

Н. Х. АРУТЮНЯН, В. В. МЕТЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ НАРАЩИВАЕМЫХ ТЕЛ, ПОДВЕРЖЕННЫХ СТАРЕНИЮ

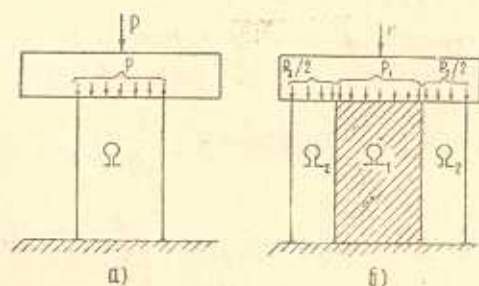
В настоящей работе дается постановка и решение некоторых задач теории ползучести для неоднородно-стареющих тел при их дискретном и непрерывном наращивании элементами различного возраста.

Приводится исходное уравнение и формулируются условия, которые определяют решение задач теории ползучести для таких тел. Излагается метод решения основных уравнений для рассматриваемых задач и исследуется их структура. Выбор задач и методы их решения в известной степени определялись стремлением получить результаты, удобные для приложений.

1. Напряжения и деформации в неоднородно-стареющем вязкоупругом теле при его дискретном наращивании.

Рассмотрим призматическое тело Ω , с поперечным сечением F_1 и высотой h , материал которого обладает свойством ползучести и старения. Если характерный размер поперечного сечения этого тела мал по сравнению с высотой h , то будем называть его призматическим стержнем.

Известно, что рассматриваемое призматическое тело изготовлено в момент времени t_1^* и нагружено силой $P(t)$, как показано на фиг. 1а, в момент времени t_0 . Трение между торцами этого тела с жесткими основаниями и плитой, через которую передается данному телу воздействие внешней нагрузки $P(t)$, отсутствует.



Фиг. 1.

Как обычно, t будем считать моментом наблюдения (абсолютное время), причем начало отсчета времени может быть выбрано произвольно.

Положим далее, что в некоторый момент времени t_2 , происходит сращивание (стыковка) вязкоупругого тела Ω_2 с поперечным сечением F_2 , изготовленного в момент времени t_2^* , с телом Ω_1 по его боковой поверхно-

сти S_{12} , которая в момент сращивания свободна от напряжений (фиг. 16). Полагаем, что тело Ω_2 таково, что после сращивания имеются лишь составляющие напряжений вдоль оси тел, и поперечные сечения тел не поворачиваются. Обозначим через Ω область тела, объединяющую области тел Ω_1 и Ω_2 после их стыковки, то есть в момент времени t_{12} . Требуется определить поля напряжений, деформаций и перемещений в теле Ω на протяжении всего интервала времени $t_{12} \leq t < \infty$.

Уравнение состояния для тела, занимающего до стыковки область Ω_1 и нагруженного в момент времени τ_0 , согласно [1, 2], будет

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= \frac{\sigma_1(t)}{E_1(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma_1(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \quad t \leq t_{12} \\ \sigma_1(t) &= \frac{P(t)}{F_1}, \quad K_1(t, \tau) = K(t - \tau_1^*, \tau - \tau_1^*) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right], \quad E_1(t) = E(t - \tau_1^*)$$

Здесь $\sigma_1(t)$ и $\varepsilon_1(t)$ — компоненты напряжения и деформации в теле Ω_1 до стыковки вдоль оси x , $E(t)$ — модуль упруго-мгновенной деформации, $C(t, \tau)$ — мера ползучести.

Таким образом, для всех моментов времени до момента стыковки, то есть при $\tau_0 \leq t < t_{12}$, напряжения и деформации в призматическом теле Ω_1 , находящемся под действием осевой силы $P(t)$, определяются соотношениями (1.1).

Перейдем к выводу уравнений, определяющих решение задачи теории ползучести для всего тела Ω , объединяющего два стареющих тела Ω_1 и Ω_2 после их стыковки, на всем интервале $t_{12} \leq t < \infty$. Уравнение равновесия будет (фиг. 16)

$$P_1(t) + P_2(t) = P(t) \quad (1.2)$$

Приращение деформации в призматическом теле Ω_1 , начиная с момента сращивания, равно

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_1(t) &= \varepsilon_1(t) - \varepsilon_1(t_{12}) = \frac{P_1(t)}{F_1 E_1(t)} - \frac{P(t_{12})}{F_1 E_1(t_{12})} + \\ &+ \int_{\tau_0}^{t_{12}} \frac{P(\tau)}{F_1} (K_1(t_{12}, \tau) - K_1(t, \tau)) d\tau - \int_{t_{12}}^t \frac{P_1(\tau)}{F_1} K_1(t, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.3)$$

Деформация в теле Ω_2 после стыковки, согласно [3], определится соотношениями

$$\varepsilon_2(t) = \frac{P_2(t)}{F_2 E_2(t)} - \int_{t_{12}}^t \frac{P_2(\tau)}{F_2} K_2(t, \tau) d\tau$$

$$E_2(t) = E(t - \tau_2^*), \quad K_2(t, \tau) = K(t - \tau_2^*, \tau - \tau_2^*) \quad (1.4)$$

Заметим, что функции, характеризующие модуль упруго-мгновенной деформации и мера ползучести материалов тел Ω_1 и Ω_2 , вообще говоря, могут быть разные. Мы здесь принимаем их одинаковыми, так как рассматриваем задачу о дискретном наращивании в условиях лишь «возрастной неоднородности». Основным условием, которое вводится для сращиваемых тел, является условие равенства приращения деформации $\Delta \varepsilon_1(t)$ в теле Ω_1 и деформации $\varepsilon_2(t)$ в теле Ω_2 после их стыковки, то есть при всех $t \geq t_{12}$.

Приравнявая соотношения (1.3) и (1.4) и пользуясь уравнением равновесия (1.2), получим следующее интегральное уравнение для определения усилия $P_2(t)$:

$$P_2(t) \psi(t) - \int_{t_0}^t P_2(\tau) K_0(t, \tau) d\tau = q(t) \quad (1.5)$$

Здесь функции ψ , K_0 и q равны

$$\psi(t) = (F_1 E_1(t))^{-1} + (F_2 E_2(t))^{-1} \quad (1.6)$$

$$K_0(t, \tau) = F_2^{-1} K_2(t, \tau) + F_1^{-1} K_1(t, \tau) \quad (1.7)$$

$$q(t) = \frac{P(t)}{F_1 E_1(t)} - \int_{t_0}^t \frac{P(\tau)}{F_1} K_1(t, \tau) d\tau - \frac{P(t_{12})}{F_1 E_1(t_{12})} + \int_{t_0}^{t_{12}} \frac{P(\tau)}{F_1} K_1(t_{12}, \tau) d\tau \quad (1.8)$$

Таким образом, задача теории ползучести для призматического тела, подверженного старению, при его дискретном наращивании сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра (1.5). Уравнение (1.5) является исходным соотношением, согласно которому определяется закон перераспределения усилий в стареющих вязкоупругих телах Ω_1 и Ω_2 после их стыковки.

Решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода (1.5) можно представить в виде

$$P_2(t) = \psi(t)^{-1} \left(q(t) + \int_{t_0}^t R(t, \tau) q(\tau) d\tau \right)$$

Здесь $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_3 = K_0(t, \tau) \psi(\tau)^{-1}$, удовлетворяющая уравнению

$$R(t, \tau) - K_3(t, \tau) = \int_{\tau}^t R(t, \xi) K_3(\xi, \tau) d\xi$$

Приведем решение уравнения (1.5) в случае, когда мера ползучести $C(t, \tau)$ имеет вид [4]

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$$

В этом случае, согласно (1.7), ядро $K_0(t, \tau)$ определяется соотношением

$$K_0(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} [\psi(\tau) + C^*(t, \tau)]$$

$$C^*(t, \tau) = \varphi^*(\tau)(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}), \quad \varphi^*(\tau) = \frac{\varphi(\tau - \tau_1^*)}{F_1} + \frac{\varphi(\tau - \tau_2^*)}{F_2} \quad (1.9)$$

При этом уравнение (1.5) можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка, не содержащему функцию $P_2(t)$. Действительно, так как $C^*(t, t) = 0$ и $P_2(t_{12}) = 0$, то уравнение (1.5) можно записать в форме

$$\int_{t_{12}}^t \dot{P}_2(\tau) [\dot{\psi}(\tau) + C^*(t, \tau)] d\tau = q(t)$$

Здесь и далее точкой над знаком функции обозначена операция дифференцирования. Дифференцируя последнее уравнение два раза по t , получим

$$\begin{aligned} \dot{P}_2(t) \dot{\psi}(t) + \int_{t_{12}}^t \dot{P}_2(\tau) \dot{\varphi}^*(\tau) \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau &= \dot{q}(t) \\ \ddot{P}_2(t) \dot{\psi}(t) + \dot{P}_2(t) \ddot{\psi}(t) + \gamma \dot{\varphi}^*(t) \dot{P}_2(t) - \\ - \gamma^2 \int_{t_{12}}^t \dot{P}_2(\tau) \dot{\varphi}^*(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau &= \ddot{q}(t) \end{aligned}$$

Исключая из этих соотношений интеграл

$$\int_{t_{12}}^t \dot{P}_2(\tau) \dot{\varphi}^*(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau$$

имеем, что

$$\ddot{P}_2(t) \dot{\psi}(t) + \dot{P}_2(t) (\ddot{\psi}(t) + \gamma \dot{\varphi}^*(t) + \gamma \dot{\psi}(t)) = \ddot{q}(t) + \gamma \dot{q}(t)$$

Решая полученное дифференциальное уравнение при начальных условиях

$$P_2(t_{12}) = 0, \quad \dot{P}_2(t_{12}) = \dot{q}(t_{12}) \dot{\psi}^{-1}(t_{12})$$

получим окончательно

$$P_2(t) = \int_{t_{12}}^t \dot{q}(\tau) \left[\dot{\psi}(\tau)^{-1} - \gamma \dot{\varphi}^*(\tau) \dot{\psi}(\tau)^{-2} e^{\gamma(\tau)} \int_{\tau}^t e^{-\gamma(z)} dz \right] d\tau \quad (1.10)$$

где

$$\eta(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} [\gamma + (\dot{\psi}(z) + \gamma\varphi^*(z))\psi(z)^{-1}] dz$$

Если сила $P(t)$ постоянна, то из (1.8), (1.10) следует

$$\begin{aligned} \bar{P}_2(t) &= P\gamma e^{-\gamma t_0} \varphi(\tau_1) \int_0^t \bar{E}(\tau) \exp\left\{-\gamma \int_0^{\tau} (1 + \bar{\varphi}(z)\bar{E}(z)) dz\right\} d\tau \\ \bar{\varphi}(\tau) &= \varphi(\tau + t_0 + \tau_1) + \alpha\varphi(\tau + \tau_2) \\ \bar{E}(\tau) &= [E^{-1}(\tau + t_0 + \tau_1) + \alpha E^{-1}(\tau + \tau_2)]^{-1} \\ \alpha &= F_1/F_2, \quad t_0 = t_{12} - \tau_0, \quad \tau_1 = \tau_0 - \tau_1^* \\ \tau_2 &= t_{12} - \tau_2^*, \quad \bar{P}_2(t) = P_2(t_{12} + t), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь $\bar{P}_2(t)$ — усилие, передаваемое на тело Ω_2 спустя время t после момента стыковки, t_0 — интервал времени между моментом приложения постоянной нагрузки P к телу Ω_1 и моментом стыковки, а τ_i — соответственно возраст тела Ω_i в момент приложения к нему нагрузки. Соотношения (1.11) определяют зависимость усилия $\bar{P}_2(t)$, передаваемого телу Ω_2 , от времени t (отсчитываемого с момента стыковки) и трех временных параметров t_0, τ_1, τ_2 , полностью определяющих процесс дискретного наращивания во времени. Из (1.11) следует, что усилие $\bar{P}_2(t)$ монотонно возрастает от нуля при $t = 0$ (то есть в момент стыковки) до некоторого предельного значения $\bar{P}_2(\infty)$. Отметим, что характерное время рассматриваемого переходного процесса меньше характерного времени ползучести данного материала (равного $1/\gamma$), так как нарастание деформации тела Ω_1 со временем происходит при одновременном уменьшении усилия P_1 , прикладываемого к этому телу. Характерное время рассматриваемого процесса, определяемое показателем экспоненты подинтегральной функции в выражении для $\bar{P}_2(t)$ в (1.11), будет по порядку величины $1/\gamma(1 + \langle \bar{\varphi}\bar{E} \rangle)$, где $\langle \bar{\varphi}\bar{E} \rangle$ — среднее значение функции $\bar{\varphi}\bar{E}(t)$. Далее, нетрудно видеть, что интеграл в выражении для $\bar{P}_2(t)$ в (1.11) не превосходит некоторой постоянной для любых значений t, t_0, τ_1, τ_2 (в силу ограниченности функций $E(t)$ и $\varphi(t)$, то есть

$$\forall t \quad 0 < \alpha_1 \leq E(t) \leq \alpha_2, \quad 0 < b_1 \leq \varphi(t) \leq b_2$$

Поэтому предельное значение усилия в теле Ω_2 не превосходит величины $c_1 e^{-\gamma t_0}$, где c_1 — некоторая положительная постоянная; значит $\bar{P}_2(\infty)$ экспоненциально стремится к нулю с увеличением интервала t_0 . Отметим, что при отсутствии свойства ползучести у тел Ω_i , то есть при $\varphi(\tau) \equiv 0$,

передачи усилия на тело Ω_2 при постоянной силе P не происходит. На фиг. 2 приведены кривые величины $\bar{P}_2(\infty)/P$ в зависимости от возраста τ_1 при фиксированных значениях возраста τ_2 . Функции $\varphi(\tau)$ и $E(\tau)$ взяты в виде [4]

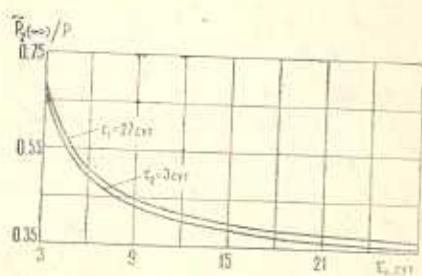
$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= C_0 + A_0/\tau, \quad C_0 > 0, \quad A_0 > 0 \\ E(\tau) &= E_0(1 - \xi e^{-\beta_1 \tau}), \quad E_0 > 0, \quad \xi > 0 \\ &\beta_1 > 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

используемом при аппроксимации кривых ползучести и модуля упруго-мгновенной деформации бетона. При этом учтено, что свойства бетона описываются моделью вязкоупругого стареющего тела при $\tau \geq 3$ сут. Время t_0 и другие параметры задачи фиксированы и равны

$$\begin{aligned} t_0 &= 1 \text{ сут}; \quad F_1/F_2 = 0.25; \quad C_0 E_0 = 0.635; \\ A_0 E_0 &= 3 \text{ сут}; \quad \gamma = 0.03 \text{ сут}^{-1}; \quad \xi = 0.5; \quad \beta_1 = 0.06 \text{ сут}^{-1} \end{aligned}$$

Из фиг. 2 видим, что с увеличением возраста τ_1 усилие во втором теле может уменьшиться более, чем в два раза. Это происходит из-за уменьшения деформативной способности первого тела с увеличением его возраста. Увеличение возраста второго тела τ_2 приводит к незначительному (порядка нескольких процентов) увеличению величины $\bar{P}_2(\infty)/P$, вследствие увеличения жесткости тела Ω_2 .

В заключение этого параграфа рассмотрим смешанную краевую задачу при дискретном наращивании вязкоупругих тел, имеющих различные возрасты. Пусть тела Ω_1 и Ω_2 , моменты изготовления которых соответ-



Фиг. 2.

ственно τ_1^* и τ_2^* , загружены массовыми $f_i(t, x)$ и поверхностными $P_i(t, x)$ силами; кроме того, на части поверхности тел Ω_1, Ω_2 заданы перемещения $V_i(t, x)$. В момент t_{12} происходит сращивание тел Ω_1 и Ω_2 по поверхности S_{12} , которая в этот момент свободна от напряжений. Пусть $\sigma_{ij}(t, x)$ — тензор напряжений, $\varepsilon_{ij}(t, x)$ — тензор деформаций,

$u_i(t, x)$ — вектор перемещений, $n_i(x)$ — вектор нормали к поверхности. Краевая задача для области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ состоит из уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad x \in \Omega \quad (1.13)$$

соотношений Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.14)$$

уравнения состояния (записанного в форме интеграла Стильтьеса [5])

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \Delta_{ijkl}(t - \tau, \mathbf{x}, \tau - \tau^*(\mathbf{x})) d\sigma_{kl}(\tau, \mathbf{x}) \quad (1.15)$$

$$\tau^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \tau_1^*, & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \tau_2^*, & \mathbf{x} \in \Omega_2 \end{cases}$$

а также граничных условий

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j &= P_i(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_s \\ u_i &= V_i(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_u \end{aligned} \quad (1.16)$$

Кроме того, при $t \geq t_{12}$ на поверхности срашивания S_{12} должно выполняться условие непрерывности вектора напряжений, то есть

$$\sigma_{ij}^+ n_j = \sigma_{ij}^- n_j, \quad \mathbf{x} \in S_{12}, \quad t \geq t_{12} \quad (1.17)$$

Здесь σ_{ij}^+ , σ_{ij}^- обозначают значения тензора σ_{ij} с одной и с другой стороны поверхности S_{12} .

Основным условием, которое отличает рассматриваемую задачу дискретного наращивания от обычной кусочно-однородной задачи, является условие непрерывности приращений перемещений на поверхности S_{12} после срашивания:

$$\begin{aligned} u_i^+(t, \mathbf{x}) - u_i^+(t_{12}, \mathbf{x}) &= u_i^-(t, \mathbf{x}) - u_i^-(t_{12}, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in S_{12}, \quad t &\geq t_{12} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Приведем метод решения краевой задачи (1.13)—(1.18), состоящий в сведении ее к последовательности обычных краевых задач. Введем приращения искомого перемещений, деформаций и напряжений, а также заданных перемещений и сил

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}(t) &= \sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t_{12}); & \bar{\varepsilon}_{ij}(t) &= \varepsilon_{ij}(t) - \varepsilon_{ij}(t_{12}) \\ \bar{u}_i(t) &= u_i(t) - u_i(t_{12}); & \bar{f}_i(t) &= f_i(t) - f_i(t_{12}) \\ \bar{P}_i(t) &= P_i(t) - P_i(t_{12}); & \bar{V}_i(t) &= V_i(t) - V_i(t_{12}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$t \geq t_{12}$

Из (1.13)—(1.19) следует, что величины $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$, \bar{u}_i удовлетворяют уравнениям

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{f}_i = 0; \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{t_{12}}^t \Delta_{ijkl}(t - \tau, \mathbf{x}, \tau - \tau^*(\mathbf{x})) d\bar{\sigma}_{kl}(\tau, \mathbf{x}) + \varepsilon_{ij}^B(t, \mathbf{x}), \quad (1.20)$$

$$t \geq t_{12}, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\varepsilon_{ij}^B(t, x) = \int_{\tau^*(x)}^{t_{12}} [\Delta_{ijkl}(t - \tau^*(x), \tau - \tau^*(x)) - \Delta_{ijkl}(t_{12} - \tau^*(x), \tau - \tau^*(x))] d\sigma_{kl}(\tau, x) \quad (1.21)$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} n_j &= \bar{P}_i(t, x), \quad x \in S_0 \\ \bar{u}_i(t, x) &= \bar{V}_i(t, x), \quad x \in S_{12}, \quad t \geq t_{12} \end{aligned} \quad (1.22)$$

а также условию непрерывности приращений векторов перемещений и напряжений на поверхности S_{12}

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^+ n_j &= \bar{\sigma}_{ij}^- n_j, \quad \bar{u}_i^+ = \bar{u}_i^-, \quad x \in S_{12} \\ &t \geq t_{12} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Таким образом, для приращений при $t \geq t_{12}$ мы имеем в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ кусочно-однородную краевую задачу (1.20) — (1.23) с вынужденными деформациями ε_{ij}^B определяемыми решением $\sigma_{ij}(t)$ до момента сращивания, то есть при $t \leq t_{12}$. Это решение определяется историей нагружения тел Ω_i до их сращивания и находится из решения однородной краевой задачи для каждой из областей Ω_i в отдельности при $t \leq t_{12}$. Искомое решение задачи дискретного наращивания будет

$$u_i(t) = u_i(t_{12}) + \bar{u}_i(t), \quad t \geq t_{12} \quad (1.24)$$

Здесь первое слагаемое есть решение однородных краевых задач для отдельных областей Ω_i ; второе — решение кусочно-однородной задачи (1.20) — (1.23) для области Ω при $t \geq t_{12}$.

В более общей задаче о последовательных сращиваниях нескольких тел различного возраста в моменты $t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N$ действуем по индукции. На первом шаге с помощью рассмотренной процедуры находим решение при всех $t \leq t_2$. На k -том шаге, считая решение известным для всех $t \leq t_k$, введем приращения

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^k(t) &= u_i(t) - u_i(t_k), \quad \bar{\sigma}_{ij}^k(t) = \sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t_k) \\ \bar{\varepsilon}_{ij}^k(t) &= \varepsilon_{ij}(t) - \varepsilon_{ij}(t_k), \quad \bar{f}_i^k(t) = f_i(t) - f_i(t_k) \\ \bar{P}_i^k(t) &= P_i(t) - P_i(t_k), \quad \bar{V}_i^k(t) = V_i(t) - V_i(t_k) \\ &t_k < t \leq t_{k+1} \end{aligned}$$

Для приращений имеем краевую задачу с вынужденными деформациями

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ih,j}^k + \bar{f}_i^k &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_{ij}^k &= \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j}^k + \bar{u}_{j,i}^k) \end{aligned}$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^k(t, x) = \int_{t_k}^t \Delta_{ijnl}(t - \tau^*(x), \tau - \tau^*(x)) d\bar{\sigma}_{nl}^k(\tau, x) +$$

$$+ \int_{\tau^*(x)}^{t_k} [\Delta_{ijnl}(t - \tau^*(x), \tau - \tau^*(x)) - \Delta_{ijnl}(t_k - \tau^*(x), \tau - \tau^*(x))] d\tau_{nl}(\tau, x).$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^k n_j = \bar{P}_i^k(t, x), \quad x \in S_v$$

$$\bar{u}_i^k = \bar{V}_i^k(t, x), \quad x \in S_u$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{k+} n_j = \bar{\sigma}_{ij}^{k-} n_j, \quad \bar{u}_i^{k+} = \bar{u}_i^{k-}, \quad x \in S^k$$

$$t_k < t \leq t_{k+1}$$

Здесь S^k — поверхность, по которой произошло k -тое сращивание; $\bar{\sigma}_{ij}^{k+}$, $\bar{\sigma}_{ij}^{k-}$, \bar{u}_i^{k+} , \bar{u}_i^{k-} — значения тензора $\bar{\sigma}_{ij}^k$ и вектора \bar{u}_i^k с одной и с другой стороны поверхности S^k , $\tau^*(x)$ — кусочно-постоянная функция, равная моменту изготовления элемента с координатой x . Искомое решение задачи наращивания будет

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t_k) + \bar{\sigma}_{ij}^k(t)$$

$$t_k < t \leq t_{k+1}$$

Найдя таким образом решение $\sigma_{ij}(t)$ для всех $\tau^*(x) \leq t \leq t_{k+1}$, переходим к $k+1$ -ому шагу.

2. Напряжения и деформации в стареющем вязкоупругом теле при его непрерывном наращивании.

Рассмотрим призматическое тело Ω_0 с поперечным сечением F_0 , материал которого обладает свойством ползучести и старения, а также изменчивости во времени модуля упруго-мгновенной деформации. Известно, что рассматриваемое призматическое тело Ω_0 изготовлено в момент времени $\tau_1^* = 0$ и загружено в момент времени $\tau_1 > 0$, как показано на фиг. 1а. Положим далее, что происходит непрерывное наращивание призматического тела и изменение нагрузки так, что начиная с момента τ_1 , сечение этого тела изменяется по закону $F = F(t)$, $F(\tau_1) = F_0$, а нагрузка по закону $P = P(t)$, $P(\tau_1) = P_0$ (фиг. 3). При этом сохраняется одноосное напряженное состояние. Напряжение $\sigma(t, \xi)$ в момент t в элементе, родившемся в момент $\xi > \tau_1$, согласно [2], будет

$$\sigma(t, \xi) = E(t - \xi) [\varepsilon(t) - \varepsilon(\xi)] - \int_{\xi}^t [\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\xi)] R(t - \xi, \tau - \xi) d\tau \quad (2.1)$$

Здесь $R(t, \tau)$ — ядро релаксации, $\varepsilon(t)$ — деформация в любой точке те-

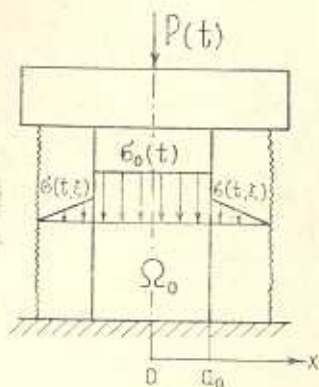
ла Ω_0 в момент наблюдения t , а $\varepsilon(\xi)$ — деформация в этой же точке в момент зарождения ξ нового элемента. Напряжение в теле Ω_0 равно

$$\sigma_0(t) = E(t)\varepsilon(t) - \int_{\tau_1}^t R(t, \tau)\varepsilon(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

Введем функцию $\mu(t, \tau)$, равную напряжению в момент t от единичной деформации, приложенной в возрасте τ . Тогда имеем

$$R(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mu(t, \tau), \quad \mu(t, t) = E(t) \quad (2.3)$$

Подставляя $\sigma(t, \xi)$ и $\sigma_0(t)$ из уравнений (2.1), (2.2) в уравнение равновесия



Фиг. 3.

$$F_0\sigma_0(t) + \int_{\tau_1}^t \sigma(t, \xi) dF(\xi) = P(t) \quad (2.4)$$

получим, что

$$\varepsilon(t) \tilde{\mu}(t, t) - \int_{\tau_1}^t \varepsilon(\tau) \frac{\partial \tilde{\mu}(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = P(t) \quad (2.5)$$

Здесь функция $\tilde{\mu}(t, \tau)$ равна

$$\tilde{\mu}(t, \tau) = F_0\mu(t, \tau) + \int_{\tau_1}^{\tau} \mu(t - \xi, \tau - \xi) dF(\xi) \quad (2.6)$$

Соотношение (2.5) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\varepsilon(t)$. Определив $\varepsilon(t)$ из этого уравнения, можно по формулам (2.1), (2.2) найти поле напряжений в нарастающем вязкоупругом теле.

При решении данной задачи удобно принять для функции $\mu(t, \tau)$ выражение, аналогичное предложенному в [4] для функции полной деформации, то есть

$$\mu(t, \tau) = E(\tau) - \varphi(\tau) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \quad (2.7)$$

Здесь $\varphi(\tau)$ — положительная монотонно убывающая функция, имеющая положительный предел при $\tau \rightarrow \infty$. В этом случае из (2.6), (2.7) имеем, что

$$\tilde{\mu}(t, \tau) = \tilde{E}(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$$

$$\tilde{\varphi}(\tau) = F_0 \varphi(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi(\tau - \xi) dF(\xi) \quad (2.8)$$

$$\tilde{E}(\tau) = F_0 E(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} E(\tau - \xi) dF(\xi)$$

Разрешая уравнение (2.5) с учетом соотношения (2.8) способом, аналогичным рассмотренному в предыдущем параграфе, получим, что

$$\varepsilon(t) = P_0 Q(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t P(\tau) Q(t, \tau) d\tau \quad (2.9)$$

где функция $Q(t, \tau)$ определяется соотношением

$$Q(t, \tau) = \tilde{\mu}(\tau, \tau)^{-1} + \gamma \tilde{\varphi}(\tau) \tilde{\mu}(\tau, \tau)^{-1} e^{\gamma(\tau)} \int_{\tau}^t e^{-\gamma(z)} \tilde{\mu}(z, z)^{-1} dz$$

$$\gamma(\tau) = \gamma \int_{\tau_0}^{\tau} (1 - \tilde{\varphi}(z) \tilde{\mu}(z, z)^{-1}) dz \quad (2.10)$$

Уравнения (2.1) и (2.2) вместе с соотношениями (2.9), (2.10) определяют решения задачи теории ползучести для наращиваемого призматического тела, подверженного старению. На фиг. 4 показаны зависимости напряжений от времени в различных точках наращиваемого тела при постоянной во времени силе P_0 . Площадь $F(t)$ равномерно возрастает на интервале $[\tau_1, \tau_1 + T]$ до величины $4F_0$ и далее остается постоянной. Геометрическое положение точки наращиваемого тела, родившейся в момент времени ξ , характеризуется величиной соответствующей площади $F(\xi)$, равной для точек фиг. 4 соответственно F_0 ; $1,3 F_0$; $1,6 F_0$; $2,5 F_0$; $4F_0$. Фиг. 4а соответствует времени наращивания, равному $T = 100$ сут, а фиг. 4б соответствует $T = 20$ сут. Функция $\varphi(\tau)$ в соотношении (2.7) взята в виде

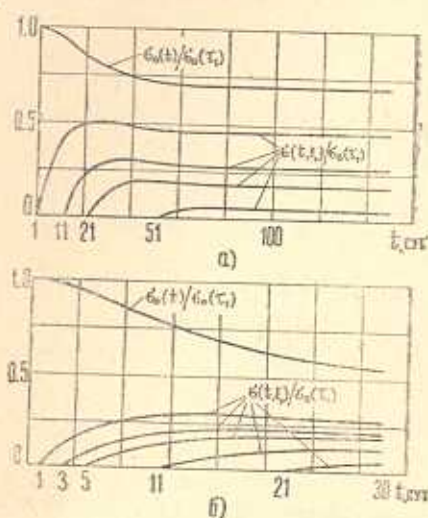
$$\varphi(\tau) = C_0 + A_0 e^{-\beta \tau}$$

Упруго-мгновенный модуль E считается постоянным, а параметры C_0/E , A_0/E , β и γ равны

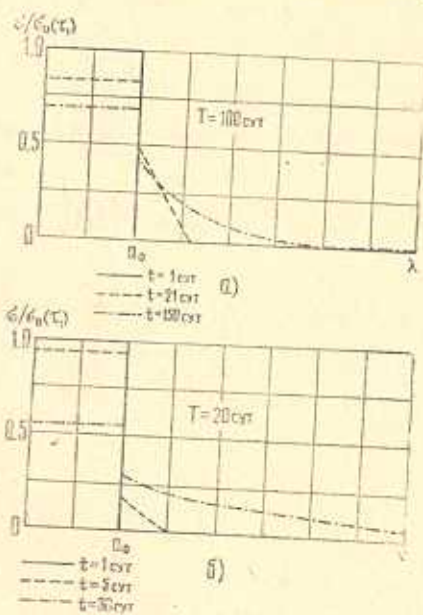
$$C_0/E = 0.05; \quad A_0/E = 0.75; \quad \beta = 0.0065 \text{ сут}^{-1}, \quad \gamma = 0.1 \text{ сут}^{-1}$$

На фиг. 5 изображены эпюры напряжений в наращиваемом теле в двух случаях, соответствующих процессам наращивания фиг. 4. На каждой из фиг. 5а, 5б эпюры представлены для трех моментов времени — начального момента $\tau_1 = 1$ сут, момента t , при котором $F(t) = 1,6 F_0$, а также финального момента времени фиг. 4, равного 30 сут при $T = 20$ сут и 150 сут

при $T = 100$ сут. Из фиг. 4, 5 видим, что при большей скорости наращивания распределение напряжений в наращиваемом теле более равномерное. Отметим, что в рассматриваемом случае наращивания при постоянной силе P процесс передачи усилия на вновь рожденные элементы определяется процессом деформирования исходного тела Ω_0 , деформация в котором



Фиг. 4.



Фиг. 5.

$\varepsilon(t)$, нарастая со временем, стремится к некоторому конечному пределу в соответствии с формулой (2.9). Величина напряжения в момент времени t в элементе, родившемся в момент времени ξ , определяется величиной скорости деформации в теле Ω_0 на отрезке $[\xi, t]$. Действительно, из (2.1) имеем

$$\sigma(t, \xi) = \int_{\xi}^t \mu(t - \tau, \tau - \xi) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

Покажем, что производная деформации в теле Ω_0 $\dot{\varepsilon}(\tau)$ с экспоненциальной скоростью стремится к нулю. Дифференцируя соотношение (2.9) по t (при постоянной силе P), получим

$$\dot{\varepsilon}(t) = c_1 e^{-\gamma(t)} \bar{p}(t, t) \quad (2.12)$$

Здесь и далее буквой c_i , $i = 1, 2, \dots$ обозначаются положительные постоянные. Так как модуль упругомгновенной деформации положителен и возрастает со временем, то

$$\bar{p}(t, t) = E(t) F_0 + \int_{\tau_1}^t E(t - \tau) d\bar{F}(\tau) \geq c_2 F(t)$$

Отсюда и из (2.12) имеем

$$\dot{\varepsilon}(t) \leq c_3 e^{-\eta(t)} / F(t) \quad (2.13)$$

Рассмотрим величину $\eta(t)$. Докажем, что

$$\eta(t) \geq c_4 t \quad (2.14)$$

Для доказательства последнего неравенства воспользуемся следующим свойством функции $\mu(t, \tau)$, определяемой соотношением (2.7) и равной напряжению в момент времени t после приложения единичной деформации в возрасте материала τ . Из требования того, чтобы напряжение при постоянной деформации не меняло знак, получаем, что при всех t, τ справедливо неравенство

$$\mu(t, \tau) > 0, \quad t \geq \tau$$

Отсюда и из (2.7) будем иметь, что

$$\varphi(\tau) < E(\tau)$$

Учтем теперь, что функция $\varphi(\tau)$ монотонно убывает, а $E(\tau)$ монотонно возрастает. С учетом этого факта получим

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(t) &= \varphi(t) F_0 + \int_{\tau_1}^t \varphi(t - \xi) dF(\xi) \leq E(t) F_0 + \\ &+ \int_{\tau_1}^t E(t - \xi) dF(\xi) - c_5 F(t) = \bar{\mu}(t, t) - c_5 F(t) \end{aligned}$$

откуда, учитывая ограниченность упругомгновенного модуля $E(t)$, заключаем, что

$$1 - \bar{\varphi}(t) / \bar{\mu}(t, t) \geq c_6$$

Отсюда и из (2.10) вытекает неравенство (2.14). Следовательно,

$$\dot{\varepsilon}(t) \leq c_3 e^{-c_4 t} / F(t) \quad (2.15)$$

Из последнего неравенства и (2.11), с учетом ограниченности функции $\mu(t, \tau)$, получим

$$\sigma(t, \xi) \leq c_7 e^{-c_4 \xi} / F(\xi) \quad (2.16)$$

Так как постоянные c_3, c_4 не зависят от функции $F(t)$, а определяются лишь функциями $E(\tau)$ и $\varphi(\tau)$, характеризующими реологические свойства материала наращиваемого тела, то заключаем, что независимо от скорости наращивания максимальные напряжения в элементах, родившихся в момент времени ξ , будут экспоненциальным образом убывать с увеличением ξ .

Полученное неравенство (2.16) объясняет наблюдаемое на фиг. 4. 5 уменьшение напряжения в точках, далеких от тела Ω_0 , с увеличением времени наращивания T . При этом в точках, близких к телу Ω_0 , напряжение увеличивается в силу интегрального уравнения равновесия. Увеличение времени наращивания приводит к увеличению неоднородности возраста элементов наращиваемого тела, что также усиливает неравномерность распределения напряжения.

3. О кручении наращиваемого вязкоупругого цилиндра с учетом старения материала.

Пусть имеется стержень Ω_0 круглого поперечного сечения радиуса r_0 , момент изготовления которого мы принимаем за начало отсчета времени. Материал стержня обладает свойствами ползучести и старения. В момент изготовления стержня к нему прикладывается крутящий момент $M = M(t)$, как показано на фиг. 6. Начиная с момента времени $\tau_1 > 0$ начинается непрерывное наращивание стержня, так что его радиус изменяется по закону $R = R(t)$. Требуется найти поле напряжений и деформаций в наращиваемом стержне на всем интервале времени $\tau_1 \leq t < \infty$. Элемент, зарожденный в момент времени ξ , будет находиться в состоянии чистого сдвига (фиг. 6). Пусть $\gamma(t, \xi)$ и $\theta(t, \xi)$ — соответственно угол сдвига и угол закручивания на единицу длины стержня в момент времени t в элементе, родившемся в момент ξ . Тогда имеем, что

$$\gamma(t, \xi) = \theta(t, \xi) R(\xi) \quad (3.1)$$

Аналогичным образом для угла сдвига $\gamma_0(t, r)$ и угла закручивания на единицу длины стержня $\theta_0(t)$ в момент времени t в стержне Ω_0 будем иметь

$$\gamma_0(t, r) = \theta_0(t) r, \quad r \leq r_0 \quad (3.2)$$

Обозначим через $\sigma(t, \xi)$ и $\sigma_0(t, r)$ соответственно касательные напряжения $\tau_{z\theta}$ в момент времени t в элементе, зарожденном в момент ξ , и в стержне Ω_0 . Прочие компоненты тензора напряжений равны нулю. Тогда, согласно [1], имеем

$$\begin{aligned} \sigma_0(t, r) &= G(t) \gamma_0(t, r) - \int_0^t \gamma_0(\tau, r) R_1(t, \tau) d\tau \\ \sigma(t, \xi) &= G(t - \xi) \gamma(t, \xi) - \int_{\xi}^t \gamma(\tau, \xi) R_1(t - \xi, \tau - \xi) d\tau \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$R_1(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mu_1(t, \tau), \quad \mu_1(t, t) = G(t)$$

Здесь $G(t)$ — упругомгновенный модуль сдвига, $R_1(t, \tau)$ — ядро сдвиговой релаксации, $\mu_1(t, \tau)$ — функция, равная касательному напряжению

в момент t от единичной сдвиговой деформации, приложенной в возрасте τ . Учитывая условие совместности деформаций, запишем, что

$$\theta(t, \xi) = \theta_0(t) - \theta_0(\xi) \quad (3.4)$$

Подставляя напряжения $\sigma_0(t, r)$ и $\sigma(t, \xi)$ с учетом (3.1), (3.2), (3.4) из соотношений (3.3) в уравнение равновесия

$$\int_0^{r_0} \sigma_0(t, r) r 2\pi r dr + \int_{\tau_1}^t \sigma(t, \xi) R(\xi) 2\pi R(\xi) dR(\xi) = M(t) \quad (3.5)$$

получим, что

$$\theta_0(t) \bar{\mu}_1(t, t) - \int_0^t \theta_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\mu}_1(t, \tau) d\tau = M(t) \quad (3.6)$$

Здесь функция $\bar{\mu}_1(t, \tau)$ равна

$$\bar{\mu}_1(t, \tau) = 2\pi \left[\frac{r_0^4}{4} \mu_1(t, \tau) + \int_{\tau_1}^{\tau} \mu_1(t - \xi, \tau - \xi) R^3(\xi) dR(\xi) \right] \quad (3.7)$$

Таким образом, задача теории ползучести кручения круглого наращиваемого стержня свелась к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода (3.6). Действительно, найдя функцию $\theta_0(t)$ из уравнения (3.6), можно пользуясь соотношениями (3.1)—(3.4), найти деформации $\gamma(t, \xi)$, $\gamma_0(t, r)$ и напряжения $\sigma(t, \xi)$, $\sigma_0(t, r)$ в любой момент времени t в любой точке наращиваемого стержня. Как и в предыдущем параграфе, для решения уравнения (3.6) возьмем функцию $\mu_1(t, \tau)$ в виде

$$\mu_1(t, \tau) = G(\tau) - \varphi(\tau) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})$$

где

$$\varphi(\tau) = C_0 + A_0 e^{-\beta\tau}, \quad C_0 > 0, A_0 > 0, \beta > 0, \gamma > 0$$

Тогда из соотношения (3.7) получим, что

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_1(t, \tau) &= \bar{G}(\tau) - \bar{\varphi}(\tau) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}) \\ \bar{\varphi}(\tau) &= 2\pi \left(\frac{r_0^4}{4} \varphi(\tau) + \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(\tau - \xi) R^3(\xi) dR(\xi) \right) \\ \bar{G}(\tau) &= 2\pi \left(\frac{r_0^4}{4} G(\tau) + \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(\tau - \xi) R^3(\xi) dR(\xi) \right) \end{aligned}$$

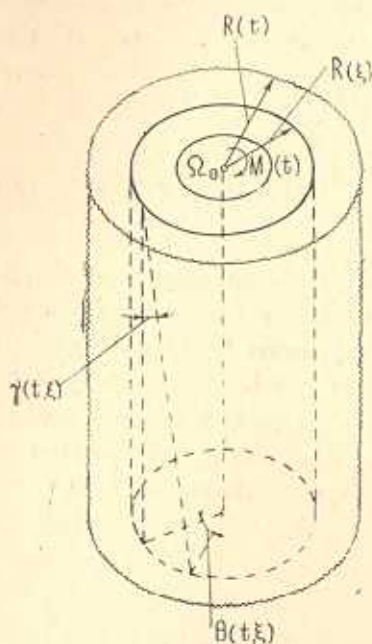
Используя соотношение (2.9), запишем решение уравнения (3.6) в форме

$$\vartheta_0(t) = M(0) Q(t, 0) + \int_0^t \dot{M}(\tau) Q(t, \tau) d\tau$$

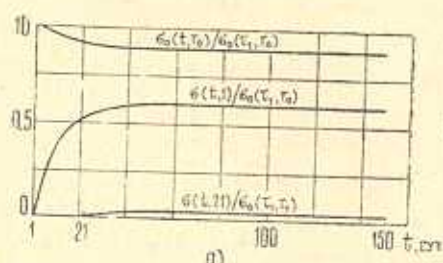
$$Q(t, \tau) = \bar{\mu}_1(\tau, \tau)^{-1} \left(1 + \gamma \bar{\varphi}(\tau) e^{\gamma(\tau)} \int_{\tau}^t e^{-\gamma(z)} \bar{\mu}_1(z, z)^{-1} dz \right) \quad (3.8)$$

$$\gamma(\tau) = \gamma \int_{\tau}^t (1 - \bar{\varphi}(z) \bar{\mu}_1(z, z)^{-1}) dz$$

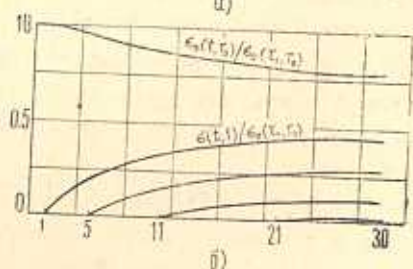
Соотношения (3.8) вместе с (3.1)—(3.4) дают решение задачи теории ползучести кручения круглого стержня при его непрерывном наращивании.



Фиг. 6.



а)



б)

На фиг. 7 представлены кривые напряжений для различных точек наращиваемого стержня при постоянном во времени крутящем моменте M . Радиус стержня изменяется от значения r_0 при $t \leq \tau_1 = 1$ сут до значения r_1 и далее остается постоянным. При наращивании скорость изменения площади поперечного сечения стержня, пропорциональная объему материала, наращиваемому за единицу времени, постоянна. Фиг. 7а соответствует времени наращивания, равному 100 сут, а фиг. 7б — 20 сут. Модуль сдвига G принят при расчетах постоянным. Остальные параметры задачи фиксированы и равны $r_1/r_0=3$; $C_0/G=0.03$; $A_0/G=0.47$; $\beta=0.0065$ сут $^{-1}$; $\gamma=0.1$ сут $^{-1}$. Значения параметров C_0/G , A_0/G , β , γ выбраны из условия аппроксимации кривых ползучести бетона, полученных в опытах Росса [6].

Результаты расчетов, приведенные на фиг. 7, показывают, что как характер кривых $\sigma_0(t, r_0)$, $\sigma(t, \xi)$, так и влияние времени (скорости) наращивания на распределение напряжений в наращиваемом цилиндре аналогичны соответствующим результатам предыдущего параграфа. Действительно, выражения (2.9) и (3.8) для функций $\varepsilon(t)$ и $\theta_0(t)$ имеют одинаковую форму; значит, для величины $\theta_0(t)$ справедливо неравенство, аналогичное (2.15) (с заменой площади $F(t)$ на величину $2\pi R^2(t)/4$). Аналогом соотношения (2.11) является вытекающее из (3.3) соотношение

$$\sigma(t, \xi) = R(\xi) \int_{\xi}^t \mu_1(t - \xi, \tau - \xi) \theta_0(\tau) d\tau$$

Следовательно, для напряжения $\sigma(t, \xi)$ справедливо неравенство (2.16), в котором площадь $F(\xi)$ надо заменить на $2\pi R^2(\xi)/4$. В силу вышесказанного в рассматриваемой задаче справедлив сделанный в § 2 вывод об экспоненциальном убывании с ростом ξ максимального напряжения в элементе, зарожденном в момент времени ξ , при постоянном моменте M , а также об усилении неравномерности распределения напряжений в наращиваемом теле при увеличении времени возведения.

Институт механики АН Армянской ССР
Институт проблем механики АН СССР

Поступила 5 VI 1981

Ն. Գ. ԱՐՈՒՅԱՆԻԱՆ, Վ. Վ. ՄԵՏԼՈՎ

ՄԵՐԱՑՄԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ԱՃՈՂ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ
ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո մ

Աշխատանքում արվում են անհամասեռ ծիրացող մարմինների համար նրանց, ընդհատումներով և անընդհատ տարրեր հասակ ունեցող էլեմենտներով, աճման սողրի տեսության մի քանի խնդիրների դրվածքը և լուծումը:

Ինքնում է սկզբնական հավասարումը և ձևակերպվում են այն պայմանները, որոնք որոշում են նշված մարմինների համար սողրի տեսության դիտարկվող խնդիրների լուծումները:

Նկարագրվում է դիտարկվող խնդիրների համար հիմնական հավասարումների լուծման եղանակը:

SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF CREEP FOR GROWING BODIES SUBJECT TO AGEING

N. Gh. ARUTUNIAN, V. V. METLOV

S u m m a r y

In this paper the solutions of some problems of the theory of creep for non-homogeneous-ageing bodies before their discrete and continuous growing by elements having different age are presented.

The initial equation is given and the conditions which define the solutions of the problems of the theory of creep for such bodies are formulated. The method of solution of the main equations for the considered problems is rendered and their structure is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел.—Изв. АН СССР, МГТ, 1976, № 3.
2. Арутюнян Н. Х. О теории ползучести для неоднородно стареющих сред.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, 3.
3. Арутюнян Н. Х. Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.— ПММ, 1977, т. 41, 5.
4. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат, 1952.
5. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
6. Ross A. D. Creep of Concrete under variable Stress.—Journal of the Amer. Concr. Inst., 1958, vol. 29, No. 9.