат безразмерные параметры ε и R.

Примем видоизмененное число Рейнольдса по своему порядку обратно пропорциональным значению параметра ε, то есть

$$R \approx 1/\varepsilon \qquad (\varepsilon^2 R \ll 1) \tag{1.20}$$

В зависимости от соотношений между комплексами R, R_ε, E, F, G возможны различные типы уравнений для смазочного слоя.

Если R и $\sqrt[3]{R_\varepsilon}$ имеют одинаковые порядки при условии, что $E \gg R$, $F \gg R$, $\sqrt{G} \gg R$, то дифференциальные уравнения (1.16)—(1.18) при использовании (1.20) и сохранении слагаемых, имеющих наибольший порядок величины, в размерных переменных принимают следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (\eta + \eta_r)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\eta_r \frac{\partial \omega}{\partial y} \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{1.22}$$

$$(c_a + c_d)\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2\eta_r\left(2\omega + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.23}$$

Здесь c_a — коэффициент моментной вязкости.

Из уравнения (1.22) следует, что в тонком смазочном слое суспензии давление не изменяется по толщине слоя.

Уравнения (1.21)—(1.23) совместно с уравнением неразрывности (1.5) являются дифференциальными уравнениями смазочного слоя суспензии.

Эти уравнения содержат члены, характеризующие несимметричность диад силовых и моментных напряжений.

2. *Приближенные уравнения распределения концентрации.* Закон распределения концентрации находим из уравнений (1.1) и (1.2) с учетом (1.3), (1.4) и (1.22), которые сводятся к виду

$$\rho D\frac{\partial c_1}{\partial x} + \rho D k_p \frac{\partial p}{\partial x} = J_{1x} + \left[a_1 a_2 J_{1y} - a_1 a_4 \frac{\partial \omega}{\partial x}\right]\left[\omega - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \tag{2.1}$$

$$\rho D\frac{\partial c_1}{\partial y} = J_{1y} - \left[a_1 a_2 J_{1x} + a_1 a_4 \frac{\partial \omega}{\partial y}\right]\left[\omega - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \tag{2.2}$$

Подставляя в уравнения (2.1) и (2.2) значения безразмерных переменных из (1.11), (1.14) и (1.15), получим

$$\frac{1}{R_D}\frac{\partial c_1}{\partial x^*} + \frac{1}{\varepsilon^2 \Phi R}\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = J^*_{1x} + \left[\frac{1}{M} J^*_{1y} - \frac{1}{\varepsilon^2 \Psi}\frac{\partial \omega^*}{\partial x^*}\right] \times$$
$$\times \left[\omega^* - \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)\right] \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{R_D}\frac{\partial c_1}{\partial y^*}=\varepsilon^2 J^*_{1y}-\left[\frac{1}{M}J^*_{1x}+\frac{1}{\varepsilon^2\Psi}\frac{\partial\omega^*}{\partial y^*}\right]\left[\omega^*-\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2\frac{\partial v^*}{\partial x^*}-\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)\right] \quad (2.4)$$

Здесь

$$R_D=\frac{LU_1}{D},\quad M=\frac{L}{a_1a_2U_1},\quad \Phi=\frac{L}{\rho U_1Dk_p},\quad \Psi=\frac{\rho L^2}{a_1a_4U_1} \quad (2.5)$$

В зависимости от соотношений между комплексами R, R_D, M, Φ, Ψ возможны различные типы уравнений для отыскания концентрации.

Если R, R_D, M, Φ и $\sqrt[3]{\Psi}$ имеют одинаковые порядки, то дифференциальные уравнения (2.3) и (2.4) при использовании (1.20) и сохранении слагаемых, имеющих наибольший порядок величины, в размерных переменных принимают следующий вид:

$$\rho Dk_p\frac{\partial p}{\partial x}=J_{1x} \quad (2.6)$$

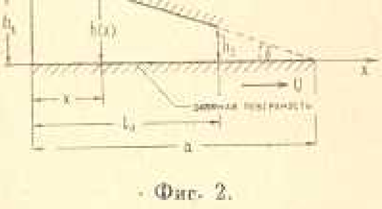
$$\rho D\frac{\partial c_1}{\partial y}=\left[-a_1a_2J_{1x}-a_1a_4\frac{\partial\omega}{\partial y}\right](\omega-\Omega) \quad (2.7)$$

где Ω, после отбрасывания малых членов по сравнению с другими, имеет вид $\Omega=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Для закона распределения концентрации c_1 вещества $k=1$ из (2.6) и (2.7) имеем

$$\rho D\frac{\partial c_1}{\partial y}=\left[-a_1a_2\rho Dk_p\frac{\partial p}{\partial x}-a_1a_4\frac{\partial\omega}{\partial y}\right](\omega-\Omega) \quad (2.8)$$

3. *Теория смазки для слоя суспензии.* Особенности течения смазочного слоя между движущимися частями машины проще выяснить на примере ползуна и плоской опорной поверхности, образующих между собой малый угол δ (фиг. 2). Допустим, что обе скользящие поверхности имеют в направлении, перпендикулярном к направлению движения, очень большое протяжение, следовательно, течение смазочного вещества можно рассматривать как плоское. Пусть плоскость $x0y$ перемещается в направлении оси x со скоростью U. Высота щели $h(x)$ между ползуном и опорной поверхностью предполагается весьма малой по сравнению с длиной ползуна l_0. Ось y проведем через левый край пластинки. Обозначим толщину слоя у левого края пластинки h_1, у правого — через h_2.



Фиг. 2.

Уравнение неразрывности (1.5) запишем в виде условия, что количество жидкости Q, протекающее в единицу времени через поперечное сечение, одинаково для каждого поперечного сечения; следовательно, будем иметь

$$Q=\int\limits_0^{h(x)} u\,dy=\text{const} \tag{3.1}$$

Граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &u=U, \quad v=0, \quad \omega=0 \text{ при } y=0 \\ &u=0, \quad v=0, \quad \omega=0 \text{ при } y=h \\ &p=p_0 \text{ при } x=0, \quad p=p_0 \text{ при } x=l_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Выражения для скорости u и угловой скорости вращения частиц ω получим из решения уравнений (1.21)—(1.23) при граничных условиях (3.2)

$$u=C_1\left[e^{ky}+\frac{y}{h}(1-e^{\lambda})-1\right]+C_2\left[e^{-ky}+\frac{y}{h}(1-e^{-\lambda})-1\right]+$$

$$+U\left(1-\frac{y}{h}\right)-\frac{h^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right) \tag{3.3}$$

$$\omega=-\frac{k}{2N^2}(C_1e^{ky}-C_2e^{-ky})-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y-$$

$$-\frac{1}{2}\left[-\frac{U}{h}+C_1(1-e^{\lambda})+C_2(1-e^{-\lambda})-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}h\right] \tag{3.4}$$

Здесь

$$k=\frac{N}{l}=\left(\frac{\eta_r}{\eta+\eta_r}\,\frac{4\eta}{c_a+c_d}\right)^{1/2}, \quad \lambda=kh, \quad l=\left(\frac{c_a+c_d}{4\eta}\right)^{1/2}$$

а постоянные интегрирования C_1 и C_2 даются соотношениями

$$C_1=\frac{U}{2(e^{\lambda}-1)-\lambda(e^{\lambda}+1)/N^2}-\frac{h^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{N^2}{\lambda(e^{\lambda}-1)}$$

$$C_2=\frac{U}{e^{-\lambda}[2(e^{\lambda}-1)-\lambda(e^{\lambda}+1)/N^2]}-\frac{h^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{N^2}{\lambda e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)}$$

Подставив значение u, определяемое формулой (3.3), в равенство (3.1), получим

$$Q=\frac{Uh}{2}-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{h^3}{12\eta}+\frac{N^2h^2}{2\eta\lambda}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{e^{\lambda}+1}{e^{\lambda}-1}\right)\left(1-\frac{2}{\lambda}\frac{e^{\lambda}-1}{e^{\lambda}+1}\right) \tag{3.5}$$

Ограничимся рассмотрением относительно больших значений λ (порядка 10 и больше), тогда, сохраняя члены первого порядка λ, получим

$$Q=\frac{Uh}{2}-\frac{h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left(1-\frac{6N^2}{\lambda}\right) \tag{3.6}$$

откуда для градиента давления находим

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{12\eta U}{h^2}\left(1+\frac{6N^2}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{Q}{Uh}\right) \tag{3.7}$$

или, после интегрирования

$$p(x)=p_0+6\eta U\left[\int\limits_0^x\frac{dx}{h^2}+\frac{6N^2}{k}\int\limits_0^x\frac{dx}{h^3}\right]-12\eta Q\left[\int\limits_0^x\frac{dx}{h^3}+\frac{6N^2}{k}\int\limits_0^x\frac{dx}{h^4}\right] \tag{3.8}$$

Условие, что $p=p_0$ при $x=l_0$, дает для Q значение

$$Q=\frac{U}{2}\frac{\int\limits_0^{l_0}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{6N^2}{k}\frac{1}{h^3}\right)dx}{\int\limits_0^{l_0}\left(\frac{1}{h^3}+\frac{6N^2}{k}\frac{1}{h^4}\right)dx}=\frac{1}{2}UH \tag{3.9}$$

Величина H называется характеристической шириной щели [14]. С ее помощью формуле (3.7) можно придать вид

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{6\eta U}{h^2}\left(1+\frac{6N^2}{\lambda}\right)\left(1-\frac{H}{h}\right) \tag{3.10}$$

показывающее, что давление имеет максимум или минимум в том сечении, в котором ширина h щели равна характеристической ширине H.

В случае щели, образованной плоскими стенками, можно принять, что

$$h(x)=(a-x)\delta \tag{3.11}$$

где a и δ — постоянные (фиг. 2).

Для этой геометрии H, определенное уравнением (3.9), принимает вид

$$H=\frac{2a\delta(a-l_0)}{2a-l_0}\left[1-\right.$$

$$\left.-\frac{N^2l_0^2}{k\delta a(a-l_0)(2a-l_0)+4N^2[(a-l_0)^2+a(2a-l_0)]}\right]$$

и поскольку $k\delta a\gg 1$ или $\lambda\gg 1$, то вторым членом в знаменателе в скобках можно пренебречь, тогда

$$H=\frac{2a\delta(a-l_0)}{2a-l_0}\left[1-\frac{N^2l_0^2}{k\delta a(a-l_0)(2a-l_0)}\right] \tag{3.12}$$

Распределение давления дается уравнением (3.8). Для давления из (3.8), с учетом формул (3.9) и (3.12), имеем

$$p(x)-p_0=$$

$$=\frac{6\eta U x(l_0-x)}{\delta^2(a-x)^2(2a-l_0)}\left\{1+\frac{4N^2[(2a-l_0)+(a-x)]}{k\delta(2a-l_0)(a-x)}\right\} \tag{3.13}$$

При получении (3.13) мы ограничивались рассмотрением относительно больших значений λ.

Выразим распределение давления через ширину зазора на входе h_1 и выходе h_2

$$p(x)-p_0=\frac{6\eta U l_0}{h_1^2-h_2^2}\frac{(h_1-h)(h-h_2)}{h^2}\left[1+\frac{4N^2}{\lambda}+\frac{4N^2}{k(h_1+h_2)}\right] \tag{3.14}$$

Проинтегрировав это выражение, найдем результирующую сил давления

$$P=\int_0^{l_0}(p-p_0)\,dx=$$

$$=\frac{6\eta U l_0^2}{(K-1)^2h_2^2}\left[\ln K-2\frac{K-1}{K+1}+\frac{2N^2(K-1)^3}{kh_2K(K+1)^2}\right] \tag{3.15}$$

где $K=h_1/h_2$. Последний член в скобках в уравнении (3.15) представляет собой вклад за счет микроструктуры жидкости.

Для силы вязкости на движущейся плоскости (касательное напряжение при $y=0$), справедливое для больших λ, будем иметь

$$\tau_{yx}^0=\tau_{yx}(x,0)=(\eta+\eta_r)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0=-\frac{\eta U}{h}\left[1+\frac{h^2}{2\eta U}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{2N^2}{\lambda}\right] \tag{3.16}$$

Интегрируя уравнение (3.16), найдем результирующую касательных напряжений

$$F=-\int_0^{l_0}\tau_{yx}^0\,dx=$$

$$=\frac{\eta U l_0}{(K-1)h_2}\left\{4\ln K-\frac{6(K-1)}{K+1}+\frac{2N^2(K-1)}{kh_2K}\left[1+\frac{3(K-1)^2}{(K+1)^2}\right]\right\} \tag{3.17}$$

Как видим, учет структурности (микроструктуры) приводит к увеличению результирующей касательных напряжений.

Безразмерный коэффициент в выражении (3.15) для поддерживающей силы зависит от отношения наибольшей толщины слоя h_1 и наименьшей h_2. Этот коэффициент, при заданном N, обращается в нуль при $K=1$ и $K=\infty$, следовательно, внутри этого интервала он будет иметь экстремальное значение. Беря производную от этого коэффициента и приравнивая нулю, получим трансцендентное уравнение

$$5K^5 + 2K^4 - 4K^3 - 2K^2 - K - 2K^2(K+1)^3 \ln K -$$
$$- \frac{2N^2}{kh_2}[2K^5 - 9K^4 + 14K^3 - 8K^2 + 1] = 0$$

Приближенные значения действительного и положительного, следующего после единицы корня этого уравнения для различных значений N^2/kh_2 приведены в таблице.

Таблица

N^2/kh^2	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
K	2.20	2.17	2.15	2.13	2.12	2.10

Чтобы показать влияние учета микроструктуры жидкости на значения результирующей сил давления P и результирующей касательных напряжений F, используем их значения, полученные Шлихтингом [14] при анализе решения классического случая. Результирующая сила давления имеет максимум при $K = 2.2$ [14, 16]. В этом случае имеем [14, 16]

$$P_{\max} \approx 0.16 \frac{\eta U l_0^2}{h_2^2}, \qquad F \approx 0.75 \frac{\eta U l_0}{h_2}, \quad \frac{F}{P_{\max}} = 4.7 \frac{h_2}{l_0} \tag{3.18}$$

где $F/P_{\max}$ называется коэффициентом трения [14].

Независимо от конкретного значения K, при котором P, определяемое уравнением (3.15), максимально для фиксированных постоянных, характеризующих вещество слоя смазки, подставляя в уравнения (3.15) и (3.17) $K = 2.2$, получим

$$P_{2,2} \approx \frac{\eta U l_0^2}{h_2^2}\left[0.16 + \frac{0.64N^2}{kh_2}\right], \qquad F_{2,2} \approx \frac{\eta U l_0}{h_2}\left[0.75 + \frac{1.3N^2}{kh_2}\right]$$
$$\left(\frac{F}{P}\right)_{2,2} = \frac{h_2}{l_0}\left[4.7 - \frac{11N^2}{kh_2}\right] \tag{3.19}$$

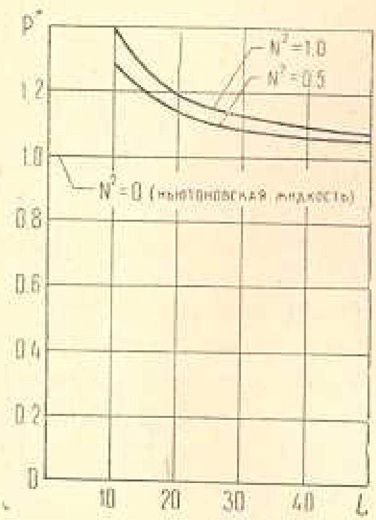
Введем безразмерный параметр L, который представляет собой отношение толщины слоя у правого края пластинки h_2 к характерной материальной длине l, то есть $L = h_2/l$. Это число характеризует взаимосвязь между геометрией и свойствами жидкости.

Для обсуждения результатов удобнее формулы (3.19) представить в виде

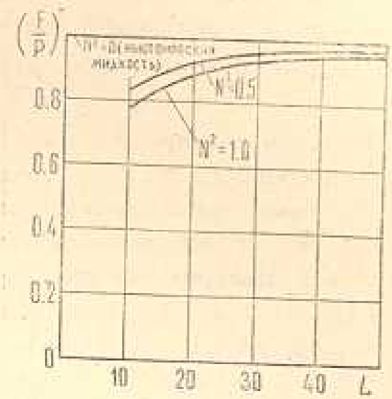
$$P^* = \frac{P_{2,2}}{P_{\max}} = 1 + \frac{4N}{L}, \qquad F^* = \frac{F_{2,2}}{F} = 1 + \frac{1.73N}{L}$$
$$\left(\frac{F}{P}\right)^* = \frac{(F/P)_{2,2}}{(F/P_{\max})} = 1 - \frac{2.34N}{L} \tag{3.20}$$

Фиг. 3 отражает изменение результирующей безразмерных сил давления в зависимости от параметра L для различных значений N. График показывает, что снижение L соответствует возрастанию безразмерной силы P^* при всех значениях N, кроме $N=0$, относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости, в котором она не зависит от изменений L.

На фиг. 4 показаны графики зависимости относительного коэффициента трения $(F/P)^*$ от L для различных значений N. График показывает, что снижение L соответствует снижению относительного коэффициента трения при всех значениях N, кроме $N=0$, относящегося к классическому случаю ньютоновской жидкости, когда коэффициент трения не зависит от L.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Для отыскания концентрации c_1 вещества $k=1$ воспользуемся уравнением (2.8), которое в безразмерном виде записывается так:

$$\frac{dc_1}{dy^*}=\left(-A-B\frac{d\omega^*}{dy^*}\right)(\omega^*-\Omega^*) \tag{3.21}$$

где*

$$A=\frac{1}{6}a_1a_2k_p\eta^{-1}(h-H)^{-1}h^3P_{*x}^2, \quad B=\frac{1}{36}a_1a_4\frac{1}{\rho D}\eta^{-2}(h-H)P_{*x}^2$$

$$\Omega^*=\frac{\Omega h}{U}=\frac{1}{2}\left[1+3(1-2y^*)(1-H^*)\right]$$

$$\omega^*=\frac{\omega h}{U}=3\left[\frac{\operatorname{sh}\lambda y^*}{\operatorname{sh}\lambda}-y^*\right](1-H^*)-$$

$$-\frac{1}{2}(4-3H^*)\left[\frac{e^{-\lambda y^*}(e^{\lambda}-1)-e^{\lambda y^*}(e^{-\lambda}-1)}{2\operatorname{sh}\lambda}-1\right]$$

* Выражения Ω^* и ω^* соответствуют случаю $\eta_r/\eta=0$.

$$y^* = \frac{y}{h}, \quad H^* = \frac{H}{h}, \qquad P_{,x} = \frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.22}$$

Будем считать заданной среднюю по сечению концентрацию массы $k = 1$ вещества

$$\bar{c}_1 = \frac{1}{h}\int_0^h c_1 dy \quad (0 \leqslant \bar{c}_1 \leqslant 1) \tag{3.23}$$

или в безразмерной форме

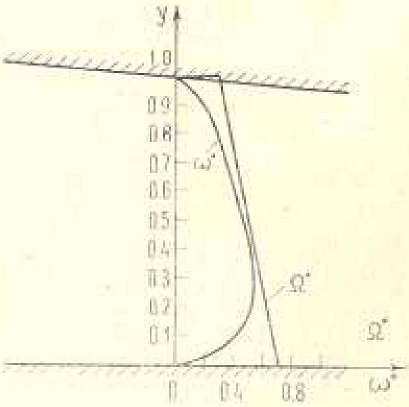
$$\bar{c}_1 = \int_0^1 c_1 dy^* \quad (0 \leqslant \bar{c}_1 \leqslant 1) \tag{3.24}$$

Из равенства (3.21) видно, что в рассматриваемом случае диффузионные процессы определяются коэффициентами диффузии A и B.

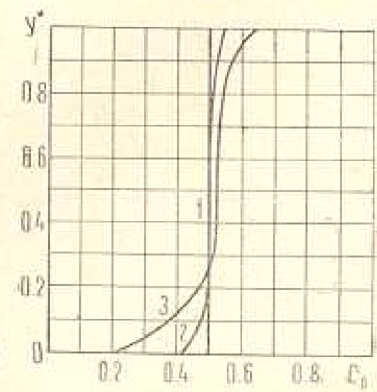
На фиг. 5 приведены графики $\omega^*(y^*)$ и $\Omega^*(y^*)$ (было принято $\lambda = 10$, $\eta_r/\eta = 0$, $x = l_0/2$, $K = 2{,}2$).

Выясним влияние величины коэффициентов A и B на распределение концентрации $c_1(y^*)$. Пусть сначала $B = 0$.

Для того, чтобы решения уравнения (3.21) имели физический смысл, необходимо, чтобы коэффициент A (а также B) обращался в нуль при $c_1 = 0$ и 1. Заметим, что коэффициенты A и B — положительные величины (при $x = l_0/2$). Зависимость коэффициентов A и B от концентрации должна определяться либо теоретически, либо экспериментальным путем. В качестве простейшей зависимости можно выбрать [15] $A(c_1) = \alpha c_1(1 - c_1)$.



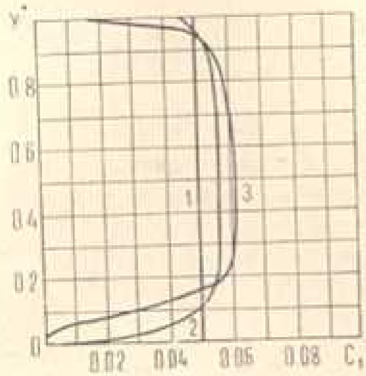
Фиг. 5.



Фиг. 6.

На фиг. 6 приведены кривые распределения концентрации при различных значениях параметра α ($\bar{c}_1 = 0.5$, $\lambda = 10$, $\eta_r/\eta = 0$, $x = l_0/2$, $K = 2{,}2$, кр. 1, 2, 3 соответствуют значениям $\alpha = 0$; 5; 20). В этом случае, как следует из результатов численных расчетов, теория дает значительное понижение концентрации твердой фазы вблизи стенки опорной поверхности (в сечении $x = l_0/2$).

Положим $A = 0$. Из экспериментов известно, что приосевой эффект наблюдается лишь при малых значениях средней концентрации [5, 6]. Чтобы решения удовлетворяли этому условию, коэффициент B должен быть отличен от нуля только при малых значениях концентрации, например, [15] $B(c_1) = \beta c_1 (1 - c_1)^n$.



Фиг. 7.

На фиг. 7 показано, как влияет величина β на распределение концентрации по сечению ($\bar{c}_1 = 0.05$, $n = 10$, $\lambda = 10$, $\eta_r/\eta = 0$, $x = l_0/2$, $K = 2.2$; кр. 1, 2, 3 соответствуют значениям $\beta = 0$; 10; 50).

В реальных условиях, по-видимому, оба коэффициента A и B отличны от нуля.

Ереванский государственный университет

Поступила 29 I 1981

Լ. Գ. ՊԵՐՈՍՅԱՆ

ՅՈՒՂՄԱՆ ՀԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍՈՒՍՊԵՆԶԻԱՅԻ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Կիրառված է երկհեղուկ միկրոպոլյար կոնտինուումի տեսությունը երկչափ հոսքի դիտարկման համար, սահքի առանցքակալը բնութագրող երկրաչափության նկատմամբ։ Արտածվել են սուսպենզիայի յուղման շերտի և կոնցենտրացիայի բաշխման հավասարումները։ Քննարկված են կոնցենտրացիայի, արագությունների և մասնիկների պտտման անկյունային արագությունների բաշխումը։

THE SUSPENSION LAYER LUBRICATION HYDRODYNAMIC THEORY

L. G. PETROSIAN

Summary

The theory of two-liquid micropolar continuum is used in order to consider two-dimentional flow in application to geometry, characterizing the bearing of sliding. The suspension lubrication layer equations and the concentration distribution equations are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haynes R. H.* Physical basis of the dependence of blood viscosity on tube radius.—American J. of Physiol. 1960, vol. 198, No. 6, p. 1193—1200.
2. *Higginbotham G. H., Oliver D. R., Ward S. G.* Studies of the viscosity and sedimentation of suspensions, Part 4, Capillary—tube viscometry of applied to stable suspensions of Spherical particles.—Britisch J. of Appl. Phys. 1958, vol. 9, No. 7, p. 372—377.
3. *Goldsmith H. L., Mason S. G.* The Microrheology of Dispersions. In: Rheology: Theory and Applications, vol. 4, Ed. by R. F. Eirich, New York: Academic Press, 1967, p. 86–250.
4. *Bayliss L. E.* The flow of suspensions of red blood cells in capillary tubes. Changes in the "cell-free" marginal sheath with changes in the shearing stress.—The Journal of Physiology, Cambridge university press, London—N. Y., 1965, vol. 179, No. 1, p. 1—25.
5. *Segré G., Silberberg A.* Behavior of macroscopic rigid spheres in Poiseuile flow.—J. of Fluid Mechanics, 1962, vol. 14, part I, II, p. 115—157.
6. *Segré G., Silberberg A.* Radial particle displacements in Poiseuile flow of suspensions.—Nature, 1961, vol. 189, No. 4760, p. 209—210.
7. *Meixner J.* Der Drehimpulssats in der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse.—Zeitschrift für Physik, 1961, Band 164, 1 Heft, p. 145—155.
8. *Bugliarello G., Hayden J. W.* High-Speed Microcinematographic Studies of Blood Flow in vitro.—Science, 1962, vol. 138, No. 3544, p. 981—983.
9. *Kline K. A., Allen S. J., DeSilva C. N.* A continuum approach to blood flow.—Biorheology, 1968, vol. 5, No. 1, p. 111—118.
10. *Павловский Ю. Н., Регирер С. А., Скобелева И. М.* Гидродинамика крови.—Итоги науки и техники, серия Гидромеханика, 1968, М., 1970, с. 9—96.
11. *Бреннер Г.* Реология двухфазных систем.—Реология суспензий (сб. статей), М.: «Мир», 1975, с. 11—67.
12. *Петросян Л. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 1. Основные уравнения.—Ученые записки ЕГУ, 1976, № 3, с. 56—63.
13. *Петросян Л. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 2. Феноменологические уравнения. Перекрестные эффекты.—Ученые записки ЕГУ, 1977, № 2, с. 74—80.
14. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: «Наука», 1974, 711 с.
15. *Петросян Л. Г.* Исследование гидродинамического поведения многокомпонентного континуума с асимметрическим тензором напряжения. 3. Пристеночный и приосевой эффекты в пуазейлевском течении суспензии.—Ученые записки ЕГУ, 1978, № 2, с. 46—54.
16. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955, 519 с.