

А. В. МАНЖИРОВ

КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНО-СТАРЕЮЩЕГО ВЯЗКО-
 УПРУГОГО АРМИРОВАННОГО СТЕРЖНЯ

Исследуются колебания неоднородно-стареющего вязкоупругого армированного стержня с сосредоточенной массой на конце, причем учитывается неоднородное изменение по времени как упругих, так и реологических характеристик [1, 2]. Приведено уравнение продольных колебаний стержня и показано, что учет неоднородного старения сводится к усреднению по длине стержня упругих и наследственных функций. Получены выражения для перемещений, частот и затуханий для различных случаев. В качестве примера рассмотрены колебания железобетонного стержня.

1. Рассмотрим армированный стержень из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала, имеющий длину l , площадь сечения основного материала F , площадь сечения арматуры F^* , несущий на нижнем конце массу, по сравнению с которой массой самого стержня можно пренебречь. Верхний конец стержня жестко зашпемлен.

Зависимость между напряжениями и деформациями для основного материала примем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(y, t) &= \frac{1}{E(t + \kappa(y))} \left[\sigma(y, t) - \int_{t_0}^t K(t + \kappa(y), \tau + \kappa(y)) \sigma(y, \tau) d\tau \right] \\ K(t + \kappa(y), \tau + \kappa(y)) &= \\ &= E(t + \kappa(y)) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau + \kappa(y))} + C(t + \kappa(y), \tau + \kappa(y)) \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

$C(t + \kappa(y), \tau + \kappa(y))$ — мера ползучести, $E(t + \kappa(y))$ — мгновенный модуль упругости, $\kappa(y)$ — возраст материала в точке y к моменту t_0 . Координата y отсчитывается от верхнего зашпемленного конца стержня.

Зависимость между напряжениями и деформациями для материала арматуры возьмем в виде

$$\varepsilon^*(y, t) = \frac{\sigma^*(y, t)}{E^*} \quad (1.2)$$

где E^* — модуль упругости. Естественно полагать $\varepsilon(y, t) = \varepsilon^*(y, t)$.

Пусть от момента t_0 до t_1 стержень находился под квазистатическим воздействием нагрузки $P(t)$, которая в момент t_1 мгновенно уменьшилась до величины $G < P(t_1)$, вследствие чего возникли вертикальные колебания массы $M = G/g$, где g — ускорение свободного падения.

Интегрируя (1.1) и учитывая то обстоятельство, что напряжения в стержне не зависят от y , найдем перемещение массы

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \int_0^l \varepsilon(y, t) dy = \frac{l}{E_c(t)} \left[\sigma(t) - \int_{t_0}^t H_c(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \\
 \frac{1}{E_c(t)} &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{dy}{E(t + x(y))} \\
 H_c(t, \tau) &= E_c(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_c(\tau)} + C_c(t, \tau) \right] \\
 C_c(t, \tau) &= -\frac{1}{l} \int_0^l C(t + x(y), \tau + x(y)) dy
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Функция $E_c(t)$ есть некоторый усредненный по длине модуль упругости, $C_c(t, \tau)$ — усредненная мера ползучести, $H_c(t, \tau)$ — усредненное ядро.

Пусть мера ползучести имеет вид

$$C(t + x(y), \tau + x(y)) = \varphi(\tau + x(y)) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$$

где функция $\varphi(\tau + x(y))$ определяет процесс старения материала стержня. Разрешая (1.3) относительно напряжений, получим

$$\sigma(t) = \frac{E_c(t)}{l} \left[u(t) + \int_{t_0}^t u(\tau) R(t, \tau) \frac{E_c(\tau)}{E_c(t)} d\tau \right] \tag{1.4}$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента $H_c(t, \tau)$.

Аналогично из (1.2) найдем

$$\sigma^*(t) = \frac{u(t) E^*}{l} \tag{1.5}$$

Учитывая силы инерции при $t > t_0$, получим интегро-дифференциальное уравнение, описывающее движение массы

$$\begin{aligned}
 \frac{FE_c(t)}{l\beta(t)} \left[u(t) + \int_{t_0}^t u(\tau) \beta(t) R(t, \tau) \frac{E_c(\tau)}{E_c(t)} d\tau \right] + \\
 + h(t - t_1) M \ddot{u}(t) - W(t) = 0 \\
 W(t) = \begin{cases} P(t), & t_0 \leq t \leq t_1 \\ G, & t > t_1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь $h(t - t_1)$ — единичная функция Хевисайда,

$$\beta(t) = \left(1 + \frac{F^* E^*}{FE_c(t)} \right)^{-1}$$

Процесс колебаний удобно рассматривать в подвижной системе координат, привязанной к точке, в которой находился бы конец стержня при действии на него только квазистатической нагрузки $W(t)$.

Положим в формуле (1.6)

$$u(t) = u_1(t) + \xi(t) \quad (1.7)$$

где $u_1(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{FE_c(t)}{l\beta(t)} \left[u_1(t) + \int_{t_0}^t u_1(\tau) \beta(t) R(t, \tau) \frac{E_c(\tau)}{E_c(t)} d\tau \right] = W(t) \quad (1.8)$$

Тогда, учитывая тот факт, что $\bar{u}_1(t)$ пренебрежимо мало, получим уравнение

$$\frac{FE_c(t)}{l\beta(t)} \left[\xi(t) + \int_{t_0}^t \xi(\tau) \beta(t) R(t, \tau) \frac{E_c(\tau)}{E_c(t)} d\tau \right] + M\ddot{\xi}(t) = 0 \quad (1.9)$$

Нижний предел взят равным t_0 , так как $\xi(t) = 0$ при $t < t_0$.

Нетривиальным является определение начальных условий для функции $\xi(t)$. В неподвижной системе координат имеем

$$u(t_1) = u_0, \quad \dot{u}(t_1) = 0 \quad (1.10)$$

В момент t_1 нагрузка мгновенно уменьшается на величину $P(t_1) - G$. В соответствии с (1.8) функция $u_1(t)$ в точке t_1 имеет скачок на величину упругого перемещения, равный $\beta(t_1) l (P(t_1) - G) (E_c(t_1) F)^{-1}$. Так как при $t < t_1$ функция $u(t) = u_1(t)$, то из (1.7) следует

$$\xi(t_1) = u_1(t_1^-) - u_1(t_1^+) = l\beta(t_1) (P(t_1) - G) (E_c(t_1) F)^{-1} \quad (1.11)$$

то есть начальное перемещение $\xi(t_1)$ равно величине упругого скачка в момент t_1 .

Пренебрегая величиной $u_1(t)$, из второго условия (1.10) получим

$$\dot{\xi}(t_1) = 0 \quad (1.12)$$

2. В динамических задачах обычно рассматриваются процессы, продолжающиеся не слишком долгое время, на протяжении которого старением материала можно пренебречь. Дифференцируя (1.9) дважды по t и пренебрегая старением с момента начала колебаний t_0 , получим

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}(t) + \gamma [1 + E_c(t_1) \varphi_c(t_1)] \dot{\xi}(t) + \frac{E_c(t_1) F}{M\beta(t_1) l} \xi(t) + \\ + \frac{E_c(t_1) F}{M\beta(t_1) l} \gamma [1 + (1 - \beta(t_1)) E_c(t_1) \varphi_c(t_1)] \xi(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\varphi_c(t) = \frac{1}{l} \int_0^t \varphi(t + x(y)) dy$$

Для уравнения (2.1) будем иметь два дополнительных начальных условия. Именно, полагая $t=t_1$ в (1.9) и в продифференцированном один раз по t уравнении (1.9), найдем

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}(t_1) &= \frac{G - P(t_1)}{M} \\ \ddot{\xi}(t_1) &= \beta(t_1) \gamma E_c(t_1) \varphi_c(t_1) \frac{P(t_1) - G}{M}\end{aligned}\quad (2.2)$$

Сделаем замену переменной и обозначим

$$t = \tau + t_1, \quad X(\tau + t_1) = \frac{\partial \xi(\tau + t_1)}{\partial \tau}\quad (2.3)$$

Применив к (2.1) преобразование Лапласа по τ , с учетом (1.12) и (2.2), получим для трансформанты выражение

$$\tilde{X}(\tau + t_1) = \frac{[s + \gamma [1 + (1 - \beta(t_1)) E_c(t_1) \varphi_c(t_1)]] \frac{G - P(t_1)}{M}}{f(s)}\quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}f(s) &= s^3 + s^2 \gamma [1 + E_c(t_1) \varphi_c(t_1)] + s \frac{E_c(t_1) F}{M \beta(t_1) l} + \\ &+ \gamma \frac{E_c(t_1) F}{M \beta(t_1) l} [1 + (1 - \beta(t_1)) E_c(t_1) \varphi_c(t_1)]\end{aligned}$$

где s — параметр преобразования Лапласа.

Согласно критерию Рауса-Гурвица все корни уравнения

$$f(s) = 0\quad (2.5)$$

имеют отрицательные действительные части.

1) Пусть уравнение (2.5) имеет корни $-a$, $-b + iv$, $-b - iv$, тогда из (2.3) и (2.4) с учетом (1.11) следует

$$\begin{aligned}\xi(\tau + t_1) &= \frac{G - P(t_1)}{M(2ab + b^2 + v^2)(a^2 + b^2 + v^2 - 2ab)} \left\{ 2abe^{-a\tau} + \right. \\ &+ \left. \left[-(a^2 + b^2 + v^2) \cos v\tau + \frac{b}{v} (a^2 - b^2 - v^2) \sin v\tau \right] e^{-b\tau} \right\}\end{aligned}\quad (2.6)$$

где a — затухание непериодической части перемещения, b — затухание периодической части, v — частота колебаний.

2) Если уравнение (2.5) имеет три различных действительных корня $-a_0$, $-b_0$, $-c_0$, то аналогично

$$\begin{aligned}\xi(\tau + t_1) &= \frac{G - P(t_1)}{M(a_0 b_0 + a_0 c_0 + b_0 c_0)} \left[\frac{-a_0^2 (b_0 + c_0)}{-a_0^3 + a_0^2 b_0 + a_0^2 c_0 - a_0 b_0 c_0} e^{-a_0 \tau} + \right. \\ &+ \frac{-b_0^2 (a_0 + c_0)}{-b_0^3 + a_0 b_0^2 + b_0^2 c_0 - a_0 b_0 c_0} e^{-b_0 \tau} + \left. \frac{-c_0^2 (a_0 + b_0)}{-c_0^3 + a_0 c_0^2 + b_0 c_0^2 - a_0 b_0 c_0} e^{-c_0 \tau} \right].\end{aligned}\quad (2.7)$$

a_0 , b_0 , c_0 — затухания перемещения.

3) В том случае, когда уравнение (2.5) имеет действительные кратные корни, получим:

а) если $-a_1$ — действительный корень, $-b_1$ — двукратный действительный корень, то

$$\xi(\tau + t_1) = \frac{G - P(t_1)}{M(b_1^2 + 2a_1b_1)(a_1 - b_1)^2} \{ [(-a_1 + (b_1^2 + a_1b_1)\tau)(a_1 - b_1) - (b_1^2 + a_1b_1)] e^{-b_1\tau} + 2a_1b_1e^{-a_1\tau} \} \quad (2.8)$$

б) если $-a_1$ — трехкратный действительный корень, то

$$\xi(\tau + t_1) = \frac{G - P(t_1)}{3a_1^2M} (a_2^2\tau^2 - a_2\tau - 1) e^{-a_1\tau} \quad (2.9)$$

где a_1 , b_1 и a_2 — затухания перемещений.

Как видно из приведенных выше выражений для перемещений, во всех случаях $\xi(\tau + t_1) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то есть, начиная с некоторого момента времени, динамическим перемещением $\xi(\tau + t_1)$ можно пренебречь и учитывать только статическое $u_s(t)$. Периодические колебания возникают только в первом случае, в остальных же значение $\xi(\tau + t_1)$ убывает от начального до нуля, причем порядок убывания в случаях, описываемых выражениями (2.7), (2.8), (2.9), будет соответственно $e^{-a_1\tau}$, $\tau e^{-b_1\tau}$, $\tau^2 e^{-a_1\tau}$.

3. В качестве примера рассмотрим колебания железобетонного стержня, состоящего из двух равных частей. Одна часть к моменту начала колебаний имеет возраст τ_1 , другая — τ_2 . Возьмем следующие значения функций и параметров:

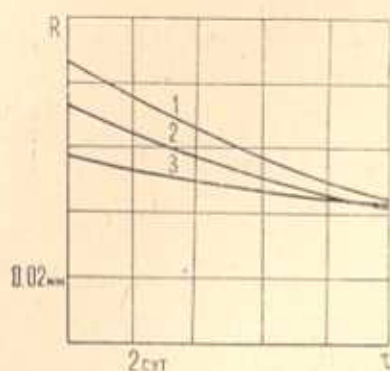
$$E(t + x(y)) = E_0 (1 - \lambda \exp(-\rho(t + x(y)))) \\ \varphi(t + x(y)) = C_0 + A \exp(-\alpha(t + x(y)))$$

$$E_0 = 3 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \lambda = 1; \rho = 0.033 \text{ сут}^{-1}; C_0 = 0.2761 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}; E^* = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \alpha = 0.031 \text{ сут}^{-1}; l = 2 \text{ м}; F = 0.04 \text{ м}^2; F^* = 0.0008 \text{ м}^2; A = 2 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}; P(t_1) = 1 \cdot 10^8 \text{ Н}; G = 5 \cdot 10^8 \text{ Н}; \gamma = 0.06 \text{ сут}^{-1}; \tau_1 = 30 \text{ сут}; \tau_2 = 300 \text{ сут}.$$

При данных значениях величин реализуется первый случай, и для нахождения перемещения необходимо пользоваться формулой (2.6).

В таблице в первой колонке приводятся результаты для однородно-стареющего стержня, возраст которого к моменту начала колебаний — τ_1 , во второй — для выбранного неоднородно-стареющего стержня, в третьей — для однородно-стареющего стержня, возраст которого к началу колебаний — τ_2 . Данные таблицы показывают, что неоднородное старение стержня существенно влияет на затухания и частоту колебаний, в особенности, на затухание периодической части перемещения. Отметим, что именно периодическая часть определяет величину динамического перемещения в нашем случае, так как значения, получаемые для непериодической части, пренебрежимо малы.

На фиг. 1 приведены графики зависимости амплитуды колебаний R от времени t для тех же стержней.



Фиг. 1.

Автор благодарит Н. Х. Арутюняна за ценные советы и помощь.

Московский ордена Трудового Красного
Знамени инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Получена 16 XII 1980

Ա. Վ. ՄԱՆՅԻՐՈՎ

ԱՆՀԱՄԱՍԵՆԻ ԾԵՐԱՑՈՂ ԱՌԱՋԳԱՄԱՆՈՒՑԻՎ ԱՄՐԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ՁՈՂԻ
ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ս մ ֆ ո ֆ ու մ

Գիտարկվում են անհամասեռ ձերացող առանձգամածուցիկ ամրանավորված ձողի տատանումները, երբ ձողի ծայրին կիրառված է կենտրոնացված ուժ:

Տարրեր դեպքերի համար ստացված են տեղափոխությունների, հաճախականությունների և մարումների արտահայտությունները:

VIBRATIONS OF NONHOMOGENEOUSLY-AGING VISCOELASTIC ARMATURED ROD

A. V. MANZHIROV

S u m m a r y

Vibrations of nonhomogeneously-aging viscoelastic armatured rod with end concentrated mass are investigated. The equation of the longitudinal vibrations of the rod is solved. The formulas for displacements, frequencies and dampings for various cases are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-старяющихся тел.—Изв. АН СССР, МТГ, 1976, № 3.
2. Арутюнян Н. Х. Краевая задача теории ползучести для нарастающего тела.—ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
4. Ишлинский А. Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации.—ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.